

Equazioni d'onda relativistiche

(Appunti per il corso di Teoria dei Campi 1 - 2010/11)

Fiorenzo Bastianelli

1 Spin 0: il campo scalare di Klein Gordon

L'equazione di Klein-Gordon può essere ottenuta dalla prima quantizzazione di una particella relativistica. Però il campo di Klein-Gordon non ammette una interpretazione probabilistica come nel caso della funzione d'onda dell'equazione di Schroedinger. La consistenza con la meccanica quantistica è recuperata trattando il campo di Klein-Gordon come campo classico descrivente un numero infinito di gradi di libertà (che successivamente dovrà essere quantizzato, esattamente come nel caso del campo elettromagnetico che storicamente fu il primo esempio di campo quantizzato) e non come una funzione d'onda quantistica. Spesso ci si riferisce alla quantizzazione del campo come alla seconda quantizzazione. Con la seconda quantizzazione il campo di Klein-Gordon permette di descrivere un numero arbitrario di particelle ed antiparticelle identiche di spin zero.

Azione

L'equazione di Klein-Gordon per un campo scalare complesso $\phi(x)$ (in unità di misura con $\hbar = c = 1$) è data da

$$(\square - m^2)\phi(x) = 0 \quad (1)$$

dove $\square \equiv \partial^\mu \partial_\mu$ è l'operatore differenziale di d'Alembert. Questa equazione può essere convenientemente ottenuta da un principio d'azione

$$S[\phi, \phi^*] = \int d^4x \left(-\partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \right). \quad (2)$$

Variando indipendentemente ϕ e ϕ^* ed imponendo il principio di minima azione si ottengono le equazioni del moto:

$$\frac{\delta S[\phi, \phi^*]}{\delta \phi^*(x)} = (\square - m^2)\phi(x) = 0, \quad \frac{\delta S[\phi, \phi^*]}{\delta \phi(x)} = (\square - m^2)\phi^*(x) = 0. \quad (3)$$

Per un campo scalare reale $\phi^* = \phi$, l'azione è data da

$$S[\phi] = \int d^4x \left(-\frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi \phi \right) \quad (4)$$

da cui

$$\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(x)} = (\square - m^2)\phi(x) = 0. \quad (5)$$

Soluzioni

Si possono cercare soluzioni di onda piana del tipo

$$\phi(x) \sim e^{ip_\nu x^\nu} \quad (6)$$

che inserita in (1) produce

$$-(p^\mu p_\mu + m^2) e^{ip_\nu x^\nu} = 0 \quad (7)$$

L'onda piana è una soluzione se il quadrimomento p_μ soddisfa la condizione di mass-shell

$$p^\mu p_\mu = -m^2, \quad (8)$$

che è risolta da

$$(p^0)^2 = \vec{p}^2 + m^2 \quad \Longrightarrow \quad p^0 = \pm \underbrace{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}}_{E_p} = \pm E_p \quad (9)$$

(se si cerca di interpretare $\phi(x)$ come una funzione d'onda, oltre alle soluzioni con energia positiva $p^0 = E_p$ sono presenti anche soluzioni con energia negativa $p^0 = -E_p$, che saranno poi reinterpretate come dovute alle antiparticelle). Tutte

le soluzioni sono quindi indicizzate dal valore del momento spaziale $\vec{p} \in R^3$, oltre che dal segno di $p^0 = \pm E_p$. Una soluzione generale si può quindi scrivere come combinazione lineare di onde piane

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left(a(\vec{p}) e^{-iE_p t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} + b^*(\vec{p}) e^{iE_p t - i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) \quad (10)$$

e relativo complesso coniugato

$$\phi^*(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left(b(\vec{p}) e^{-iE_p t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a^*(\vec{p}) e^{iE_p t - i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) \quad (11)$$

Per campi reali ($\phi^* = \phi$) i coefficienti di Fourier $a(\vec{p})$ e $b(\vec{p})$ coincidono, $a(\vec{p}) = b(\vec{p})$.

Simmetrie

Il campo complesso di Klein-Gordon libero (cioè senza interazioni) possiede simmetrie rigide generate dal gruppo di Poincaré (simmetrie di spazio-tempo) e simmetrie rigide per trasformazioni di fase generate dal gruppo $U(1)$ (simmetrie interne).

