Fisica Nucleare e Subnucleare

Prova Scritta, 10 Giugno 2016

Modulo I

1) Data una trasformazione di Lorentz della forma $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$:
i) Quali proprietà devono soddisfare i coefficienti $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ (le componenti della matrice Λ) affinché la trasformazione appartenga al gruppo di Lorentz?
ii) Come si trasformano le componenti di un tensore $T^{\mu\nu}$?
iii) Scrivere i valori dei coefficienti $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ che definiscono la trasformazione di Lorentz usuale (x'^{μ} coordinate di un sistema di riferimento inerziale in moto con velocità v lungo l'asse $\hat{x}$ del sistema con coordinate x^{μ}) e trovare il trasformato $T'^{\mu\nu}$ del tensore simmetrico

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sotto questa trasformazione. Si noti che solo la componente T^{00} è diversa da zero nel sistema di riferimento iniziale.

Soluzione:

i) Dalla richiesta di invarianza di $\eta_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu}$ si ottiene che $\eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta}$.
ii) $T'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} T^{\alpha\beta}$
iii) I valori diversi da zero sono

$$\Lambda^{0}{}_{0} = \Lambda^{1}{}_{1} = \gamma \; , \qquad \Lambda^{1}{}_{0} = \Lambda^{0}{}_{1} = -\beta\gamma \; , \qquad \Lambda^{2}{}_{2} = \Lambda^{3}{}_{3} = 1$$

i.e.

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove $\beta = \frac{v}{c}$ e $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, per cui

$$T'^{\mu\nu} \;=\; \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} T^{\alpha\beta} = \Lambda^{\mu}{}_{0} \Lambda^{\nu}{}_{0} T^{00} = \Lambda^{\mu}{}_{0} \Lambda^{\nu}{}_{0}\, a \; . \tag{1}$$

Le componenti diverse da zero sono

$$\begin{aligned} T'^{00} &= \Lambda^{0}{}_{0} \Lambda^{0}{}_{0} a = \gamma^2 a \\ T'^{01} = T'^{10} &= \Lambda^{0}{}_{0} \Lambda^{1}{}_{0} a = -\beta\gamma^2 a \\ T'^{11} &= \Lambda^{1}{}_{0} \Lambda^{1}{}_{0} a = \beta^2\gamma^2 a \; . \end{aligned}$$

*****

2) Scrivere le definizioni relativistiche di energia ed impulso per una particella libera di massa m e velocità $\vec{v}$, verificare quindi la relazione relativistica che lega tra di loro energia ed impulso ed utilizzarla per ottenere l'equazione libera di Klein-Gordon. Discutere infine le soluzioni di onda piana di tale equazione.

Soluzione:

Le definizioni relativistiche di energia E ed impulso $\vec{p}$ sono

$$E = mc^2\gamma = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\ , \qquad \vec{p} = m\gamma\vec{v} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

da cui si ricava la relazione

$$\frac{E^2}{c^2} = \vec{p}^{\ 2} + m^2c^2 \tag{2}$$

Sostituendo $E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ e $\vec{p} \to -i\hbar\vec{\nabla}$ si ottiene un operatore differenziale che applicato ad una funziona d'onda definisce l'eq. di Klein Gordon

$$\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\phi(x) = 0$$

Le soluzioni di onda piana sono date da

$$\phi^{(+)}_{\vec{p}}(x) = e^{-i\frac{E_p}{\hbar}t + i\frac{\vec{p}}{\hbar}\cdot\vec{x}}\ , \quad \phi^{(-)}_{\vec{p}}(x) = e^{i\frac{E_p}{\hbar}t + i\frac{\vec{p}}{\hbar}\cdot\vec{x}}$$

dove $E_p = \sqrt{\vec{p}^{\ 2}c^2 + m^2c^4}$ con $\vec{p}$ arbitrario risolve appunto la relazione (2). Le $\phi^{(-)}_{\vec{p}}(x)$ sono le soluzioni ad energia negativa ($E = -E_p$) e sono associate alle antiparticelle.

*****

3) Una particella a riposo di massa $4m$ decade in due particelle di massa m e $2m$. Usando le leggi di conservazione opportune, calcolare le energie delle particelle finali.

Soluzione:
Usando al conservazione dell'energia e dell'impulso si ottiene (con $c = 1$)

$$E_1 = \frac{13}{8}m\ , \qquad E_2 = \frac{19}{8}m\ .$$

*****

4) Riportare gli assiomi che definisco un gruppo e verificare che le matrici ortogonali $N \times N$ con determinante unitario formano un gruppo, il gruppo $SO(N)$.

Soluzione:

Un gruppo $G = \{g\}$ è un insieme di elementi g che soddisfano alle seguenti proprietà:
1) esiste una legge di composizione: presi $g_1, g_2 \in G$ allora $g_1 \cdot g_2 = g_3 \in G$,
2) esiste l'elemento identità: $\exists e \in G$ tale che $g \cdot e = e \cdot g = g$,
3) esiste l'elemento inverso: se $g \in G$ allora $\exists g^{-1} \in G$ tale che $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$,
4) associatività: $(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$.

Una matrice O è ortogonale se $O^T = O^{-1}$. Le matrici ortogonali $N \times N$ con determinante unitario formano un gruppo, il gruppo $SO(N)$. Infatti se O_1 ed O_2 appartengono a $SO(N)$ allora anche $O_3 = O_1 O_2$ appartiene al gruppo, infatti è ortogonale

$$O_3^T = (O_1 O_2)^T = O_2^T O_1^T = O_2^{-1} O_1^{-1} = (O_1 O_2)^{-1} = O_3^{-1}$$

ed ha determinante

$$\det O_3 = \det(O_1 O_2) = \det O_1 \det O_2 = 1 \ .$$

Inoltre la matrice identità è ortogonale e con det =1, e quindi appartiene al gruppo. L'inverso di ogni elemento O è dato da $O^{-1} = O^T$, che a sua volta è ortogonale e con det =1. Infine il prodotto di matrici è associativo. Tutte le proprietà di gruppo sono soddisfatte.