2.3.2017

Fisica Teorica 2: Introduzione al corso e superalgebre

(Appunti per il corso di Fisica Teorica 2 – 2016/17)

Fiorenzo Bastianelli

1 Introduzione

Nel corso di Fisica Teorica 1 abbiamo studiato:
• le equazioni relativistiche di Klein-Gordon (spin 0), Dirac (spin 1/2) e Maxwell-Proca (spin 1), viste come equazioni d'onda della meccanica quantistica relativistica (dette anche equazioni di prima quantizzazione),
• la meccanica classica ed il principio d'azione di particelle relativistiche scalari, dalla cui quantizzazione canonica (prima quantizzazione) emerge l'equazione d'onda di Klein-Gordon,
• la quantizzazione tramite l'integrale funzionale (path integral).

In Fisica Teorica 2 studieremo come estendere la trattazione di prima quantizzazione a particelle con spin, introducendo concetti ed argomenti necessari per questa estensione, ma che hanno una valenza molto più ampia nella fisica teorica. Questi argomenti sono:
i) variabili di Grassmann e loro uso per descrivere a livello classico sistemi fermionici (sistemi che quantizzati soddisfano al principio di Pauli),
ii) quantizzazione sia canonica sia con integrale funzionale dei sistemi fermionici,
iii) concetto di supersimmetria, simmetria particolare che relaziona bosoni e fermioni. Questa simmetria è ampiamente usata per congetturare estensioni del modello standard delle particelle elementari, ed è fondamentale nella costruzione della teoria delle superstringhe, usate come modello di gravità quantistica e unificazione delle forze fondamentali,
iv) sistemi hamiltoniani vincolati, che emergono in particolare quando si trattano con metodi hamiltoniani le teorie con simmetrie locali (teorie di gauge),
v) cenni alla quantizzazione canonica e alla quantizzazione con l'integrale funzionale delle teorie di gauge.

Tutti questi strumenti verranno applicati nella descrizione di prima quantizzazione delle particelle relativistiche con spin, che forma il filo conduttore del corso. I metodi di prima quantizzazione sono usati per ottenere in modo più efficace risultati della teoria quantistica dei campi (formalismo linea di mondo o "worldline formalism"). La prima quantizzazione è inoltre lo strumento principe usato nella formulazione della teoria delle stringhe, e pedagogicamente l'analisi delle particelle rappresenta il primo passo per lo studio delle stringhe.

2 Particella relativistica scalare e campo di Klein Gordon

Per esemplificare l'uso della prima quantizzazione nel riprodurre risulati della teoria quantistica dei campi, riprendiamo brevemente il caso della particella relativistica scalare, il quanto del campo di Klein Gordon.

L'azione è proporzionale alla lunghezza della linea di mondo della particella con coordinate spazio-temporali $x^\mu(\tau)$ ed in unità naturali è data da

$$S[x^\mu] = -m \int |ds| = -m \int d\tau \sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu} \tag{1}$$

dove τ è un parametro temporale arbitrario. L'arbitrarietà della scelta di τ costituisce l'invarianza locale associata alle riparametrizzazioni della linea di mondo, ed è responsabile dell'emergere di un sistema hamiltoniano vincolato. Esplicitiamo questo ultimo punto. Per passare alla formulazione hamiltoniana si definiscono i momenti coniugati

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{m\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}} \tag{2}$$

e si nota immediatamente la presenza di un vincolo (il vincolo di mass-shell)

$$p_\mu p^\mu + m^2 = 0 \tag{3}$$

che implica che la relazione (2) non è invertibile per esprimere le velocità in funzione dei momenti. Dunque siamo in presenza di un sistema hamiltoniano vincolato, la cui dinamica avviene solo su una ipersuperficie dello spazio delle fasi, ipersuperficie definita appunto dal vincolo $p_\mu p^\mu + m^2 = 0$. Se calcoliamo la hamiltoniana canonica vediamo che essa si annulla (fenomeno tipico in sistemi invarianti per riparametrizzazioni)

$$H_0 = p_\mu \dot{x}^\mu - L = 0\ . \tag{4}$$

La corrispondente azione nello spazio delle fasi deve tener conto della presenza del vincolo. Usando un moltiplicatore di Lagrange (l'einbein e) l'azione assume la forma

$$S[x,p,e] = \int d\tau \Big[p_\mu \dot{x}^\mu - e\frac{1}{2}(p^2+m^2)\Big]\ . \tag{5}$$

