Fisica Nucleare e Subnucleare

Prova Scritta, 7 Giugno 2019

Modulo I

1) Si consideri il quadrivettore di tipo spazio $p^\mu = (a, b, 0, 0)$ con $b > a > 0$ e $\mu = (0, 1, 2, 3)$. Provare che esiste una trasformazione di Lorentz che porta il quadrivettore nella forma $p'^\mu = (0, \alpha, 0, 0)$ con $\alpha > 0$, identificando α ed i parametri β e γ della trasformazione di Lorentz in funzione di a e b. Può il quadrivettore p^μ essere considerato il quadrimpulso di una particella fisica?

Soluzione:

Poichè il vettore p^μ ha nelle sue componenti spaziali solo p^1 diversa da zero, facciamo una trasformazione di Lorentz lungo l'asse x

$$p'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu$$

dove

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $\beta = \frac{v}{c}$ e $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, per cui

$$\begin{aligned} p'^0 &= \gamma(p^0 - \beta p^1) = \gamma(a - \beta b) \\ p'^1 &= \gamma(p^1 - \beta p^0) = \gamma(b - \beta a) \\ p'^2 &= p^2 \\ p'^3 &= p^3 \end{aligned}$$

La richiesta $p'^0 = 0$ ammette soluzione con

$$a = \beta b \quad \rightarrow \quad \beta = \frac{a}{b} \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}}$$

che danno la trasformazione di Lorentz cercata. In particolare possiamo calcolare

$$\alpha = p'^1 = \sqrt{b^2 - a^2}\ .$$

Un quadrivettore di tipo tempo non può essere il quadrimpulso di una particella fisica.

*****

2) Un fascio di pioni interagisce con protoni fermi. Calcolare l'energia di soglia in funzione delle masse delle particelle affinché avvenga la produzione di mesoni K secondo la reazione

$$\pi^+ + p \quad \to \quad K^+ + K^- + n \ .$$

Soluzione:
Sfruttando la conservazione del quadrimpulso totale e l'invarianza relativistica del suo modulo quando, si può eguagliare il modulo quadro del quadrimpulso totale iniziale calcolato nel sistema del laboratorio (LAB) con il modulo quadro del quadrimpulso totale finale calcolato nel sistema centro di massa (CM), dove si impone che l'energia minima (energia di soglia) si ha quando tutte le particelle sono ferme. Si ottiene

$$-m_\pi^2 - m_p^2 - 2E_\pi m_p = -(m_n + 2m_K)^2$$

da cui

$$E_\pi = \frac{(m_n + 2m_K)^2 - m_\pi^2 - m_p^2}{2m_p} \ .$$

Naturalmente particella ed antiparticella hanno la stessa massa.

*****

3) Data la rappresentazione definente $R(g)$ di un gruppo di matrici G , come si trasforma il tensore $T^a{}_b$? E come si trasforma la quantità $T^a{}_a$? Verificare esplicitamente la risposta data all'ultima domanda

Soluzione:
Si ha

$$T^a{}_b \quad \to \quad T'^a{}_b = [R(g)]^a{}_c \, [R^{-1,T}(g)]_b{}^d \, T^c{}_d$$

La quantità $T^a{}_a$ è uno scalare perchè gli indici della stessa natura sono sommati nel modo corretto (contratti) per generale uno scalare. Verifichiamolo tramite calcolo diretto

$$\begin{aligned} T^a{}_a \quad \to \quad T'^a{}_a &= [R(g)]^a{}_c \, [R^{-1,T}(g)]_a{}^d \, T^c{}_d \\ &= [R^T(g)]_c{}^a \, [R^{-1,T}(g)]_a{}^d \, T^c{}_d \\ &= I_c{}^d \, T^c{}_d = \delta_c{}^d \, T^c{}_d = T^c{}_c = T^a{}_a \end{aligned}$$

*****

4) Descrivere come ottenere l'equazione libera di Klein-Gordon utilizzando la corretta relazione relativistica tra energia ed impulso. Aggiungendo poi una sorgente puntiforme statica all'equazione, descrivere la soluzione nota come potenziale di Yukawa.

Soluzione:

Soluzione:

In unità naturali la relazione energia-impulso è data dall'invariante relativistico

$$p_\mu p^\mu = -m^2 \qquad \to \qquad E^2 = \vec{p}^{\,2} + m^2 \ .$$

Sostituendo $E \to i\frac{\partial}{\partial t}$ e $\vec{p} \to -i\vec{\nabla}$ si ottiene un operatore differenziale che definisce l'eq. di Klein Gordon

$$\Big(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 - m^2 \Big)\phi(x) = 0 \ .$$

Aggiungendo al lato destro una sorgente statica della forma $g\delta^{(3)}(\vec{x})$ e considerando soluzioni statiche (indipendenti dal tempo) l'equazione si riduce a

$$(\nabla^2 - m^2)\phi(\vec{x}) = g\delta^{(3)}(\vec{x}) \ .$$

la cui soluzione è appunto il potenziale di Yukawa

$$\phi(\vec{x}) = -\frac{g}{4\pi}\frac{e^{-mr}}{r}$$

che descrive un potenziale con raggio d'azione $R \sim \frac{1}{m}$.