La simmetria $U(1)$ è data da

$$\begin{aligned} \phi(x) &\longrightarrow \phi'(x) = e^{i\alpha} \phi(x) \\ \phi^*(x) &\longrightarrow \phi'^*(x) = e^{-i\alpha} \phi^*(x) \end{aligned} \quad (12)$$

ed è facile vedere che l'azione (2) è invariante. Per trasformazioni infinitesime

$$\begin{aligned} \delta\phi(x) &= i\alpha\phi(x) \\ \delta\phi^*(x) &= -i\alpha\phi^*(x) \end{aligned} \quad (13)$$

Considerando il parametro locale, $\alpha \rightarrow \alpha(x)$, si calcola

$$\delta S[\phi, \phi^*] = \int d^4x \partial_\mu \alpha \underbrace{\left(i\phi^* \partial^\mu \phi - i(\partial^\mu \phi^*) \phi \right)}_{J^\mu} \quad (14)$$

da cui verifichiamo di nuovo la simmetria $U(1)$ (per α costante), ottenendo allo stesso tempo la relativa corrente di Noether

$$J^\mu = i\phi^* \partial^\mu \phi - i(\partial^\mu \phi^*) \phi \equiv i\phi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi \quad (15)$$

che soddisfa un'equazione di continuità, $\partial_\mu J^\mu = 0$. La corrispondente carica conservata

$$Q \equiv \int d^3x J_0 = \int d^3x i\phi^* \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi \quad (16)$$

non è definita positiva: non può essere interpretata come una probabilità come nel caso delle soluzioni dell'equazione di Schroedinger. Più in generale si può definire un prodotto scalare tra due soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon χ e ϕ come

$$\langle \chi | \phi \rangle \equiv \int d^3x i\chi^* \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi \quad (17)$$

Questo prodotto scalare è conservato grazie alle equazioni del moto, ma non è interpretabile come ampiezza di probabilità.

Le trasformazioni generate dal gruppo di Poincaré

$$\begin{aligned} x^\mu &\longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \\ \phi(x) &\longrightarrow \phi'(x') = \phi(x) \\ \phi^*(x) &\longrightarrow \phi'^*(x') = \phi^*(x) \end{aligned} \quad (18)$$

trattano il campo di Klein-Gordon come uno scalare. È facile verificare l'invarianza dell'azione sotto queste trasformazioni finite. Consideriamo in particolare il caso di traslazioni spazio-temporali infinitesime, che possiamo scrivere come

$$\delta\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x) = -a^\mu \partial_\mu \phi(x) \quad (19)$$

con relativo complesso coniugato (ora a^μ è da considerare infinitesimo). Considerando il parametro infinitesimo a^μ come funzione arbitraria dello spazio-tempo otteniamo dalla variazione dell'azione le corrispondenti correnti di Noether conservate (il tensore energia-impulso)

$$\delta S[\phi, \phi^*] = \int d^4x (\partial_\mu a_\nu) \underbrace{\left(\partial^\mu \phi^* \partial^\nu \phi + \partial^\nu \phi^* \partial^\mu \phi + \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \right)}_{T^{\mu\nu}} \quad (20)$$

dove abbiamo trascurato derivate totali e dove \mathcal{L} indica la densità di lagrangiana (l'integrando della (2)). Il tensore $T^{\mu\nu}$ è chiamato tensore energia-impulso ed è conservato (più precisamente soddisfa ad un'equazione di continuità, $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$). In particolare sono conservate le cariche

$$P^\mu = \int d^3x T^{0\mu} \quad (21)$$

corrispondenti al quadrimomento totale portato del campo. Ad esempio, la densità di energia trasportata del campo è

$$\mathcal{E}(x) = T^{00} = \partial_0 \phi^* \partial_0 \phi + \vec{\nabla} \phi^* \cdot \vec{\nabla} \phi + m^2 \phi^* \phi \quad (22)$$

e l'energia totale conservata è data da $P^0 \equiv E = \int d^3x \mathcal{E}(x)$ che è manifestamente definita positiva.

Quantizzazione

La quantizzazione del campo scalare libero (usando unità di misura con $\hbar = c = 1$) è facilmente ottenibile con l'integrale funzionale o, in alternativa, con i metodi di quantizzazione canonica tradizionali. Per gli scopi di questo corso è sufficiente descrivere il risultato della quantizzazione attraverso la discussione dell'unico oggetto interessante che emerge per una teoria libera: il propagatore. Una teoria libera ha equazioni del moto lineari nel campo, come nell'equazione d'onda di KG. La sua azione è quindi quadratica: questa descrive solo la propagazione dei quanti d'onda associati al campo. Consideriamo il caso del campo scalare complesso. Il propagatore libero, che possiamo pensare associato all'azione libera $S[\phi] = \int d^4x (-\partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi)$, corrisponde essenzialmente alla funzione di Green $G(x, y)$ associata all'equazione di Klein-Gordon, e descrive matematicamente la propagazione di una particella da un punto dello spazio-tempo y ad un punto dello spazio-tempo x , o di una antiparticella dal punto dello spazio-tempo x al punto dello spazio-tempo y . È indicato graficamente dal diagramma di Feynman