Le parentesi di Poisson tra le variabili dello spazio delle fasi x^μ e p_μ sono

$$\{x^\mu, p_\nu\} = \delta^\mu_\nu\ , \quad \{x^\mu, x^\nu\} = \{p_\mu, p_\nu\} = 0\ . \tag{6}$$

Sotto quantizzazione le coordinate dello spazio delle fasi diventano operatori x^μ e p_μ con regole di commutazione definite (con $\hbar = 1$) da

$$[\hat{x}^\mu, \hat{p}_\nu] = i\delta^\mu_\nu\ , \quad [\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = [\hat{p}_\mu, \hat{p}_\nu] = 0\ . \tag{7}$$

Siccome l'hamiltoniana canonica si annulla, l'equazione di Schrödinger assume la forma

$$i\frac{\partial}{\partial\tau}|\phi\rangle = 0 \tag{8}$$

che dice che lo stato $|\phi\rangle$ non dipende da τ, mentre l'equazione di vincolo diventa un'equazione operatoriale, l'equazione di Klein-Gordon

$$(\hat{p}_\mu \hat{p}^\mu + m^2)|\phi\rangle = 0 \tag{9}$$

che nella rappresentazione delle coordinate assume la forma standard

$$(-\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi(x) = 0\ . \tag{10}$$

In conclusione, la quantizzazione canonica della particella relativistica scalare riproduce l'equazione di Klein-Gordon.

Usiamo ora il metodo equivalente della quantizzazione con l'integrale funzionale della particella scalare per derivare il propagatore del campo di Klein-Gordon. A questo scopo studiamo l'ampiezza

$$A(x_i, x_f) = \int \frac{DxDe}{\text{vol(Gauge)}} \, e^{iS[x,e]} \tag{11}$$

dove la divisione per il volume (infinito) del gruppo di gauge è necessario per non contare infinite volte la stessa configurazione fisica (che ha infinite copie proprio a causa della simmetria locale). L'azione nello spazio delle configurazioni è ottenuta eliminando i momenti coniugati

$$S[x,e] = \int_0^1 d\tau \Big[\frac{1}{2}e^{-1}\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu - \frac{1}{2}em^2\Big] \tag{12}$$

e con condizioni al contorno $x^\mu(0) = x_i^\mu$ e $x^\mu(1) = x_f^\mu$.

Per semplicità consideriamo la versione euclidea del problema applicando un'opportuna rotazione di Wick ($\tau \to -i\tau$ e $x^0 \to -ix^4$)

$$\begin{aligned} A(x_i, x_f) &= \int \frac{DxDe}{\text{vol(Gauge)}} \, e^{-S[x,e]} \\ S[x,e] &= \int_0^1 d\tau \Big[\frac{1}{2}e^{-1}\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu + \frac{1}{2}em^2)\Big] \,. \end{aligned} \tag{13}$$

Per procedere con il calcolo occorre "fissare il gauge". Non affronteremo ora il problema nella sua generalità, ma descriveremo brevemente la soluzione nel caso presente. La simmetria di gauge permette di scegliere come condizione di gauge-fixing $e(\tau) = 2T$, con T costante opportuna. Il valore di T è fissato dalla lunghezza della linea di mondo, misurata con la metrica intrinseca definita dall'einbein. Questa lunghezza è data da $\int_0^1 d\tau e(\tau) = 2T$ e risulta essere gauge invariante (invariante per ridefinizione del parametro τ). L'integrale su tutti i possibili einbeins $e(\tau)$ implica un integrale su tutte le possibili lunghezze, e quindi su T. L'ampiezza assume quindi la forma

$$\begin{aligned} A(x_i, x_f) &= \int_0^\infty dT \, e^{-m^2 T} \int Dx \, e^{-S[x]} \\ S[x] &= \int_0^1 d\tau \frac{1}{4T} \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu \,. \end{aligned} \tag{14}$$

