Fisica Nucleare e Subnucleare

Prova Scritta, 8 Gennaio 2020

Modulo I

1) Definire il gruppo di Lorentz $O(3,1)$. Data una generica matrice $\Lambda^\mu{}_\nu$ del gruppo derivare i possibili valori che la componente $\Lambda^0{}_0$ può assumere. Scrivere infine le condizioni che definiscono il gruppo di Lorentz proprio ed ortocrono $SO^\uparrow(3,1)$.

Soluzione:

Il gruppo di Lorentz è definito da

$$O(3,1) = \{\Lambda, \text{matrici reali } 4\times 4 \mid \Lambda^T \eta\, \Lambda = \eta\}$$

dove η è il tensore metrico di Minkowski

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; .$$

In notazioni tensoriali la proprietà $\Lambda^T \eta\, \Lambda = \eta$ assume la forma

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta = \eta_{\alpha\beta}$$

e valutando la componente 00 di questa relazione si ottiene

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_0 \Lambda^\nu{}_0 = \eta_{00} = -1$$

esplicitando inoltre il lato sinistro

$$-(\Lambda^0{}_0)^2 + \sum_{i=1}^{3} (\Lambda^i{}_0)^2 = -1$$

per cui

$$(\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + \sum_{i=1}^{3} (\Lambda^i{}_0)^2 \geq 1$$

e quindi

$$\Lambda^0{}_0 \geq 1 \qquad \text{oppure} \qquad \Lambda^0{}_0 \leq -1 \; .$$

Infine, il gruppo di Lorentz proprio ed ortocrono è definito da da

$$SO^\uparrow(3,1) = \{\Lambda, \text{matrici reali } 4\times 4 \mid \Lambda^T \eta\, \Lambda = \eta\, , \det \Lambda = 1\, , \Lambda^0{}_0 \geq 1\} \; .$$

*****

2) Il tensore del campo elettromagnetico $F^{\mu\nu}$ è un tensore antisimmetrico. Come si trasforma per una generica trasformazione di Lorentz? Mostrare che anche il tensore trasformato $F'^{\mu\nu}$ rimane un tensore antisimmetrico.

Soluzione:
Sotto una trasformazione di Lorentz $x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ il tensore del campo elettromagnetico si trasforma come

$$F^{\mu\nu} \to F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma} \ .$$

Sappiamo che $F^{\mu\nu}$ è antisimmetrico, i.e. $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$. Mostriamo che anche $F'^{\mu\nu}$ lo è:

$$\begin{aligned} F'^{\mu\nu} &= \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma} \\ &= \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma (-F^{\sigma\rho}) \\ &= -\Lambda^\nu{}_\sigma \Lambda^\mu{}_\rho F^{\sigma\rho} \\ &= -F'^{\nu\mu} \end{aligned}$$

*****

3) Un particella di massa m ed energia cinetica $2m$ collide con una particella ferma di massa $3m$ formando una particella composta. Quale è la massa della particella composta e la sua velocità?

Soluzione:
Dal testo si evince che si usano unità con $c = 1$. La particella in moto ha energia totale $E_1 = m + 2m = 3m$ e quindi un quadrimpulso totale

$$p_1^\mu = (E_1, \vec{p}_1) = (3m, \vec{p}_1) \qquad \text{con} \quad \vec{p}_1^{\,2} = 8m^2$$

dove l'ultima relazione segue da $p_1^\mu p_{1\mu} = -m^2$. La particella ferma ha quadrimpulso totale

$$p_2^\mu = (3m, 0) \ .$$

Per la conservazione del quadrimpulso totale, la particella finale ha impulso

$$p^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu = (6m, \vec{p}_1) \tag{1}$$

il cui modulo quadro vale

$$p^\mu p_\mu = -M^2 = -36m^2 + \vec{p}_1^{\,2} = -28m^2$$

da cui segue che

$$M = 2\sqrt{7}m \ .$$

Rientroduciamo ora c e ricordiamo che in generale il quadrimpulso di una particella vale $p^\mu = (\frac{E}{c}, \vec{p}) = (mc\gamma, m\vec{v}\gamma)$, da cui si deduce che la velocità della particella è

$$|\vec{v}| = \frac{|\vec{p}|}{E} c^2$$

Con $c = 1$ dalla (1) segue che

$$|\vec{v}| = \frac{|\vec{p}_1|}{E} = \frac{\sqrt{8}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

o reintroducendo c

$$|\vec{v}| = \frac{\sqrt{2}}{3} c \, .$$

*****

4) Definire il concetto di rappresentazione di un gruppo. Definire il gruppo $U(1)$ e discutere le sue rappresentazioni irriducibili.

Soluzione:
Una rappresentazione di un gruppo astratto G è data da una funzione

$$\begin{aligned} R: G &\longmapsto \text{Matrici quadrate} \\ g &\longmapsto R(g) \end{aligned}$$

tale che:
1) $R(g_1)R(g_2) = R(g_1 \cdot g_2)$
2) $R(e) = I$ con I matrice identità.

Ora, $U(1)$ è il gruppo delle fasi, $U(1) = \{e^{i\theta} \mid \theta \in [0, 2\pi]\}$. Tutte le sue rappresentazioni irriducibili unitarie sono uno-dimensionali (complesse) e sono identificate da un numero intero positivo o negativo q, detto "carica"

$$R_q(e^{i\theta}) = e^{iq\theta}$$

che infatti soddisfa alle proprietà richieste.