Fisica Nucleare e Subnucleare

Prova Scritta, 7 Luglio 2017

Modulo I

1) Scrivere la trasformazione di Lorentz che connette due sistemi di riferimento inerziali in moto relativo lungo l'asse x. Utilizzarle per derivare la legge di trasformazione di V_x, la componente della velocità di una particella lungo l'asse x. Infine, data una particella di velocità $\vec{V}$, definirne la quadrivelocità e dedurre la legge di trasformazione della quadrivelocità sotto una trasformazione arbitraria del gruppo di Lorentz.

Soluzione

Le trasformazioni di Lorentz richieste sono

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - \frac{\beta}{c}x) \\ x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \tag{1}$$

dove $\beta \equiv \frac{v}{c}$ e $\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, con v la velocità relativa dei due sistemi di riferimento. Ricordando la definizione di velocità

$$V_x = \frac{dx}{dt}\ , \qquad V'_x = \frac{dx'}{dt'}$$

e considerando che dalla trasformazione di Lorentz (1) segue che

$$dt' = \gamma(dt - \frac{v}{c^2}dx)\ , \qquad dx' = \gamma(dx - \beta c dt)$$

si ottiene

$$V'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - \beta c dt)}{\gamma(dt - \frac{v}{c^2}dx)} = \frac{\frac{dx}{dt} - \beta c}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}} = \frac{V_x - v}{1 - \frac{vV_x}{c^2}}\ .$$

La legge richiesta è quindi

$$V'_x = \frac{V_x - v}{1 - \frac{vV_x}{c^2}}.$$

Data una particella con velocità $\vec{V}$ si definisce il tempo proprio infinitesimo come

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{c^2dt^2 - d\vec{x}^2} = dt\ \sqrt{1 - \frac{\vec{V}^2}{c^2}}\ .$$

Il tempo proprio è evidentemente un invariante relativistico e permette di definire il quadrivettore *quadrivelocità* come

$$u^\mu(\tau) \equiv \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} = \left(\frac{cdt(\tau)}{d\tau}, \frac{d\vec{x}(\tau)}{d\tau}\right) = \left(\frac{c}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \frac{\vec{V}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right)$$

che per trasformazioni di Lorentz generali (della forma $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$) si trasforma come un quadrivettore

$$u'^\mu = \frac{dx'^\mu}{d\tau'} = \frac{\Lambda^\mu{}_\nu dx^\nu}{d\tau} = \Lambda^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau} = \Lambda^\mu{}_\nu u^\nu \ .$$

*****

2) Nel processo di scattering di particelle

$$1 + 2 \to 3 + 4 + 5$$

come è definita la massa invariante associata alle particelle 4 e 5? E che significato ha? La particella 3 risulta essere un elettrone con energia totale E e massa m, con che velocità si muove? (Dare la risposta in funzione di E ed m).

Soluzione:

Usiamo unità naturali con $c = 1$. La massa invariate M delle particelle 4 e 5 è ottenibile dal modulo quadro della somma dei quadrimomenti delle particelle 4 e 5

$$M^2 = -(p_4 + p_5)^2$$

dove naturalmente il modulo quadro è calcolato tenendo conto della metrica di Minkowski come

$$(p_4 + p_5)^2 \equiv (p_4 + p_5)^\mu (p_4 + p_5)_\mu = \eta_{\mu\nu}(p_4 + p_5)^\mu (p_4 + p_5)^\nu \ .$$

Quindi

$$M = \sqrt{-(p_4 + p_5)^2} \ .$$

Corrisponde alla massa di una eventuale particella creata nell'urto delle particelle 1 e 2, che decade successivamente nelle particelle 4 e 5.

Nell'urto l'elettrone emerge con una energia totale $E = m\gamma$, per cui

$$\gamma = \frac{E}{m}$$

Poichè

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

ne segue che la sua velocità β vale

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2}} \ .$$

*****

3) Un fotone con energia E_γ incide su un protone fermo. Determinarne l' energia di soglia per la reazione

$$\gamma + p \quad \to \quad p + \pi^0$$

in funzione delle masse del protone e del pione, m_p e m_{π^0}.

Soluzione

Il quadrimpulso totale è *conservato*, ed il suo modulo quadro è un *invariante* relativistico. Calcolando tale modulo quadro nel LAB prima dell'urto e nel CM dopo l'urto, possiamo eguagliare questi due moduli. Imponendo che l'energia sia minima nel CM (particelle a riposo senza energia cinetica dopo l'urto) si ottiene (in unità naturali)

$$E_\gamma = m_{\pi^0} + \frac{m_{\pi^0}^2}{2m_p}$$

*****

4) Riportare gli assiomi che definisco un gruppo e poi verificare che le matrici unitarie $N \times N$ con determinante uguale ad uno formano un gruppo, il gruppo $SU(N)$.

Soluzione:

Un gruppo $G = \{g\}$ è un insieme di elementi g che soddisfano alle seguenti proprietà:
1) esiste una legge di composizione: presi $g_1, g_2 \in G$ allora $g_1 \cdot g_2 = g_3 \in G$,
2) esiste l'elemento identità: $\exists e \in G$ tale che $g \cdot e = e \cdot g = g$,
3) esiste l'elemento inverso: se $g \in G$ allora $\exists g^{-1} \in G$ tale che $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$,
4) associatività: $(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$.

Una matrice U è unitaria se $U^\dagger = U^{-1}$. Le matrici unitarie $N \times N$ con determinante uguale ad uno formano un gruppo, il gruppo $SU(N)$. Infatti se U_1 ed U_2 appartengono al gruppo $SU(N)$, allora anche $U_3 = U_1 U_2$ appartiene al gruppo, infatti è unitaria

$$U_3^\dagger = (U_1 U_2)^\dagger = U_2^\dagger U_1^\dagger = U_2^{-1} U_1^{-1} = (U_1 U_2)^{-1} = U_3^{-1}$$

ed ha determinante

$$\det U_3 = \det(U_1 U_2) = \det U_1 \det U_2 = 1 \ .$$

Inoltre la matrice identità è unitaria e con det =1, e quindi appartiene al gruppo. L'inverso di ogni elemento U è dato da $U^{-1} = U^\dagger$, che a sua volta è unitario e con det =1. Infine il prodotto di matrici è associativo. Tutte le proprietà di gruppo sono soddisfatte.