A parte l'integrale su T, il path integral rimanente è identico a quello di una particella non relativistica libera e di massa opportuna, la cui soluzione è gia stata descritta precedentemente. Quest'ultima può essere riscritta in termini della sua trasformata di Fourier

$$\begin{aligned} \int Dx \, e^{-S[x]} &= \frac{1}{(4\pi T)^{\frac{D}{2}}} \, e^{-\frac{(x_f - x_i)^2}{4T}} \\ &= \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \, e^{ip_\mu (x_f^\mu - x_i^\mu)} e^{-p^2 T} \,. \end{aligned} \tag{15}$$

dove $D = 4$ sono le dimensioni dello spazio-tempo, dimensioni che per ora possiamo mantenere arbitrarie. Inserita nella formula sopra produce

$$\begin{aligned} A(x_i, x_f) &= \int_0^\infty dT \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D}\, e^{ip_\mu(x_f^\mu - x_i^\mu)} e^{-(p^2+m^2)T} \\ &= \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D}\, e^{ip_\mu(x_f^\mu - x_i^\mu)}\, \frac{1}{p^2+m^2}\ . \end{aligned} \tag{16}$$

Con la rotazione di Wick inversa ($x^4 \to ix^0$ e $p^4 \to -ip^0$) si ritorna allo spazio di Minkowski e si ottiene il propagatore con le corrette prescrizioni di Feynman-Stückelberg, che coincide con la funzione a due punti del propagatore del campo di Klein-Gordon ottenuto in QFT (seconda quantizzazione)

$$\langle \Omega | T \hat{\phi}(x_f) \hat{\phi}^\dagger(x_i) | \Omega \rangle = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D}\, e^{ip_\mu(x_f^\mu - x_i^\mu)}\, \frac{(-i)}{p^2+m^2-i\epsilon} \tag{17}$$

dove $|\Omega\rangle$ è lo stato di vuoto della teoria di campo quantistica.

Questo risultato esemplifica come il metodo della prima quantizzazione di particelle relativistiche permetta di ottenere risulati della teoria di campo quantistica. Lo scopo di quest'ultima è quello di formalizzare ed estendere la meccanica quantistica relativistica ad un numero arbitrario di particelle identiche.

3 Algebre e superalgebre di Lie

Le superalgebre di Lie sono una estensione molto utile in fisica teorica del concetto di algebra di Lie. In particolare, le algebre di supersimmetria sono particolari superalgebre di Lie che emergono nella descrizione di modelli fisici caratterizzati da una particolare simmetria, detta supersimmetria, che relaziona tra loro stati bosonici e stati fermionici.

3.1 Algebre di Lie

Le algebre di Lie caratterizzano le trasformazioni infinitesime di un gruppo di Lie, che per definizione è un gruppo di elementi che dipendono in modo continuo da alcuni parametri. Esempi tipici di gruppi di Lie sono $SO(3)$, $U(1)$, $SU(2)$, $SU(3)$, il gruppo di Lorentz $SO(3,1)$, il gruppo di Poincarè $ISO(3,1)$, etc.. Si può pensare ad un gruppo G come ad un gruppo di matrici quadrate (o, più in generale, ad un gruppo di operatori lineari agenti su uno spazio vettoriale, come ad esempio operatori agenti su uno spazio di Hilbert) i cui elementi $g(\alpha)$ (connessi all'identità) possono essere scritti in forma esponenziale come

$$g(\alpha) = e^{i\alpha_a B^a} \tag{18}$$

dove α_a con $a = 1, ..., \dim G$ sono parametri reali (i parametri indipendenti del gruppo di Lie). Le matrici (operatori lineari) B^a sono i generatori infinitesimi che soddisfano l'algebra di Lie associata al gruppo, definita dal commutatore

$$[B^a, B^b] = i f^{ab}{}_c B^c\ . \tag{19}$$

Le costanti $f^{ab}{}_c$ sono chiamate costanti di struttura e caratterizzano il gruppo in questione. Queste costanti sono ovviamente antisimmetriche negli indici a e b. Per il resto non sono arbitrarie, ma devono soddisfare alle identità di Jacobi

$$f^{ab}{}_d f^{dc}{}_e + f^{bc}{}_d f^{da}{}_e + f^{ca}{}_d f^{db}{}_e = 0\ . \tag{20}$$

Queste identità emergono dalle relazioni

$$[[B^a, B^b], B^c] + \text{perm. cicliche} = 0 \tag{21}$$

e cioè

$$[[B^a, B^b], B^c] + [[B^b, B^c], B^a] + [[B^c, B^a], B^b] = 0 \tag{22}$$

ovvie per matrici e operatori lineari (il cui prodotto è associativo).

