1 Spin $\frac{1}{2}$: l'equazione di Dirac

Storicamente Dirac trovò la corretta equazione per descrivere particelle di spin $\frac{1}{2}$ cercando un'equazione relativistica che potesse avere un'interpretazione probabilistica per essere consistente con i principi della meccanica quantistica, a differenza dell' equazione di Klein-Gordon che non ammette questa interpretazione. Sebbene un'interpretazione probabilistica non sarà tenibile in presenza di interazioni, e la funzione d'onda di Dirac dovrà essere trattata come un campo classico da quantizzare (seconda quantizzazione), è utile ripercorrere la deduzione che portò Dirac alla formulazione di un'equazione del primo ordine nel tempo, l'equazione di Dirac

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi(x) = 0 \tag{1}$$

dove la funzione d'onda $\psi(x)$ ha quattro componenti (spinore di Dirac) e le γ^μ sono matrici 4×4. Poichè le quattro componenti del campo di Dirac $\psi(x)$ non sono componenti di un quadrivettore, ma sono di natura spinoriale e si trasformano in modo differente per trasformazioni di Lorentz, occorre usare indici diversi per indicarne le componenti senza ambiguità. In questo contesto usiamo indici $\mu, \nu, .. = 0, 1, 2, 3$ per indicare le componenti di un quadrivettore ed indici $\alpha, \beta, .. = 1, 2, 3, 4$ per indicare le componenti di uno spinore di Dirac. l'equazione (1) si scrive in modo più esplicito come

$$\Big((\gamma^\mu)_\alpha{}^\beta \, \partial_\mu + m \, \delta_\alpha{}^\beta\Big)\psi_\beta(x) = 0 \ . \tag{2}$$

e contiene quattro equazioni distinte ($\alpha = 1, .., 4$).

Equazione di Dirac

La relazione relativistica tra energia ed impulso di una particella libera

$$p^\mu p_\mu = -m^2 c^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad E^2 = c^2 \vec{p}^{\,2} + m^2 c^4 \tag{3}$$

con le sostituzioni

$$p^0 = E \ \rightsquigarrow \ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \ , \quad \vec{p} \ \rightsquigarrow \ -i\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad p_\mu \ \rightsquigarrow \ -i\hbar \partial_\mu \tag{4}$$

porta all'equazione di Klein Gordon che è del secondo ordine nelle derivate temporali: come conseguenza la corrente conservata $U(1)$ associata non ha una densità di carica definita positiva che possa essere intepretata come densità di probabilità. Dirac allora propose una relazione lineare della forma

$$E = c\vec{p} \cdot \vec{\alpha} + mc^2 \beta \tag{5}$$

assumendo che $\vec{\alpha}, \beta$ siano matrici unitarie tali che questa relazione lineare sia consistente con la (3). Elevandola al quadrato si ottiene

$$\begin{aligned} E^2 &= (cp^i \alpha^i + mc^2 \beta)(cp^j \alpha^j + mc^2 \beta) \\ &= c^2 p^i p^j \alpha^i \alpha^j + m^2 c^4 \beta^2 + mc^3 p^i (\alpha^i \beta + \beta \alpha^i) \\ &= \frac{1}{2} c^2 p^i p^j (\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i) + m^2 c^4 \beta^2 + mc^3 p^i (\alpha^i \beta + \beta \alpha^i) \end{aligned} \tag{6}$$

e la consistenza con (3) per momenti arbitrari p^i produce le relazioni

$$\alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i = 2\delta^{ij} \ , \qquad \beta^2 = 1 \ , \qquad \alpha^i\beta + \beta\alpha^i = 0 \tag{7}$$

dove, come di consuetudine, la matrice identità è sottintesa nel lato destro di queste equazioni. Dirac ottenne una soluzione minimale con matrici 4×4. Una soluzione esplicita in termini di blocchi 2×2 è data da

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

dove le matrici σ^i sono le matrici di Pauli. Quantizzando la relazione (5) con le (4) si ottiene l'equazione di Dirac nella forma "hamiltoniana"

$$i\hbar\partial_t \psi = (\underbrace{-i\hbar c\, \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + mc^2\beta}_{H_D})\psi \tag{9}$$

dove l'hamiltoniana H_D è una matrice 4×4 di operatori differenziali. La hermiticità delle matrici α^i e β garantisce la hermiticità della hamiltoniana H_D (e quindi una evoluzione temporale unitaria). Moltiplicando questa equazione con la matrice invertibile $\frac{1}{\hbar c}\beta$ e definendo le matrici gamma

$$\gamma^0 \equiv -i\beta \ , \qquad \gamma^i \equiv -i\beta\alpha^i \tag{10}$$

si ottiene l'equazione di Dirac nella forma "covariante"

$$(\gamma^\mu\partial_\mu + \mu)\psi = 0 \tag{11}$$

con $\mu = \frac{mc}{\hbar}$ inverso della lunghezza d'onda Compton associata alla massa m. Le relazioni fondamentali che definiscono le matrici gamma sono facilmente ottenibili dalle relazioni (7) e si possono scrivere usando gli anticommutatori ($\{A, B\} \equiv AB + BA$) nella seguente forma