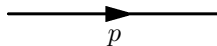
La funzione di Green dell'equazione di Klein-Gordon corrisponde alla soluzione dell'equazione di Klein-Gordon in presenza di una sorgente puntiforme istantanea di intensità unitaria. In formule

$$(-\square_x + m^2)G(x, y) = \delta^4(x - y) . \quad (23)$$

In trasformata di Fourier la soluzione si scrive come

$$G(x, y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip_\mu(x^\mu - y^\mu)}}{p^2 + m^2 - i\epsilon} \quad (24)$$

dove $\epsilon \rightarrow 0^+$ è un parametro infinitesimo positivo che implementa opportune condizioni al contorno (prescrizione causale di Feynman). In una interpretazione particellare descrive sia la propagazione di "particelle reali" che gli effetti di "particelle virtuali". Il propagatore è spesso descritto con la sua trasformata di Fourier, $\frac{1}{p^2 + m^2}$, ed indicato con il seguente diagramma di Feynman



dove p indica il quadrimomento trasportato della particella che scorre lungo la linea.

Si noti che conoscendo la funzione di Green $G(x, y)$, si può ottenere una soluzione dell'equazione non omogenea

$$(-\square + m^2)\phi(x) = J(x) \quad (25)$$

con $J(x)$ sorgente arbitraria come

$$\phi(x) = \int d^4y G(x, y)J(y) . \quad (26)$$

Questo si verifica facilmente inserendo (26) in (25) ed usando la proprietà (23).

Più esattamente il propagatore (o funzione di correlazione a due punti) è dato da

$$\langle \phi(x)\phi^*(y) \rangle = -iG(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-i}{p^2 + m^2 - i\epsilon} e^{ip \cdot (x-y)} . \quad (27)$$

Questo propagatore descrive la propagazione dei quanti del campo scalare complesso che sono identificate con particelle ed antiparticelle di massa m e spin 0. Queste particelle possono propagarsi a distanze macroscopiche solo se vale la relazione $p^2 = -m^2$ (il polo che compare nell'integrando compensa gli effetti di interferenza distruttiva dell'integrale di Fourier sulle onde piane) e sono dette "particelle reali". Gli effetti quantistici dovuti alle fluttuazioni con $p^2 \neq -m^2$ sono invece considerati come dovuti a "particelle virtuali" che non sono visibili come stati asintotici (cioè su distanze macroscopiche e sono "nascoste" dal principio di indeterminazione). La prescrizione $i\epsilon$ per spostare i poli dell'integrando (prescrizione di Feynman-Stueckelberg) corrisponde ad una scelta ben precisa delle condizioni al contorno da dare alla funzione di Green: corrisponde a propagare in avanti nel tempo le onde piane con energia positiva ($p^0 = E_p$), mentre propaga indietro nel tempo le fluttuazioni con energia negativa ($p^0 = -E_p$). Questa prescrizione è anche detta causale, perchè non permette la propagazione nel futuro di stati ad energia negativa. Tali particelle con energia negativa che si propagano indietro nel tempo sono interpretate come antiparticelle con energia positiva che si propagano avanti nel tempo. Vediamo esplicitamente come questo emerge matematicamente dal calcolo dell'integrale in p^0 del propagatore, che mostra anche come il campo libero si possa interpretare come una collezione di oscillatori armonici:

$$\begin{aligned} \langle \phi(x)\phi^*(y) \rangle &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-i}{p^2 + m^2 - i\epsilon} e^{ip \cdot (x-y)} \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x}-\vec{y})} \int \frac{dp^0}{2\pi} e^{-ip^0(x^0-y^0)} \frac{i}{(p^0 - E_p + i\epsilon')(p^0 + E_p - i\epsilon')} \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x}-\vec{y})} \left[\theta(x^0 - y^0) \frac{e^{-iE_p(x^0-y^0)}}{2E_p} + \theta(y^0 - x^0) \frac{e^{-iE_p(y^0-x^0)}}{2E_p} \right] \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x}-\vec{y})} \frac{e^{-iE_p|x^0-y^0|}}{2E_p} \end{aligned} \quad (28)$$

dove $E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ ed $\epsilon \sim \epsilon' \rightarrow 0^+$. Gli integrali sono stati fatti usando l'integrazione su un circuito del piano complesso p^0 , scegliendo di chiudere il circuito sul semicerchio di raggio infinito che dà un contributo nullo e valutando l'integrale col teorema dei residui). Ricordando la forma del propagatore dell'oscillatore armonico si vede come il campo possa essere interpretato come una collezione infinita di oscillatori armonici con frequenza E_p .