Killing e Cartan hanno classificato tutte le algebre di Lie semplici risolvendo queste equazioni quadratiche.

È utile ricordare che le costanti di struttura permettono di definire la rappresentazione aggiunta tramite l'introduzione delle matrici

$$(B^a)^b{}_c = -if^{ab}{}_c \tag{23}$$

che grazie alle identità di Jacobi riproducono l'algebra di Lie (19). Evidentemente la dimensione di questa rappresentazione coincide con la dimensione del gruppo, poichè $a, b, c = 1, ..., \dim G$.

Teorema di Coleman-Mandula

Questo teorema afferma che il gruppo di simmetrie di Lie più generale in teorie di campo quantistiche relativistiche (con mass gap) è dato da $ISO(3,1) \otimes G$, il prodotto del gruppo di Poincaré $ISO(3,1)$ per un gruppo di simmetria interno G, la cui algebra di Lie è descritta dai generatori $P_\mu, M_{\mu\nu}, B^a$ con algebra

$$\begin{aligned}
[P_\mu, P_\nu] &= 0 && (24)\\
[M_{\mu\nu}, M_{\lambda\rho}] &= -i\eta_{\nu\lambda}M_{\mu\rho} + i\eta_{\mu\lambda}M_{\nu\rho} + i\eta_{\nu\rho}M_{\mu\lambda} - i\eta_{\mu\rho}M_{\nu\lambda} && (25)\\
[M_{\mu\nu}, P_\lambda] &= -i\eta_{\nu\lambda}P_\mu + i\eta_{\mu\lambda}P_\nu && (26)\\
[B^a, B^b] &= if^{ab}{}_c B^c && (27)\\
[P_\mu, B^a] &= 0 && (28)\\
[M_{\mu\nu}, B^a] &= 0\ . && (29)
\end{aligned}$$

Le prime tre relazioni descrivono l'algebra di Lie del gruppo di Poincaré $ISO(3,1)$. Il punto cruciale dimostrato dal teorema è dato dalle ultime due relazioni, che dicono che il gruppo di simmetria G può solo essere un gruppo di simmetria interno, che non si mescola con le trasformazioni di spazio-tempo dettate del gruppo di Poincaré.

3.1.1 Esempi di realizzazioni del gruppo di Poincaè in teorie quantistiche

Particella scalare relativistica

Nella quantizzazione covariante della particella descritta sopra, in cui gli operatori fondamentali $\hat{x}^\mu$ e $\hat{p}_\mu$ soddisfano le relazioni di commutazione

$$[\hat{x}^\mu, \hat{p}_\nu] = i\delta^\mu_\nu\ , \quad [\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = [\hat{p}_\mu, \hat{p}_\nu] = 0\ , \tag{30}$$

i generatori del gruppo di Poincaré sono realizzati da

$$P_\mu \ \rightarrow\ \hat{p}_\mu\ , \qquad M_{\mu\nu} \ \rightarrow\ \hat{x}_\mu\hat{p}_\nu - \hat{x}_\nu\hat{p}_\mu\ . \tag{31}$$

Usando le relazioni fondamentali in (30), si verifica facilmente che la corretta algebra di Lie del gruppo $ISO(3,1)$ è riprodotta.