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \ . \tag{12}$$

In seguito useremo unità di misura con $\hbar = c = 1$, per cui $\mu = m$ e l'equazione di Dirac è scritta come in (1). Una notazione molto in uso impega la definizione introdotta da Feynman $\not\partial \equiv \gamma^\mu\partial_\mu$ per cui l'equazione di Dirac si scrive come

$$(\not\partial + m)\psi = 0 \ . \tag{13}$$

Soluzioni

L'equazione libera ammette soluzioni di onda piana, che oltre alla fase $e^{ip_\mu x^\mu}$ che descrive l'onda che si propaga nello spaziotempo possiedono anche una polarizzazione $w(p)$ collegata allo spin. Infatti immettendo un'onda piana della forma

$$\psi(x) \sim w(p)e^{ip_\mu x^\mu} \ , \qquad w(p) = \begin{pmatrix} w_1(p) \\ w_2(p) \\ w_3(p) \\ w_4(p) \end{pmatrix} \tag{14}$$

come ansatz nell'equazione di Dirac, si vede che la polarizzazione deve soddisfare un'equazione algebrica, $(i\gamma^\mu p_\mu + m)w(p) = 0$, e che il momento deve essere on-shell, $p_\mu p^\mu = -m^2$. Ci sono quattro soluzioni, due ad "energia positiva" (elettrone con spin su e spin giù) e due ad "energia negativa" (positrone con spin su e spin giù). Più in dettaglio, inserendo l'ansatz di onda piana nell'equazione di Dirac si ottiene ($\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$)

$$(i\not{p} + m)w(p) = 0 \tag{15}$$

da cui moltiplicando per $(-i\not{p} + m)$

$$(-i\not{p} + m)(i\not{p} + m)w(p) = (\not{p}^2 + m^2)w(p) = (p_\mu p^\mu + m^2)w(p) = 0 \tag{16}$$

che implica che $p_\mu p^\mu + m^2 = 0$. Con un pò più di sforzo si possono ottenere le espressioni esplicite delle quattro polarizzazioni indipendenti $w(p)$.

Per sviluppare un pò d'intuizione consideriamo il caso semplice di particella a riposo $p^\mu = (E, 0, 0, 0)$. La (15) diventa

$$0 = (i\gamma^0 p_0 + m)w(p) = (-i\gamma^0 E + m)w(p) = (-\beta E + m)w(p) \tag{17}$$

ed esplicitando la matrice β

$$\begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E \end{pmatrix} w(p) = m\, w(p) \tag{18}$$

Vediamo quindi che esistono due soluzioni ad energia positiva $E = m$

$$\psi_1(x) \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt} \,, \qquad \psi_2(x) \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt} \tag{19}$$

e due soluzioni ad energia negativa $E = -m$

$$\psi_3(x) \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{imt} \,, \qquad \psi_4(x) \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{imt} \,. \tag{20}$$

Queste ultime sono reintepretate come descriventi una antiparticella. Il caso generale con momento arbitrario può essere derivato con calcoli simili.

Covarianza

Descriviamo ora la covarianza dell' equazione di Dirac sotto trasformazioni di Lorentz. Le trasformazioni di Lorentz sono definite da

$$\begin{aligned} x^\mu \qquad &\longrightarrow \qquad x^{\mu\prime} = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \\ \psi(x) \qquad &\longrightarrow \qquad \psi'(x') = D(\Lambda)\psi(x) \end{aligned} \tag{21}$$

dove le matrici $D(\Lambda)$ costituiscono una rappresentazione (spinoriale) del gruppo di Lorentz. Questa rappresentazione si può costruire usando le matrici gamma. Per trasformazioni infinitesime $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$

$$D(\Lambda) = 1 + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu} \tag{22}$$

dove i generatori infinitesimi sono costruiti con le matrici gamma

$$M^{\mu\nu} = -\frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \tag{23}$$

che difatti realizzano correttamente l'algebra del gruppo di Lorentz

$$[M^{\mu\nu}, M^{\lambda\rho}] = -i\eta^{\nu\lambda}M^{\mu\rho} + i\eta^{\mu\lambda}M^{\nu\rho} + i\eta^{\nu\rho}M^{\mu\lambda} - i\eta^{\mu\rho}M^{\nu\lambda} \ . \tag{24}$$

