

# Meccanica quantistica, equazioni d'onda e diagrammi di Feynman

(Appunti per il corso di Fisica Nucleare e Subnucleare 2014/15)

Fiorenzo Bastianelli

In queste brevi note introduciamo equazioni d'onda libere associate alla propagazione di particelle quantistiche.

## 1 Equazione di Schrödinger

Dopo l'introduzione del quanto d'azione  $h$  da parte di Planck (1900) e l'uso che ne fece Einstein (1905) nello spiegare l'effetto fotoelettrico (fotoni come quanti d'onda elettromagnetica con energia  $E = h\nu$ ), e dopo Bohr (1913) con il suo modello atomico con livelli di energia quantizzati, rimaneva ancora da capire quali leggi fondamentali potessero organizzare quanto andava emergendo dal mondo subatomico, cioè quali fossero le vere leggi della meccanica quantistica. Un contributo importante venne da de Broglie, che nel 1923 suggerì un'estensione dell'idea di Einstein, congetturando un comportamento ondulatorio per le particelle di materia, assegnando una lunghezza d'onda  $\lambda = \frac{h}{p}$  a particelle con momento  $p = |\vec{p}|$ . Questa visione rese interpretabile l'assunzione di Bohr di livelli energetici atomici quantizzati come i soli possibili per l'elettrone, perché corrispondono a traiettorie contenenti un numero intero di lunghezze d'onda dell'elettrone, quindi stabili per interferenza costruttiva. De Broglie si ispirò per questa sua idea alla meccanica relativistica: un campo d'onda con frequenza  $\nu = \frac{1}{T}$ , dove  $T$  è il periodo (periodicità temporale), e con numero d'onda  $\vec{k}$ , dove  $|\vec{k}| = \frac{1}{\lambda}$ , con  $\lambda$  la lunghezza d'onda (periodicità spaziale), ha la forma

$$\psi(\vec{x}, t) \sim e^{2\pi i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \nu t)} \quad (\text{fenomeno periodico}) . \quad (1)$$

(Ricordiamo la formula  $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ ). Assumendo che la fase  $2\pi(\vec{k}\cdot\vec{x} - \nu t)$  fosse un invariante di Lorentz, e sapendo che le coordinate spazio-temporali  $(t, \vec{x})$  formano un quadrivettore, de Broglie dedusse che anche  $(\nu, \vec{k})$  doveva essere un quadrivettore, e quindi trasformarsi per cambio di sistema di riferimento inerziale come i quadrivettori  $(t, \vec{x})$  e  $(E, \vec{p})$ . Poiché nel caso dei fotoni valeva  $E = h\nu$ , gli risultò naturale estendere la proporzionalità ai quadrivettori  $(\nu, \vec{k})$  e  $(E, \vec{p})$ , anche alle particelle materiali con massa non nulla, e con la stessa costante di proporzionalità  $h$  valida per i fotoni

$$(E, \vec{p}) = h(\nu, \vec{k}) \quad \rightarrow \quad E = h\nu, \quad \vec{p} = h\vec{k} \quad (\text{relazioni di Einstein - deBroglie}) \quad (2)$$

Questa relazione porta ad associare una lunghezza d'onda  $\lambda = \frac{h}{|\vec{p}|}$  alle particelle di materia con momento  $\vec{p}$ . Quindi l'onda associata a particelle materiali con momento  $\vec{p}$  ed energia  $E$  assume la forma

$$\psi(\vec{x}, t) \sim e^{2\pi i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \nu t)} = e^{\frac{2\pi i}{h}(\vec{p}\cdot\vec{x} - Et)} = e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x} - Et)} \quad (\text{onde di materia}) . \quad (3)$$

Questa fu la proposta di de Broglie.

