Fisica Nucleare e Subnucleare

Prova Scritta, 11 Febbraio 2020

Modulo I

1) Data una trasformazione di Lorentz $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$:
i) Quali proprietà deve soddisfare $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ affinché appartenga al gruppo di Lorentz?
ii) Come si trasformano le componenti di un tensore di rango tre $S^{\mu\nu\lambda}$?
iii) Usando la trasformazione di Lorentz usuale (con velocità lungo l'asse x), trovare i valori delle componenti diverse da zero del tensore $S'^{\mu\nu\lambda}$, trasformato del tensore $S^{\mu\nu\lambda}$ la cui sola componente non nulla nel sistema di riferimento iniziale è $S^{000} = s$, con s numero reale (si noti quindi che $S^{\mu\nu\lambda}$ è un tensore totalmente simmetrico).

Soluzione:
i) Dalla richiesta di invarianza di $s^2 = \eta_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu}$ si ottiene che $\eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta}$.
ii) $S'^{\mu\nu\lambda} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} \Lambda^{\lambda}{}_{\gamma} S^{\alpha\beta\gamma}$
iii) I valori della trasformazione diversi da zero sono

$$\Lambda^0{}_0 = \Lambda^1{}_1 = \gamma \ , \qquad \Lambda^1{}_0 = \Lambda^0{}_1 = -\beta\gamma \ , \qquad \Lambda^2{}_2 = \Lambda^3{}_3 = 1$$

dove $\beta = \frac{v}{c}$ e $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, per cui

$$S'^{\mu\nu\lambda} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} \Lambda^{\lambda}{}_{\gamma} S^{\alpha\beta\gamma} = \Lambda^{\mu}{}_{0} \Lambda^{\nu}{}_{0} \Lambda^{\lambda}{}_{0} S^{000} = \Lambda^{\mu}{}_{0} \Lambda^{\nu}{}_{0} \Lambda^{\lambda}{}_{0}\, s \tag{1}$$

e le componenti diverse da zero di $S'^{\mu\nu\lambda}$ sono

$$\begin{aligned}
S'^{000} &= \Lambda^0{}_0 \Lambda^0{}_0 \Lambda^0{}_0\, s = \gamma^3 s && (2)\\
S'^{100} &= S'^{010} = S'^{001} = \Lambda^1{}_0 \Lambda^0{}_0 \Lambda^0{}_0\, s = -\beta\gamma^3 s && (3)\\
S'^{110} &= S'^{101} = S'^{111)} = \Lambda^1{}_0 \Lambda^1{}_0 \Lambda^0{}_0\, s = \beta^2\gamma^3 s && (4)\\
S'^{111} &= \Lambda^1{}_0 \Lambda^1{}_0 \Lambda^1{}_0\, s = -\beta^3\gamma^3 s \ .
\end{aligned}$$

*****

2) Un protone con energia E collide con un protone a riposo per creare una particella X di massa M oltre ai due protoni

$$p + p \qquad \rightarrow \qquad p + p + X$$

Quale è l'energia minima (energia di soglia) in funzione di m_p e M affinché il processo avvenga? Quale sarebbe l'energia minima E' se invece i due protoni si muovessero l'uno verso l'altro con uguale velocità e stessa energia E'?

Soluzione:
Il quadrimpulso totale è *conservato*, ed il suo modulo quadro è un *invariante* relativistico. Calcolando tale modulo quadro nel LAB prima dell'urto e nel CM dopo l'urto, possiamo eguagliare questi due moduli. Imponendo che l'energia sia minima nel CM (particelle a riposo senza energia cinetica dopo l'urto) si ottiene l'energia di soglia.

Procedendo in unità naturali ($c = 1$), abbiamo nel LAB prima dell'urto

$$P^{\mu}_{tot,LAB} = (E + m_p, p, 0, 0)$$

dove il protone che si muove lungo l'asse x ha energia E e momento p. Nel CM dopo l'urto

$$P^{\mu}_{tot,CM} = (2m_p + M, 0, 0, 0)$$

con le particelle a riposo (configurazione di energia minima). Uguagliando i moduli quadri