Come esercizio si può verificare un caso particolare, ad esempio $[M^{01}, M^{12}] = -iM^{02}$. *Possiamo esplicitare* $M^{01} = -\frac{i}{4}[\gamma^0, \gamma^1] = -\frac{i}{2}\gamma^0\gamma^1$, *e similmente* $M^{12} = -\frac{i}{2}\gamma^1\gamma^2$, $M^{02} = -\frac{i}{2}\gamma^0\gamma^2$, *e calcolare*

$$\begin{aligned} [M^{01}, M^{12}] &= \Big(-\frac{i}{2}\Big)^2[\gamma^0\gamma^1, \gamma^1\gamma^2] = -\frac{1}{4}\Big(\gamma^0\gamma^1\gamma^1\gamma^2 - \gamma^1\gamma^2\gamma^0\gamma^1\Big) \\ &= -\frac{1}{4}\Big(\gamma^0\gamma^2 - \gamma^2\gamma^0\Big) = -\frac{1}{2}\gamma^0\gamma^2 = -iM^{02} \ . \end{aligned} \tag{25}$$

Inoltre si può mostrare che le matrici gamma sono tensori invarianti

$$\gamma^\mu \quad \longrightarrow \quad \gamma^{\mu\prime} = \Lambda^\mu{}_\nu D(\Lambda)\gamma^\nu D^{-1}(\Lambda) = \gamma^\mu \tag{26}$$

proprio come la metrica $\eta_{\mu\nu}$ (è relativamente semplice vederlo per trasformazioni infinitesime). Con queste proprietà gruppali è facile mostrare l'invarianza in forma dell'equazione di Dirac

$$(\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\gamma^\mu\partial'_\mu + m)\psi'(x') = 0 \ . \tag{27}$$

Infatti, usando il fatto che le matrici gamma sono tensori invarianti, possiamo scrivere il lato sinistro della seconda equazione con $\gamma^{\mu\prime}$ per cui

$$\begin{aligned} (\gamma^\mu\partial'_\mu + m)\psi'(x') &= (\gamma^{\mu\prime}\partial'_\mu + m)\psi'(x') \\ &= \Big(\Lambda^\mu{}_\nu D(\Lambda)\gamma^\nu D^{-1}(\Lambda)\Lambda_\mu{}^\lambda\partial_\lambda + m\Big)D(\Lambda)\psi(x) \\ &= D(\Lambda)(\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi(x) \end{aligned} \tag{28}$$

da cui segue la (27).

Oltre alle trasformazioni di Lorentz connesse all'identità, si può mostare l'invarianza dell'equazione di Dirac libera per trasformazioni discrete quali la riflessione spaziale (o parità) P, la riflessione temporale T e la coniugazione di carica C che scambia particelle con antiparticelle. Discutiamo esplicitamente la trasformazione di parità

$$\tag{29}$$

$$
\begin{aligned}
x^\mu \quad &\longrightarrow \quad \tilde{x}^\mu = P^\mu{}_\nu x^\nu \ , \qquad P^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
\psi(x) \quad &\longrightarrow \quad \tilde{\psi}(\tilde{x}) = D(P)\psi(x) \ , \qquad D(P) = e^{i\phi}\gamma^0
\end{aligned}
\tag{30}
$$

dove la rappresentazione sugli spinori della trasformazione di parità, $D(P) = e^{i\phi}\gamma^0$, può contenere una fase arbitraria ϕ. Mostriamo che con queste trasformazioni l'equazione è invariante in forma

$$
(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\gamma^\mu \tilde{\partial}_\mu + m)\tilde{\psi}(\tilde{x}) = 0 \ . \tag{31}
$$

Infatti possiamo calcolare

$$
\begin{aligned}
(\gamma^\mu \tilde{\partial}_\mu + m)\tilde{\psi}(\tilde{x}) &= (\gamma^0\partial_0 - \gamma^i\partial_i + m)e^{i\phi}\gamma^0\psi(x) = e^{i\phi}\gamma^0(\gamma^0\partial_0 + \gamma^i\partial_i + m)\psi(x) \\
&= e^{i\phi}\gamma^0(\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi(x)
\end{aligned}
\tag{32}
$$

per cui un'equazione in un sistema di riferimento implica l'altra nel sistema di riferimento con assi spaziali riflessi.