Campo scalare di Klein-Gordon

L'azione di un campo scalare di Klein-Gordon complesso

$$S[\phi,\phi^*] = \int d^4x \underbrace{\Big(- \partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \Big)}_{\mathcal{L}} \tag{32}$$

permette di studiarne le simmetrie e di procedere alla quantizzazione canonica. Dal teorema di Noether si ricavano le leggi di conservazione associate al gruppo di Poincaré. In particolare, dalle traslazioni spazio-temporali si ottiene il tensore energia-impulso $T^{\mu\nu}$

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi^* \partial^\nu \phi + \partial^\nu \phi^* \partial^\mu \phi + \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \tag{33}$$

conservato, $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Similmente, dalle trasformazioni di Lorentz si ottiene $\partial_\mu \mathcal{M}^{\mu\nu\lambda} = 0$, dove

$$\mathcal{M}^{\mu\nu\lambda} = x^\nu T^{\mu\lambda} - x^\lambda T^{\mu\nu} \ . \tag{34}$$

Definendo le cariche

$$P^\mu = \int d^3x \, T^{0\mu} \ , \qquad M^{\mu\nu} = \int d^3x \, M^{0\mu\nu} \tag{35}$$

si può verificare che queste, sotto quantizzazione, definiscono operatori lineari che realizzano la corretta algebra di Poincaré. L'azione possiede anche una simmetria interna $U(1)$, generato dalle trasformazioni di fase del campo, a cui è associata la corrente di Noether $J^\mu = i\phi^* \overset{\leftrightarrow}{\partial^\mu} \phi$ e carica $J = \int d^3x \, J^0$. La simmetria totale è data dal gruppo $ISO(3,1) \otimes U(1)$ ed il teorema di Coleman-Mandula è rispettato. Infatti si può dimostrare (ma non lo faremo) che a livello quantistico

$$[P^\mu, J] = 0 \ , \qquad [M^{\mu\nu}, J] = 0 \ . \tag{36}$$

3.2 Superalgebre di Lie

Le superalgebre di Lie sono definite come algebre graduate (con gradazione Z_2) contenenti un set di generatori bosonici B^a (con parità $+1$ sotto Z_2) ed un set di generatori fermionici F^α (con parità -1 sotto Z_2), soddisfacenti alle seguenti regole di commutazione/anticommutazione

$$\begin{aligned} [B^a, B^b] &= i f^{ab}{}_c B^c & (37)\\ [B^a, F^\alpha] &= i g^{a\alpha}{}_\beta F^\beta & (38)\\ \{F^\alpha, F^\beta\} &= h^{\alpha\beta}{}_a B^a \ . & (39) \end{aligned}$$

Si noti che la gradazione Z_2 è rispettata dai commutatori/anticommutatori. In aggiunta le costanti di struttura $f^{ab}{}_c$, $g^{a\alpha}{}_\beta$, $h^{\alpha\beta}{}_a$ devono soddisfare le seguenti identità di Jacobi

$$\begin{aligned} & f^{ab}{}_d f^{dc}{}_e + f^{bc}{}_d f^{da}{}_e + f^{ca}{}_d f^{db}{}_e = 0 \\ & f^{ab}{}_c g^{c\alpha}{}_\gamma - g^{b\alpha}{}_\beta g^{a\beta}{}_\gamma + g^{a\alpha}{}_\beta g^{b\beta}{}_\gamma = 0 \\ & g^{a\alpha}{}_\gamma h^{\gamma\beta}{}_c + h^{\alpha\beta}{}_b f^{ba}{}_c + g^{a\beta}{}_\gamma h^{\gamma\alpha}{}_c = 0 \\ & h^{\alpha\beta}{}_a g^{a\gamma}{}_\delta + h^{\beta\gamma}{}_a g^{a\alpha}{}_\delta + h^{\gamma\alpha}{}_a g^{a\beta}{}_\delta = 0 \ . \end{aligned} \tag{40}$$

Queste identità emergono dalla richiesta che valga

$$[[G_1, G_3\}, G_3\} + \text{perm. cicliche graduate} = 0 \tag{41}$$

necessaria se la superalgebra deve essere realizzata in termini di operatori lineari. Qui si è usata la notazione compatta

$$[\cdot\,,\cdot\} = \begin{cases} \{\cdot\,,\cdot\} & \text{anticommutatore se entrambe le variabili sono fermioniche} \\ [\cdot\,,\cdot] & \text{commutatore altrimenti} \end{cases} \tag{42}$$