A questo punto Schrödinger si chiese: che tipo di equazione soddisfa tale funzione? Iniziò direttamente con il caso relativistico, ma siccome non gli fu possibile riprodurre alcuni risultati sperimentali per l'atomo d'idrogeno, si accontentò del limite non-relativistico che sembrava funzionare meglio (infatti oggi sappiamo che alcune correzioni relativistiche sono parzialmente compensate da effetti dovuti allo spin dell'elettrone, di cui non si teneva conto). Per una particella libera non-relativistica vale

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$$

ed è immediato verificare che la funzione d'onda (3) soddisfa

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = E\psi(\vec{x}, t) = \frac{\vec{p}^2}{2m} \psi(\vec{x}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{x}, t)$$

e quindi soddisfa all'equazione

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{x}, t) . \quad (4)$$

chiamata equazione di Schrödinger. In questo modo Schrödinger identificò l'equazione fondamentale della meccanica quantistica. Seppur dedotta per una particella non-relativistica puntiforme e libera, scritta nella forma

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = H\psi \quad (5)$$

dove  $H$  è l'operatore hamiltoniano, l'equazione di Schrödinger è congetturata avere una validità universale per la descrizione dei sistemi quantistici.

Dunque il trucco per ottenere una equazione d'onda dal modello classico di particella puntiforme è il seguente:

- considerare la relazione classica tra energia ed impulso  $E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$
- sostituire  $E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$  e  $\vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}$
- interpretare questi operatori differenziali come agenti su una funzione d'onda  $\psi$ :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{x}, t) .$$

Naturalmente Schrödinger estese queste sue considerazioni ad una particella carica (l'elettrone) immersa nel campo coulombiano di un nucleo, per riprodurre il modello atomico di Bohr e calcolarne analiticamente varie proprietà, in particolare lo spettro energetico quantizzato, che confrontò con le misure sperimentali ottenendo un notevole successo.

### Principio di indeterminazione.

Dall'analogia con le onde luminose, dove l'intensità è proporzionale al modulo quadro dell'ampiezza, si intuì presto che la densità di probabilità  $p(\vec{x}, t)$  di trovare la particella in un punto  $\vec{x}$  al tempo  $t$  doveva essere collegata al modulo quadro della funzione d'onda  $|\psi(\vec{x}, t)|^2$ . In particolare, la funzione d'onda deve essere normalizzata opportunamente ( $\int d^3x |\psi(\vec{x}, t)|^2 = 1$ ).

Un'onda perfettamente sinusoidale come  $\psi(\vec{x}, t) = e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x} - Et)}$  è estesa su tutto lo spazio tempo ( $|\psi(\vec{x}, t)|^2 = 1$ ) e non è normalizzabile ( $\int d^3x |\psi(\vec{x}, t)|^2 = \infty$ ): infatti per tale onda il

momento è noto esattamente ad ogni istante di tempo (vale  $\vec{p}$ ), ma non lo è la posizione della particella, che infatti potrebbe trovarsi ovunque nello spazio. Per localizzare la particella si possono sommare varie frequenze, o meglio vari numeri d'onda  $\vec{k}$ . In termini del momento  $\vec{p}$  questo si traduce in un integrale della forma

$$\psi(\vec{x}, t) \sim \sum_{\vec{p}} \phi(\vec{p}) e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x}-Et)} \sim \int d^3p \phi(\vec{p}) e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x}-Et)} \quad (6)$$

dove  $\phi(\vec{p})$  indica i coefficienti di Fourier dell'onda piana con momento  $\vec{p}$ . Scegliendo opportunamente i coefficienti di Fourier è ora possibile normalizzare la funzione d'onda correttamente. Come conseguenza matematica della trasformata di Fourier si può dedurre che l'incertezza sulla posizione  $\Delta\vec{x}$ , codificata in  $|\psi(\vec{x}, t)|^2$ , moltiplicata per l'incertezza sul valore del momento  $\Delta\vec{p}$ , codificata in  $|\phi(\vec{p})|^2$ , deve essere necessariamente maggiore di una quantità minima proporzionale ad  $\hbar$ :

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \text{etc.} \quad (7)$$

Queste disuguaglianze sono note come "principio d'indeterminazione". Strettamente collegate al principio di indeterminazione sono le regole di commutazione che emergono tra le variabili dinamiche: ad esempio se  $p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$  è da considerarsi come un operatore differenziale, si ha

$$[x, p_x] = i\hbar \quad (8)$$

etc. per le altre coordinate.