$$(P^{\mu} P_{\mu})_{tot,LAB} = (P^{\mu} P_{\mu})_{tot,CM}$$

e ricordando che $E^2 - p^2 = m_p^2$, si ricava

$$E = m_p + 2M + \frac{M^2}{2m_p} \ .$$

Nel secondo caso si osserva il processo direttamente nel sistema CM, dove per i due protoni iniziali, in moto lungo l'asse x, abbiamo

$$P^{\mu}_{1,CM} = (E', p', 0, 0) \ , \qquad P^{\mu}_{2,CM} = (E', -p', 0, 0)$$

la cui somma può essere uguagliata alla configurazione finale di energia minima

$$P^{\mu}_{tot,CM} = (2m_p + M, 0, 0, 0) \ .$$

Si ottiene

$$E' = m_p + \frac{M}{2} \ .$$

*****

3) Scrivere le equazioni di Maxwell con il formalismo tensoriale, e discutere poi il concetto di invarianza di gauge.

Soluzione:
Dato il tensore del campo elettromagnetico $F^{\mu\nu}$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

le equazioni di di Maxwell si scrivono in forma covariante come

$$\begin{aligned}&\partial_\mu F^{\mu\nu} = -J^\nu \\ &\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0\end{aligned}$$

dove $J^\mu = (J^0, \vec{J}) = (\rho, \vec{J})$ è il quadrivettore sorgente. L'ultima equazione è una condizione di integrabilità, che permette di esprimere il campo elettromagnetico $F_{\mu\nu}$ in funzione del quadripotenziale A_μ come

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

che difatti risolve automaticamente l'equazione. Tale soluzione non è univoca, poiché la trasformazione di gauge

$$A_\mu(x) \quad \to \quad A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x)$$

con $\Lambda(x)$ funzione arbitraria lascia il campo elettromagnetico invariante

$$F_{\mu\nu}(x) \quad \to \quad F'_{\mu\nu}(x) = F_{\mu\nu}(x)\ .$$

*****

4) Data la rappresentazione definente $R(g)$ di un gruppo G di matrici, come si trasforma il tensore $A^{a\dot{b}}$? Come si trasforma la quantità $A^{a\dot{b}}B_{a\dot{b}c}$, dove A e B sono tensori? Giustificare la risposta data.

Soluzione:
Si ha

$$A^{a\dot{b}} \quad \to \quad A'^{a\dot{b}} = [R(g)]^a{}_c\, [R^*(g)]^{\dot{b}}{}_{\dot{d}}\ A^{c\dot{d}}\ .$$

La quantità $A^{a\dot{b}}B_{a\dot{b}c}$ si trasforma come un vettore con indice non puntato in basso

$$V_c \equiv A^{a\dot{b}}B_{a\dot{b}c}\ , \qquad V'_c = [R(g)^{-1\,\mathrm{T}}]_c{}^d\, V_d$$

poiché gli indici contratti si comportano come uno scalare, e non è necessario trasformarli. Infatti possiamo verificare esplicitamente

$$\begin{aligned}
A'^{a\dot{b}}B'_{a\dot{b}c} &= [R(g)]^a{}_d\, [R^*(g)]^{\dot{b}}{}_{\dot{e}}\ A^{d\dot{e}}\ \ [R(g)^{-1\,\mathrm{T}}]_a{}^f [R(g)^{-1\,\dagger}]_{\dot{b}}{}^{\dot{g}} [R(g)^{-1\,\mathrm{T}}]_c{}^h B_{f\dot{g}h} \\
&= [R(g)^{-1}R(g)]^f{}_d\ [R(g)^\dagger R(g)^{-1\,\dagger}]_{\dot{e}}{}^{\dot{g}}\ [R(g)^{-1\,\mathrm{T}}]_c{}^h\ A^{d\dot{e}}B_{f\dot{g}h} \\
&= \delta^f{}_d\ \delta_{\dot{e}}{}^{\dot{g}}\ [R(g)^{-1\,\mathrm{T}}]_c{}^h\ A^{d\dot{e}}B_{f\dot{g}h} \\
&= [R(g)^{-1\,\mathrm{T}}]_c{}^h\ A^{d\dot{e}}B_{d\dot{e}h} \\
&= [R(g)^{-1\,\mathrm{T}}]_c{}^d\ A^{a\dot{b}}B_{a\dot{b}d}
\end{aligned}$$

dove nell'ultima riga abbiamo rinominato gli indici sommati per facilitare la lettura.