Molte delle proprietà degli spinori seguono dalle proprietà algebriche delle matrici gamma e per convenienza ne elenchiamo qui alcune

$$
\begin{aligned}
&\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 && (\gamma^i \text{ hermitiane, } \gamma^0 \text{ antihermitiana}) \\
&\gamma_5 \equiv -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 && \Longrightarrow \qquad \{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0 \ , \quad (\gamma_5)^2 = 1 \ , \quad {\gamma_5}^\dagger = \gamma_5 \ .
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Azione

Per scrivere l'azione conviene introdurre il coniugato di Dirac $\bar{\psi}$ del campo ψ, definito come

$$
\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\beta = \psi^\dagger i\gamma^0 \tag{34}
$$

che ha la proprietà di trasformarsi in modo tale da rendere il prodotto $\bar{\psi}\psi$ uno scalare. Infatti dalla trasformazione infinitesima di Lorentz su uno spinore ψ (trascurando la dipendenza dalle coordinate dello spazio-tempo) si ottiene quella del suo coniugato di Dirac

$$
\delta\psi = \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\psi \qquad \longrightarrow \qquad \delta\bar{\psi} = -\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\bar{\psi}M^{\mu\nu} \tag{35}
$$

da cui si deduce che $\bar{\psi}\psi$ è uno scalare. L'azione è uno scalare ed è data da

$$
S[\psi, \bar{\psi}] = \int d^4x\, \mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}) \ , \qquad \mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}) = -\bar{\psi}(\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi \ . \tag{36}
$$

Variando $\bar{\psi}$ e ψ ed usando il principio di minima azione si ottengono l'equazione di Dirac e la sua coniugata

$$
(\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi(x) = 0 \ , \qquad \bar{\psi}(x)(\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu - m) = 0 \ . \tag{37}
$$

Come esercizio verifichiamo esplicitamente le trasformazioni di Lorentz di $\bar{\psi}$:

$$\begin{aligned}
\delta\bar{\psi} &= \delta\psi^\dagger i\gamma^0 = \Big(\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\psi\Big)^\dagger i\gamma^0 = \Big(\frac{1}{4}\omega_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi\Big)^\dagger i\gamma^0 = \frac{1}{4}\omega_{\mu\nu}\;\psi^\dagger\gamma^{\nu\dagger}\gamma^{\mu\dagger}i\gamma^0 \\
&= \frac{1}{4}\omega_{\mu\nu}\;\psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\gamma^{\nu\dagger}\gamma^0\gamma^0\gamma^{\mu\dagger}i\gamma^0 = \frac{1}{4}\omega_{\mu\nu}\;(\psi^\dagger i\gamma^0)(\gamma^0\gamma^{\nu\dagger}\gamma^0)(\gamma^0\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0) = \frac{1}{4}\omega_{\mu\nu}\;\bar{\psi}\gamma^\nu\gamma^\mu \\
&= -\frac{1}{4}\omega_{\mu\nu}\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu = -\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\bar{\psi}M^{\mu\nu}\ . \qquad (38)
\end{aligned}$$

Simmetrie

Le simmetrie sotto il gruppo di Lorentz sono state già descritte sopra, mentre quelle addizionali per traslazioni spazio temporali sono immediate considerando il campo come uno scalare ($x \to x' = x + a$ con $\psi(x) \to \psi'(x') = \psi(x)$). Da questa ultima si può ottenere il tensore energia-impulso come corrente di Noether.

Consideriamo in dettaglio la simmetria interna generata dalle trasformazioni di fase del gruppo $U(1)$

$$\begin{aligned}
\psi(x) &\longrightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha}\psi(x) \\
\bar{\psi}(x) &\longrightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{-i\alpha}\bar{\psi}(x)\ . \qquad (39)
\end{aligned}$$

È facile vedere che l'azione (36) è invariante. Per trasformazioni infinitesime

$$\begin{aligned}
\delta\psi(x) &= i\alpha\,\psi(x) \\
\delta\bar{\psi}(x) &= -i\alpha\,\bar{\psi}(x) \qquad (40)
\end{aligned}$$

considerando un parametro locale $\alpha(x)$ si calcola

$$\delta S[\psi,\bar{\psi}] = \int d^4x\,\partial_\mu\alpha(\underbrace{-i\bar{\psi}\gamma^\mu\psi}_{-J^\mu}) \qquad (41)$$

da cui si verifica di nuovo la simmetria $U(1)$ (per α costante) e si ottiene la relativa corrente di Noether

$$J^\mu = i\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \qquad (42)$$

che è conservata $\partial_\mu J^\mu = 0$. In particolare la densità di carica conservata è definita positiva

$$J^0 = i\bar{\psi}\gamma^0\psi = i\psi^\dagger i\gamma^0\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi \geq 0 \qquad (43)$$

e fù originariamente considerata da Dirac come una densità di probabilità.