Similmente si ha un principio d'indeterminazione tra tempo ed energia

$$\Delta t \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (9)$$

#### Conservazione della probabilità.

Se una particella non-relativistica è descritta dalla funzione d'onda normalizzabile  $\psi(\vec{x}, t)$  (N.B. l'onda piana non è normalizzabile, per cui occorre considerare pacchetti d'onda, come descritto sopra), allora si può interpretare la grandezza  $\rho(\vec{x}, t) = |\psi(\vec{x}, t)|^2$  come densità di probabilità di trovare la particella nel punto  $\vec{x}$  al tempo  $t$ . In particolare, si può provare che  $\rho$  soddisfa una equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (10)$$

con una opportuna corrente  $\vec{J}$ . Questo equivale alla conservazione della probabilità di trovare la particella da qualche parte ad ogni istante di tempo. In particolare la particella non-relativistica non può essere creata né distrutta. Questo è comprensibile pensando al limite non-relativistico di una particella relativistica, formalmente ottenuto mandando  $c \rightarrow \infty$  (velocità limite di propagazione delle interazioni molto grande, tendente all'infinito come limite matematico, fisicamente equivalente a considerare velocità  $v$  molto piccole rispetto a  $c$ ): infatti dalla formula relativistica dell'energia

$$E = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4} = mc^2 \sqrt{1 + \frac{\vec{p}^2}{m^2 c^2}} \implies mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m} + \dots \quad (11)$$

da cui si vede che per  $c \rightarrow \infty$  occorrerebbe un'energia infinita per creare una particella di massa  $m$ . Poiché la velocità della luce  $c$  è finita, è possibile che interazioni relativistiche permettano la creazione e la distruzione di particelle.

## 2 Equazioni d'onda relativistiche

### 2.1 Equazione di Klein-Gordon

Come ottenere una equazione d'onda relativistica? Un'idea semplice è quella di usare la corretta relazione relativistica tra energia ed impulso. Infatti sappiamo che

$$p_\mu p^\mu = -m^2 c^2 \quad \Longrightarrow \quad -\frac{E^2}{c^2} + \vec{p}^2 = -m^2 c^2 \quad \Longrightarrow \quad E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (12)$$

Quindi si potrebbe usare  $E = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$ , ma l'equazione che emerge con le sostituzioni  $E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$  e  $\vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}$  produce un'equazione complicatissima di difficile interpretazione, contenente una radice quadrata di operatori differenziali

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{x}, t) = \sqrt{-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4} \phi(\vec{x}, t). \quad (13)$$

Klein e Gordon proposero una equazione più semplice considerando la relazione quadratica tra energia ed impulso, che ha il pregio di non contenere nessuna radice quadrata. Partendo da  $E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$ , ed usando  $E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$  e  $\vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}$ , ottennero l'equazione

$$\left( -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi(\vec{x}, t) = 0 \quad (14)$$

conosciuta oggi come equazione di Klein-Gordon. In notazioni relativistiche si può scrivere come

$$(\partial_\mu \partial^\mu - \mu^2) \phi(x) = 0, \quad \mu \equiv \frac{mc}{\hbar}. \quad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (15)$$

ed anche come

$$(\square - \mu^2) \phi(x) = 0 \quad (16)$$

dove  $\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2$  indica l'operatore di d'Alembert (il d'alembertiano). Secondo Dirac, Schrödinger considerò questa equazione ancor prima di dedurre la sua equazione, ma insoddisfatto dei risultati che sembrava produrre per l'atomo d'idrogeno, si accontentò del suo limite non relativistico. Quando più tardi si decise a pubblicarla, era già stato preceduto da Klein e Gordon.

Soluzioni dell'eq. di Klein-Gordon. Naturalmente, ovvie soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon sono le soluzioni di onda piana

$$\phi(x) = e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x} - Et)}, \quad \text{con } E = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}, \quad (17)$$

che possono essere collegate a particelle scalari (cioè con spin  $s = 0$ ) di massa  $m$ . Ma esiste anche un'altra classe di soluzioni, quelle con energie negative  $E = -\sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$ . Come interpretarle fisicamente? Queste segnalano l'esistenza di "antiparticelle", particelle con stessa massa e spin, ma con tutte le altre possibili cariche interne, come la carica elettrica, di segno opposto. Questa interpretazione, originariamente proposta da Dirac per le soluzioni della sua equazione (l'equazione di Dirac che descrive particelle relativistiche di massa  $m$  e spin  $s = \frac{1}{2}$ ), è necessaria per tutte le equazioni d'onda relativistiche, ed è giustificabile rigorosamente all'interno della teoria quantistica dei campi (conosciuta anche come "seconda quantizzazione": in tale formalismo le equazioni d'onda come quella sopra descritta, sono dapprima considerate come

equazioni di campo classiche e poi quantizzate opportunamente. In tale modo il campo d'onda quantizzato permette di descrivere un numero arbitrario di particelle identiche e corrispondenti antiparticelle, e trattare processi in cui il numero di particelle totali varia a causa di processi di creazione o annichilazione di particelle).