Le dicitura "permutazioni cicliche graduate" si riferisce al fatto che un segno meno è introdotto ogniqualvolta due generatori fermionici si scambiano di posizione. In dettaglio, la (41) è esplicitata in

$$\begin{aligned} &[[B^a, B^b], B^c] + [[B^b, B^c], B^a] + [[B^c, B^a], B^b] = 0 \\ &[[B^a, B^b], F^\alpha] + [[B^b, F^\alpha], B^a] + [[F^\alpha, B^a], B^b] = 0 \\ &\{[B^a, F^\alpha], F^\beta\} + [\{F^\alpha, F^\beta\}, B^a] - \{[F^\beta, B^a], F^\alpha\} = 0 \\ &[\{F^\alpha, F^\beta\}, F^\gamma] + [\{F^\beta, F^\gamma\}, F^\alpha] + [\{F^\gamma, F^\alpha\}, F^\beta] = 0 \end{aligned} \tag{43}$$

facilmente verificabili, da cui seguono le (40). Si noti che la prima relazione in (40) dice che i generatori bosonici B^a formano una sottoalgebra di Lie, mentre la seconda relazione può essere interpretata dicendo che le costanti $g^{a\alpha}{}_\beta$ formano una rappresentazione di questa sottoalgebra, identificata dalle matrici

$$(B^a)^\alpha{}_\beta = -i g^{a\alpha}{}_\beta \ . \tag{44}$$

Kač ha classificato le superalgebre di Lie semplici risolvendo le relazioni quadratiche dettate dalle identità di Jacobi.

Particolari esempi di superalgebre sono le cosiddette algebre di supersimmetria, che estendono l'algebra di Poincarè con opportuni generatori fermionici. Queste particolari superalgebre sono di interesse fisico a causa del teorema di Haag-Lopuszanski-Sohnius, che generalizza il teorema di Coleman-Mandula inserendo nelle ipotesi anche la possibilità di usare anticommutatori.

Teorema di Haag-Lopuszanski-Sohnius

Ammettendo l'uso di anticommutatori, le superalgebre di simmetria più generali ammesse in teorie di campo quantistiche relativistiche (con mass gap) sono le algebre di supersimmetria.

Le algebre di supersimmetria per definizione estendono l'algebra di Poincaré in superalgebre che contengono uno o più generatori fermionici. Questi ultimi devono essere necessariamente spinori di spin 1/2, altrimenti le identità di Jacobi non sarebbero soddisfatte. Le dimensioni di uno spinore dipendono dalle dimensioni dello spazio-tempo, e di conseguenza anche la struttura dettagliata delle algebre di supersimmetria dipende dalle dimensioni dello spazio-tempo.

L'algebra di supersymmetria in $D = 4$ con $N = 1$ cariche di supersimmetria (una carica di supersimmetria che forma uno spinore di Majorana in $D = 4$, e quindi con sole quattro componenti reali) contiene $(P_\mu, M_{\mu\nu}, Q_\alpha)$ con P_μ e $M_{\mu\nu}$ generatori bosonici e Q_α (con α indice spinoriale) generatori fermionici, ed assume la forma

$$\begin{aligned}
[P_\mu, P_\nu] &= 0 \\
[M_{\mu\nu}, M_{\lambda\rho}] &= -i\eta_{\nu\lambda}M_{\mu\rho} + i\eta_{\mu\lambda}M_{\nu\rho} + i\eta_{\nu\rho}M_{\mu\lambda} - i\eta_{\mu\rho}M_{\nu\lambda} & (45)\\
[M_{\mu\nu}, P_\lambda] &= -i\eta_{\nu\lambda}P_\mu + i\eta_{\mu\lambda}P_\nu & (46)\\
[P_\mu, Q_\alpha] &= 0 \\
[M_{\mu\nu}, Q_\alpha] &= i(\Sigma_{\mu\nu})_\alpha{}^\beta Q_\beta \\
\{Q_\alpha, Q_\beta\} &= (\gamma^\mu C)_{\alpha\beta}P_\mu\ . & (47)
\end{aligned}$$

Qui sopra le matrici $\Sigma^{\mu\nu} = -\frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ identificano la rappresentazione spinoriale dei generatori di Lorentz, e C è la matrice coniugazione di carica usata per abbassare un indice nelle matrici γ^μ. Le prime tre relazioni formano la sottoalgebra di Poincarè, le due relazioni successive mostrano che la carica di supersimmetria Q_α è invariante per traslazioni spazio-temporali e si trasforma come uno spinore di spin 1/2 per trasformazioni di Lorentz, compaiono infatti i generatori del gruppo di Lorentz nella rappresentazione spinoriale $\Sigma_{\mu\nu}$. L'ultima relazione è forse il marchio più caratteristico della supersimmetria, e dice essenzialmente che la composizione di due superismmetrie produce una traslazione spazio-temporale: le supersimmetria è una simmetria di spazio-tempo, non una simmetria interna!