Potenziale di Yukawa

Consideriamo per comodità il caso di un campo scalare reale, dove particelle ed antiparticelle sono indistinguibili. Usando il propagatore per descrivere gli effetti di sorgenti esterne, indicate con $J(x)$, che possono emettere o assorbire quanti d'onda del campo scalare ϕ , possiamo descrivere una azione efficace della forma

$$W[J] = \frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x)G(x-y)J(y) \quad (29)$$

Scegliamo la sorgente esterna $J(x)$ come data dalla somma di due "cariche" statiche, di carica g_1 e g_2 poste nei punti $\vec{x} = \vec{r}$ e $\vec{x} = 0$

$$J(x) = g_1\delta^3(\vec{x} - \vec{r}) + g_2\delta^3(\vec{x}) . \quad (30)$$

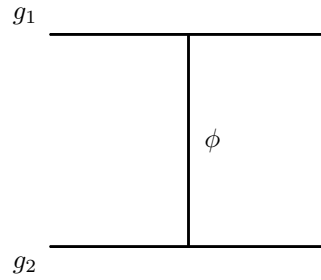
L'azione efficace che descrive l'interazione tra la carica g_1 e la carica g_2 mediata dal campo scalare ϕ corrisponde al seguente termine contenuto in (29)

$$\begin{aligned}
W[g_1, g_2] &= \int d^4x d^4y g_1 \delta^3(\vec{x} - \vec{r}) G(x - y) g_2 \delta^3(\vec{y}) \\
&= \int dx^0 dy^0 g_1 g_2 G(x^0 - y^0; \vec{r}) \\
&= \int dx^0 g_1 g_2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}}{\vec{p}^2 + m^2} \\
&= \int dt g_1 g_2 \frac{e^{-mr}}{4\pi r}
\end{aligned} \tag{31}$$

che corrisponde ad un potenziale d'interazione V tra le due cariche ($L = T - V$) detto potenziale di Yukawa

$$V(r) = -\frac{g_1 g_2}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r} \tag{32}$$

Questo è un potenziale attrattivo tra cariche dello stesso segno, con raggio d'azione $\lambda = \frac{1}{m}$ corrispondente alla lunghezza d'onda Compton di una particella di massa m . Questo processo può essere descritto dal seguente diagramma di Feynman



Nel 1935 Yukawa introdusse una simile particella scalare per descrivere le forze nucleari e la chiamò mesone. Con una stima dell'ordine di $\lambda \sim \frac{1}{3}$ fm si ottiene una massa $m \sim 150$ MeV, ed infatti il mesone π^0 (detto anche pione), che fù successivamente scoperto studiando le interazioni dei raggi cosmici, ha una massa di questo ordine di grandezza $m_{\pi^0} \sim 135$ MeV.

2 Spin $\frac{1}{2}$: l'equazione di Dirac

Storicamente Dirac trovò la corretta equazione per descrivere particelle di spin $\frac{1}{2}$ cercando un'equazione relativistica che potesse avere un'interpretazione probabilistica per essere consistente con i principi della meccanica quantistica, a differenza dell'equazione di Klein-Gordon che non ammette questa interpretazione. Sebbene un'interpretazione probabilistica non sarà tenibile in presenza di interazioni, e la funzione d'onda di Dirac dovrà essere trattata come un campo classico da quantizzare (seconda quantizzazione), è utile ripercorrere la deduzione che portò Dirac alla formulazione di un'equazione del primo ordine nel tempo, l'equazione di Dirac

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi(x) = 0 \tag{33}$$

dove la funzione d'onda $\psi(x)$ ha quattro componenti (spinore di Dirac) e le γ^μ sono matrici 4×4 . Poichè le quattro componenti del campo di Dirac $\psi(x)$ non sono componenti di un quadrivettore, ma sono di natura spinoriale e si trasformano in modo differente per trasformazioni di Lorentz, occorre usare indici diversi per indicarne le componenti senza ambiguità. In questo contesto usiamo indici $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$ per indicare le componenti di un quadrivettore ed indici $\alpha, \beta, \dots = 1, 2, 3, 4$ per indicare le componenti di uno spinore di Dirac. L'equazione (33) si scrive in modo più esplicito come

$$\left((\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \partial_\mu + m \delta_{\alpha\beta} \right) \psi_\beta(x) = 0. \tag{34}$$

e contiene quattro equazioni distinte ($\alpha = 1, \dots, 4$).

