Fisica Nucleare e Subnucleare

Prova Scritta, 28 Gennaio 2020

Modulo I

1) Si consideri il quadrivettore $p^\mu = (a, a, 0, 0)$ con $a > 0$ e $\mu = (0, 1, 2, 3)$. Che tipo di quadrivettore è? Puo essere associato al quadrimpulso di una particella fisica? Come varia sotto una trasformazione di Lorentz diretta lungo l'asse x? Studiare che valori possono assumere le componenti del quadrivettore trasformato (tenere conto di un possibile segno della velocità della trasformazione di Lorentz).

Soluzione:
È un quadrivettore di tipo tempo, infatti

$$p^\mu p_\mu = -(p^0)^2 + (p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2 = -a^2 + a^2 = 0$$

e quindi può essere considerato come il quadrimpulso di una particella senza massa (un fotone per esempio). Sotto l'usuale trasformazione di Lorentz p^μ si trasforma come

$$p^\mu = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad p'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ a' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove

$$a' = \gamma(1-\beta)a = \frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\, a = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\, a \; .$$

Tenendo conto di un possibile segno di β (per cui $-1 < \beta < 1$), si vede che a' può assumere tutti i valori reali positivi

$$0 < a' < +\infty \; .$$

Questi possibili valori sono interpretabili come le possibili energie di un fotone, che difatti posso assumere tutti i valori reali positivi.

*****

2) Considerando nulla la massa dell'antineutrino, determinare la sua energia di soglia nell'interazione con un protone fermo per la produzione di un neutrone tramite la reazione

$$\bar{\nu}_e + p \quad \rightarrow \quad n + e^+$$

esprimendola in funzione delle masse del protone, neutrone e positrone, m_p, m_n e m_e. Si conserva il numero leptonico in tale reazione?

Soluzione:
Nel sistema LAB e con $c = 1$, assumendo nulla la massa del neutrino, possiamo scrivere

$$p^\mu_{\bar{\nu}_e} = (E, E, 0, 0) \ , \qquad p^\mu_p = (m_p, 0, 0, 0)$$

per cui il modulo quadro del quadrimpulso totale iniziale è

$$(p_{\bar{\nu}_e} + p_p)^2 = -(m_p + E)^2 + E^2 = -m_p^2 - 2m_p E \ . \tag{1}$$

Nel sistema CM, imponendo che l'energia dello stato finale sia minima (particelle ferme senza energia cinetica) abbiamo un quadrimpulso totale finale

$$P^\mu = (m_n + m_e, 0, 0, 0)$$

di modulo

$$P^2 = -(m_n + m_e)^2 \tag{2}$$

Dalla conservazione del quadrimpulso, e tenendo conto chhe il modulo quadro è uno scalare, possiamo eguagliare (1) e (2) ed ottenere l'energia di soglia

$$E = \frac{(m_n + m_e)^2 - m_p^2}{2m_p}$$

Il numero leptonico è un numero quantico additivo. In questa reazione è conservato, infatti protone e neutrone hanno numero leptonico nullo, mentre positrone ed antineutrino hanno entrambi numero leptonico uguale a -1, per cui lo stato iniziale e lo stato finale hanno lo stesso numero leptonico totale.

*****

3) Riportare gli assiomi che definisco un gruppo e verificare che le matrici ortogonali $N \times N$ con determinante uguale ad uno formano un gruppo, il gruppo $SO(N)$.

Soluzione: Un gruppo $G = \{g\}$ è un insieme di elementi g con le seguenti proprietà
1) esiste una legge di composizione: presi $g_1, g_2 \in G$ allora $g_1 \cdot g_2 = g_3 \in G$,
2) esiste l'elemento identità: $\exists e \in G$ tale che $g \cdot e = e \cdot g = g$,
3) esiste l'elemento inverso: se $g \in G$ allora $\exists g^{-1} \in G$ tale che $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$,
4) associatività: $(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$.

Il gruppo $SO(N)$ è definito dalle matrici ortogonali reali $N \times N$ con determinante uguale ad 1, dove il prodotto è definito dal solito prodotto matriciale. Verifichiamo i vari assiomi. Per il punto 1) se O_1 ed O_2 sono ortogonali e con determinante uguale ad 1, vediamo che $O_1 O_2$ è ortogonale

$$(O_1 O_2)^T O_1 O_2 = O_2^T O_1^T O_1 O_2 = O_2^T O_2 = I$$

e con determinante

$$\det(O_1 O_2) = \det O_1 \det O_2 = 1 \ .$$

Inoltre la matrice identità I è ortogonale e con det =1, e quindi appartiene al gruppo. L'inverso di ogni elemento O è dato da $O^{-1} = O^T$, che a sua volta è ortogonale e con det =1. Infine il prodotto di matrici è associativo. Tutte le proprietà di gruppo sono soddisfatte.

*****

4) Data la rappresentazione definente $R(g)$ di un gruppo G di matrici, come si trasforma il tensore $A^{a\dot{b}}$? Come si trasforma la quantità $A^{a\dot{b}}B_{a\dot{b}}$, dove A e B sono tensori?

Soluzione:
Si ha

$$A^{a\dot{b}} \quad \rightarrow \quad A'^{a\dot{b}} = [R(g)]^a{}_c \, [R^*(g)]^{\dot{b}}{}_{\dot{d}} \, A^{c\dot{d}}$$

La quantità $A^{a\dot{b}}B_{a\dot{b}}$ è evidentemente uno scalare perchè tutti gli indici dei tensori sono sommati nel modo corretto (contratti) per generare uno scalare.