Fisica Nucleare e Subnucleare

Prova Scritta, 14 Giugno 2018

Modulo I

1) Data una trasformazione di Lorentz della forma $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$:
i) Quali proprietà deve soddisfare $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ affinché la trasformazione appartenga al gruppo di Lorentz?
ii) Come si trasformano le componenti di un tensore di rango due $T^{\mu\nu}$?
iii) Scrivere i valori di $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ per la trasformazione di Lorentz usuale (boost con velocità v lungo l'asse x) e trovare le componenti non nulle del trasformato $T'^{\mu\nu}$ del tensore simmetrico

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soluzione:
i) Dalla richiesta di invarianza di $\eta_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu}$ si ottiene che $\eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta}$.
ii) $T'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} T^{\alpha\beta}$
iii) I valori diversi da zero sono: $\Lambda^{0}{}_{0} = \Lambda^{1}{}_{1} = \gamma$, $\Lambda^{1}{}_{0} = \Lambda^{0}{}_{1} = -\beta\gamma$, $\Lambda^{2}{}_{2} = \Lambda^{3}{}_{3} = 1$, i.e.

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove $\beta = \frac{v}{c}$ e $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, per cui

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} T^{\alpha\beta} = \Lambda^{\mu}{}_{0} \Lambda^{\nu}{}_{0} T^{00} = \Lambda^{\mu}{}_{0} \Lambda^{\nu}{}_{0}\, a \ . \quad (1)$$

Le componenti diverse da zero sono

$$\begin{aligned} T'^{00} &= \Lambda^{0}{}_{0} \Lambda^{0}{}_{0} a = \gamma^2 a \\ T'^{01} = T'^{10} &= \Lambda^{0}{}_{0} \Lambda^{1}{}_{0} a = -\beta\gamma^2 a \\ T'^{11} &= \Lambda^{1}{}_{0} \Lambda^{1}{}_{0} a = \beta^2\gamma^2 a \ . \end{aligned}$$

*****

2) Considerando nulla la massa dell'antineutrino $\bar{\nu}_e$, determinare la sua energia di soglia nell'interazione con un protone fermo per la produzione di un neutrone tramite la reazione

$$\bar{\nu}_e + p \quad \rightarrow \quad n + e^+$$

Dare l'energia di soglia in funzione delle masse di protone, neutrone e positrone, m_p, m_n e m_e.

Soluzione:
Nel sistema LAB e con $c = 1$, assumendo nulla la massa del neutrino, possiamo scrivere

$$p^\mu_{\bar{\nu}_e} = (E, E, 0, 0) \;, \qquad p^\mu_p = (m_p, 0, 0, 0)$$

per cui il modulo quadro del quadrimpulso totale iniziale è

$$(p_{\bar{\nu}_e} + p_p)^2 = -(m_p + E)^2 + E^2 = -m_p^2 - 2m_p E \;. \tag{2}$$

Nel sistema CM, imponendo che l'energia dello stato finale sia minima (particelle ferme senza energia cinetica) abbiamo un quadrimpulso totale finale

$$P^\mu = (m_n + m_e, 0, 0, 0)$$

di modulo

$$P^2 = -(m_n + m_e)^2 \tag{3}$$

Dalla conservazione del quadrimpulso, e dal fatto che il modulo quadro è uno scalare, possiamo eguagliare (2) e (3) ed ottenere l'energia di soglia

$$E = \frac{(m_n + m_e)^2 - m_p^2}{2m_p}$$

*****

3) Definire le variabili di Mandelstam s, t ed u per un processo di urto di 2 particelle in 2 particelle. Quanto vale la somma di queste tre variabili? Provare il risultato.

Soluzione:

Usando l'ordinamento delle particelle come in figura si definiscono

$$\begin{aligned} s &= -(p_1 + p_2)^2 \\ t &= -(p_2 - p_3)^2 \\ u &= -(p_1 - p_3)^2 \end{aligned} \tag{4}$$

Queste variabili di Mandelstam non sono indipendenti, ma vale (con $c = 1$)

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 \tag{5}$$

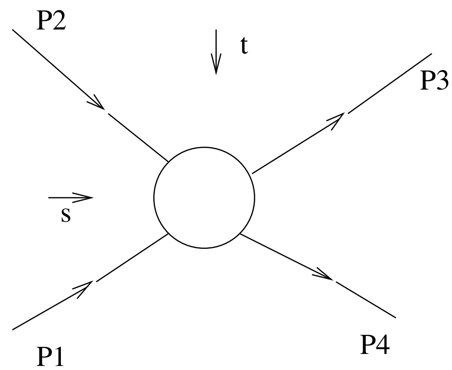

Figure 1: Urto di 2 particelle in 2 particelle.

dove $(p_1)^2 = -m_1^2$, $(p_2)^2 = -m_2^2$, etc. Per dimostare questa relazione occorre usare la conservazione del quadrimpulso totale $p_1^\mu + p_2^\mu = p_3^\mu + p_4^\mu$, e calcolare

$$\begin{aligned} s+t+u &= -(p_1+p_2)^2 - (p_2-p_3)^2 - (p_1-p_3)^2 \\ &= -(p_1+p_2)^2 - (p_1-p_4)^2 - (p_1-p_3)^2 \\ &= -p_1^2 - p_2^2 - 2p_1\cdot p_2 - p_1^2 - p_4^2 + 2p_1\cdot p_4 - p_1^2 - p_3^2 + 2p_1\cdot p_3 \\ &= m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2 - 2p_1\cdot(p_2+p_1-p_4-p_3) \\ &= m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2 \end{aligned} \tag{6}$$

*****

4) Definire il gruppo $SU(3)$ e provare che gli assiomi di gruppo sono soddisfatti

Soluzione:

$$SU(3) = \{\text{matrici } U \text{ complesse } 3\times 3 \text{ unitarie } (U^\dagger = U^{-1}) \text{ con determinante} = 1\}$$

Gli assiomi di gruppo sono soddisfatti in quanto

i) Se U_1 ed U_2 appartengono ad $SU(3)$, allora anche $U_3 = U_1U_2$ appartiene $SU(3)$, infatti è una matrice 3×3 unitaria

$$U_3^\dagger = (U_1U_2)^\dagger = U_2^\dagger U_1^\dagger = U_2^{-1}U_1^{-1} = (U_1U_2)^{-1} = U_3^{-1}$$

con determinante uguale ad 1

$$\det U_3 = \det(U_1U_2) = \det U_1 \det U_2 = 1\ .$$

ii) Inoltre la matrice identità è unitaria e con det =1, quindi appartiene al gruppo.

iii) L'inverso di ogni elemento U è dato da $U^{-1} = U^\dagger$, che è unitario e con det =1.

iv) Infine il prodotto di matrici è associativo.