Una soluzione generale del campo di Klein-Gordon libero può essere visto come una combinazione lineare (nel senso di Fourier) di soluzioni di onda piana con energie sia positive che negative. Ad esempio, se il campo di Klein Gordon è considerato reale (campo scarico), la soluzione generale assume la forma (in unità dove vale  $\hbar = c = 1$ )

$$\phi(x) \sim \sum_{\vec{p}} \left( a(\vec{p}) e^{-iE_p t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a^*(\vec{p}) e^{iE_p t - i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right), \quad E_p \equiv \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} > 0 \quad (18)$$

dove i coefficienti di Fourier  $a(\vec{p})$  ed  $a^*(\vec{p})$  sono associati (nell'interpretazione della teoria dei campi quantistici) alla distruzione ed alla creazione di particelle. In tal caso particelle ed antiparticelle coincidono, non ci sono cariche come la carica elettrica che possano differenziarle. Nel caso di un campo di Klein-Gordon complesso (campo carico), la soluzione generale assume la forma

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sum_{\vec{p}} \left( a(\vec{p}) e^{-iE_p t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} + b^*(\vec{p}) e^{iE_p t - i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) \\ \phi^*(x) &= \sum_{\vec{p}} \left( b(\vec{p}) e^{-iE_p t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a^*(\vec{p}) e^{iE_p t - i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

dove ora i coefficienti di Fourier  $a(\vec{p})$  ed  $a^*(\vec{p})$  sono associati alla distruzione ed alla creazione di particelle, mentre i coefficienti di Fourier  $b(\vec{p})$  ed  $b^*(\vec{p})$  alla distruzione ed alla creazione di antiparticelle (in una interpretazione di seconda quantizzazione, che non tratteremo in questa sede).

Potenziale di Yukawa. Consideriamo l'equazione con sorgente esterna

$$(\square - \mu^2)\phi(x) = J(x) \quad (20)$$

con  $J(x) = g\delta^{(3)}(\vec{x})$  che descrive una sorgente statica puntiforme localizzata nell'origine delle coordinate spaziali (con  $\delta^{(3)}(\vec{x})$  si indica la funzione delta di Dirac). Se consideriamo una soluzione statica, indipendente dal tempo, allora l'equazione si semplifica e diventa

$$(\nabla^2 - \mu^2)\phi(\vec{x}) = g\delta^{(3)}(\vec{x}) \quad (21)$$

Per  $\mu = 0$  riconosciamo l'equazione di Poisson dell'elettrostatica, con soluzione il potenziale coulombiano

$$\phi(\vec{x}) = -\frac{g}{4\pi} \frac{1}{r}. \quad (22)$$

Per  $\mu \neq 0$  la soluzione può essere calcolata usando la trasformata di Fourier che genera il potenziale di Yukawa

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{(-g)}{p^2 + \mu^2} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} = -\frac{g}{4\pi} \frac{e^{-\mu r}}{r}. \quad (23)$$

Anche se non si conoscono le tecniche della trasformata di Fourier è possibile verificare che queste soluzioni soddisfano le rispettive equazioni per  $r \neq 0$ , basta usare il laplaciano scritto in coordinate sferiche ( $\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \partial_r + \text{derivate sugli angoli}$ ). Inoltre il comportamento singolare ad  $r = 0$  è collegato all'intensità della carica puntiforme, come note nel caso coulombiano.