Non studieremo in dettaglio le teorie supersimmetriche in $D = 4$, ma esemplificheremo la supersimmetria in $D = 1$, la dimensione della linea di mondo interpretata come spazio-tempo $0 + 1$ dimensionale. Se l'indice μ può assumere il solo valore $\mu = 0$, le cariche bosoniche dell'algebra di Poincarè si riducono alla sola $P^\mu = P^0 = H$, l'hamiltoniana, che genera le traslazioni (temporali). Unendo a questa hamiltoniana una carica fermionica reale (hermitiana) si ha la più semplice algebra di supersimmetria (susy), la *susy* $N = 1$ *in* $D = 1$. L'algebra di supersimmetria $N = 1$ in $D = 1$ ha quindi solo due generatori (H, Q) con H bosonico e Q fermionico, e la sola relazione di (anti)commutazione non nulla è data da

$$\{Q, Q\} = 2H \tag{48}$$

mentre tutti gli altri possibili commutatori graduati sono nulli. È facile mostrare che questa superalgebra è consistente poichè tutte le identità di Jacobi sono soddisfatte. Similmente l'algebra di supersimmetria $N = 2$ in $D = 1$ è ottenuta considerano due generatori fermionici hermitiani, o equivalentemente un generatore complesso Q ed il suo complesso coniugato $\bar{Q}$, e definendo la superalgebra

$$\{Q, \bar{Q}\} = 2H\ , \qquad \{Q, Q\} = \{\bar{Q}, \bar{Q}\} = 0\ , \quad [Q, H] = [\bar{Q}, H] = 0\ . \tag{49}$$

Tipicamente si estende questa algebra con un ulteriore generatore bosonico F, generatore del gruppo $U(1)$, che descrive una simmetria delle supercariche Q e $\bar{Q}$ che possono essere ruotate di una fase (la simmetria delle cariche di supersimmetria è tradizionalmente chiamate simmetria-R), e in questa forma più generale la *susy* $N = 2$ *in* $D = 1$ contiene i generatori $(H, F, Q, \bar{Q})$ ed assume la forma

$$\{Q, \bar{Q}\} = 2H\ , \quad [F, Q] = -Q\ , \quad [F, \bar{Q}] = \bar{Q} \tag{50}$$

mentre tutti gli altri (anti)commutatori indipendenti si annullano. Di nuovo è facile verificare che le identità di Jacobi sono soddisfatte. In seguito studieremo in dettaglio realizzazioni di quest'algebra in meccanica quantistica. Separando la parte reale e la parte immaginaria della carica di supersimmetria

$$Q = \frac{Q_1 + iQ_2}{\sqrt{2}}\ , \qquad \bar{Q} = \frac{Q_1 - iQ_2}{\sqrt{2}} \tag{51}$$

dove Q_i per $i = 1, 2$ sono cariche reali (hermitiane), la stessa algebra (50) può essere presentata nella forma

$$\{Q_i, Q_j\} = 2\delta_{ij} H \ , \qquad [F, Q_i] = -i\epsilon_{ij} Q_j \tag{52}$$

dove ϵ_{ij} è il tensore completamente antisimmetrico con $\epsilon_{12} = 1$. Gli altri (anti)commutatori indipendenti sono nulli.

Una realizzazione della susy $N = 1$ in $D = 1$ in meccanica quantistica è già stata incontrata nel corso di Fisica Teorica 1: l'equazione di Pauli, che emerge come limite non relativistico della equazione di Dirac, ha come hamiltoniana

$$H = \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2}{2m} = \frac{\vec{p}^2}{2m} \tag{53}$$

e definendo l'operatore hermitiano Q come

$$Q = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{\sqrt{2m}} \tag{54}$$

si ha

$$H = Q^2 = \frac{1}{2}\{Q, Q\} \tag{55}$$

che realizza l'algebra (48).