Proprietà chirali

Analizziamo infine la riducibilità dello spinore di Dirac sotto il gruppo di Lorentz proprio ed ortocrono $SO^+(3,1)$. Costruendo i proiettori

$$P_L = \frac{1-\gamma_5}{2}\ , \qquad P_R = \frac{1+\gamma_5}{2} \qquad (44)$$

(sono proiettori poiché $P_L + P_R = 1$, $P_L^2 = P_L$, $P_R^2 = P_R$, $P_L P_R = 0$) possiamo dividere lo spinore di Dirac nelle sue componenti sinistrorse e destrorse (spinori di Weyl)

$$\psi = \psi_L + \psi_R \ , \qquad \psi_L \equiv \frac{1-\gamma_5}{2}\psi \ , \qquad \psi_R \equiv \frac{1+\gamma_5}{2}\psi \tag{45}$$

che sono le due rappresentazioni irriducibili del gruppo di Lorentz proprio ed ortocrono (nella teoria delle rappresentazioni abbiamo anticipato la presenza delle rappresentazioni irriducibili inequivalenti $(\frac{1}{2}, 0)$ e $(0, \frac{1}{2})$ che corrispondono agli spinori di Weyl, e descritto lo spinore di Dirac come la rappresentazione riducibile data dalla somma diretta $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$). Infatti i generatori infinitesimi delle trasformazioni di Lorentz $M^{\mu\nu}$ commutano con i proiettori P_L, P_R

$$P_{L/R} M^{\mu\nu} = \frac{1 \mp \gamma_5}{2}\Big(- \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\Big) = \Big(- \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\Big)\frac{1 \mp \gamma_5}{2} = M^{\mu\nu} P_{L/R} \tag{46}$$

e questo indica come lo spinore di Dirac sia riducibile nella sue parti destrorse e sinistrorse. L'operazione di parità (riflessione degli assi spaziali) trasforma un fermione sinistrorso in un fermione destrorso e viceversa. Infatti

$$\psi_L \xrightarrow{P} (\psi_L)' = \Big(\frac{1-\gamma_5}{2}\psi\Big)' = e^{i\phi}\gamma^0 \frac{1-\gamma_5}{2}\psi = \frac{1+\gamma_5}{2} e^{i\phi}\gamma^0 \psi = \frac{1+\gamma_5}{2}\psi' = (\psi')_R \ . \tag{47}$$

È interessante scrivere l'azione in termini di queste componenti chirali irriducibili

$$S[\psi_L, \psi_R] = \int d^4x \Big(- \bar\psi_L \not{\partial} \psi_L - \bar\psi_R \not{\partial} \psi_R - m(\bar\psi_L \psi_R + \bar\psi_R \psi_L)\Big) \tag{48}$$

che mostra come una massa di Dirac m non possa essere presente per fermioni chirali (i.e. fermioni puramente sinistrorsi per cui $\psi_R = 0$ o puramente destrorsi per cui $\psi_L = 0$). I fermioni che entrano nel modello standard sono chirali e non possono avere masse di Dirac (per ragioni collegate all'invarianza di gauge). Masse di Dirac possono emergere come conseguenza del meccanismo di Higgs per la rottura spontanea della simmetria di gauge.

Propagatore

Quantizzando il campo di Dirac libero si ottiene il propagatore. Come nel caso del campo di Klein Gordon, il propagatore è collegato alla funzione di Green $S(x-y)$ dell'operatore differenziale descrivente l'equazione del moto libera ($(\not{\partial}_x + m)S(x-y) = \delta^4(x-y)$). Il propagatore ha quindi la seguente forma

$$\langle \psi(x)\bar\psi(y)\rangle \;\; = \;\; -iS(x-y) = -i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, e^{ip\cdot(x-y)} \frac{-i\not{p} + m}{p^2 + m^2 - i\epsilon} \tag{49}$$

da cui segue, grazie alla prescrizione causale di Feynman ($-i\epsilon$), la corretta interpretazione di fluttuazioni di particelle ed antiparticelle con energie positive che si propagano dal passato al futuro, proprio come nel caso delle particelle scalari.