Azione libera e propagatore. L'equazione di Klein-Gordon può essere derivata da un semplice principio d'azione. Per un campo scalare reale  $\phi^* = \phi$ , l'azione è data da

$$S[\phi] = \int d^4x \left( -\frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{\mu^2}{2} \phi^2 \right) \quad (24)$$

e richiedendo la condizione di minimo  $\delta S = 0$  sotto variazioni  $\delta\phi(x)$  si ottiene l'equazione di Klein-Gordon (come equazione di Eulero-Lagrange)

$$(\square - \mu^2)\phi(x) = 0 . \quad (25)$$

Equazioni del moto libere e relativa azione descrivono la propagazione libera del campo d'onda o, equivalentemente, delle particelle associate, i quanti del campo.

Nella teoria quantistica è utile considerare il “propagatore”, che essenzialmente corrisponde alla funzione di Green  $G(x, y)$  associata all'equazione di Klein-Gordon, e descrive matematicamente la propagazione di una particella dal punto dello spazio-tempo  $x$  al punto dello spazio-tempo  $y$ , o viceversa, ed indicato graficamente dal diagramma di Feynman

$$x \text{ ————— } y$$

La funzione di Green ell'equazione di Klein-Gordon corrisponde alla soluzione dell'equazione di Klein-Gordon in presenza di una sorgente puntiforme istantanea di intensità unitaria. In formule

$$(-\square_x + \mu^2)G(x, y) = \delta^4(x - y) . \quad (26)$$

In trasformata di Fourier la soluzione si scrive come

$$G(x, y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip_\mu(x^\mu - y^\mu)}}{p^2 + \mu^2 - i\epsilon} \quad (27)$$

dove  $\epsilon \rightarrow 0^+$  è un parametro infinitesimo positivo che implementa opportune condizioni al contorno (prescrizione causale di Feynman), che permette di interpretare le soluzioni con energia negativa come dovute ad antiparticelle con energia positiva: il propagatore descrive propagazione (in avanti nel tempo) di particelle ed antiparticelle con le corrette energie positive. Inoltre, in una interpretazione particellare, il propagatore descrive sia la propagazione di “particelle reali” sia gli effetti interpretabili come dovuti alle “particelle virtuali”. Il propagatore è spesso descritto con la sua trasformata di Fourier,  $\frac{1}{p^2 + \mu^2}$ , ed indicato con il seguente diagramma di Feynman

$$\text{—————}$$

$p$

dove  $p$  indica il quadrimomento trasportato della particella che scorre lungo la linea.

## 2.2 Altre equazioni d'onda

L'equazione di Klein-Gordon è un'equazione relativistica che descrive particelle scalari, cioè con spin  $s = 0$ , ma poiché tiene conto della corretta relazione relativistica tra energia ed impulso contiene l'essenza di tutte le equazioni relativistiche (come l'apparente presenza di soluzioni con energie negative, da reinterpretare come antiparticelle con energia positiva). Le equazioni d'onda corrette per descrivere particelle con spin  $s$  dipende dal valore dello spin e sono conosciute come segue:

- spin 0 → equazione di Klein-Gordon
- spin  $\frac{1}{2}$  → equazione di Dirac
- spin 1 senza massa → equazioni (libere) di Maxwell
- spin 1 massiva → equazioni di Proca
- spin  $\frac{3}{2}$  → equazione di Rarita-Schwinger
- spin 2 → equazioni di Pauli-Fierz (equazioni di Einstein linearizzate).

In generale particelle relativistiche sono classificate da massa  $m$  e spin  $s$ , dove il valore dello spin indica che ci sono in generale  $2s + 1$  componenti fisiche indipendenti della funzione d'onda, a meno che  $m = 0$ , nel qual caso esistono solo due componenti fisiche (collegate all'elicità, definita come proiezione dello spin lungo la direzione del moto).

## 3 Interazioni e diagrammi di Feynman

Le azioni libere dei campi d'onda associati alle varie particelle (il campo dell'elettrone  $\psi$  descrive tutti gli elettroni ed i positroni, il campo del potenziale elettromagnetico  $A_\mu$  descrive tutti i fotoni, etc.) generano le equazioni d'onda libere e descrivono la propagazione dei rispettivi quanti. Le interazioni possono essere introdotte aggiungendo dei potenziali d'interazione all'azione, che così producono termini non lineari nelle equazioni d'onda. Questi potenziali contengono i vertici elementari delle varie interazioni. A tali vertici sono associate costanti d'accoppiamento che parametrizzano l'intensità della interazione.