Equazione di Dirac

La relazione relativistica tra energia ed impulso di una particella libera

$$p^\mu p_\mu = -m^2 c^2 \quad \Longleftrightarrow \quad E^2 = c^2 \vec{p}^2 + m^2 c^4 \quad (35)$$

con le sostituzioni

$$p^0 = E \rightsquigarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \rightsquigarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \quad \Longleftrightarrow \quad p_\mu \rightsquigarrow -i\hbar \partial_\mu \quad (36)$$

porta all'equazione di Klein Gordon che è del secondo ordine nelle derivate temporali: come conseguenza la corrente conservata $U(1)$ associata non ha una densità di carica definita positiva che possa essere interpretata come densità di probabilità. Dirac allora propose una relazione lineare della forma

$$E = c\vec{p} \cdot \vec{\alpha} + mc^2 \beta \quad (37)$$

assumendo che $\vec{\alpha}, \beta$ siano matrici unitarie tali che questa relazione lineare sia consistente con la (35). Elevandola al quadrato si ottiene

$$\begin{aligned} E^2 &= (cp^i \alpha^i + mc^2 \beta)(cp^j \alpha^j + mc^2 \beta) \\ &= c^2 p^i p^j \alpha^i \alpha^j + m^2 c^4 \beta^2 + mc^3 p^i (\alpha^i \beta + \beta \alpha^i) \\ &= \frac{1}{2} c^2 p^i p^j (\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i) + m^2 c^4 \beta^2 + mc^3 p^i (\alpha^i \beta + \beta \alpha^i) \end{aligned} \quad (38)$$

e la consistenza con (35) per momenti arbitrari p^i produce le relazioni

$$\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i = 2\delta^{ij}, \quad \beta^2 = 1, \quad \alpha^i \beta + \beta \alpha^i = 0 \quad (39)$$

dove, come di consuetudine, la matrice identità è sottintesa nel lato destro di queste equazioni. Dirac ottenne una soluzione minimale con matrici 4×4 . Una soluzione esplicita in termini di blocchi 2×2 è data da

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (40)$$

dove le matrici σ^i sono le matrici di Pauli. Quantizzando la relazione (37) con le (36) si ottiene l'equazione di Dirac nella forma "hamiltoniana"

$$i\hbar \partial_t \psi = \underbrace{(-i\hbar c \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + mc^2 \beta)}_{H_D} \psi \quad (41)$$

dove l'hamiltoniana H_D è una matrice 4×4 di operatori differenziali. La hermiticità delle matrici α^i e β garantisce la hermiticità della hamiltoniana H_D (e quindi una evoluzione temporale unitaria). Moltiplicando questa equazione con la matrice invertibile $\frac{1}{\hbar c} \beta$ e definendo le matrici gamma

$$\gamma^0 \equiv -i\beta, \quad \gamma^i \equiv -i\beta \alpha^i \quad (42)$$

si ottiene l'equazione di Dirac nella forma "covariante"

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi = 0 \quad (43)$$

con $\mu = \frac{mc}{\hbar}$ inverso della lunghezza d'onda Compton associata alla massa m . Le relazioni fondamentali che definiscono le matrici gamma sono facilmente ottenibili dalle relazioni (39) e si possono scrivere usando gli anticommutatori ($\{A, B\} \equiv AB + BA$) nella seguente forma

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (44)$$

In seguito useremo unità di misura con $\hbar = c = 1$, per cui $\mu = m$ e l'equazione di Dirac è scritta come in (33). Una notazione molto in uso impegna la definizione introdotta da Feynman $\not{\partial} \equiv \gamma^\mu \partial_\mu$ per cui l'equazione di Dirac si scrive come

$$(\not{\partial} + m)\psi = 0. \quad (45)$$

Soluzioni

L'equazione libera ammette soluzioni di onda piana, che oltre alla fase $e^{ip_\mu x^\mu}$ che descrive l'onda che si propaga nello spaziotempo possiedono anche una polarizzazione $w(p)$ collegata allo spin. Infatti immettendo un'onda piana della forma

$$\psi(x) \sim w(p)e^{ip_\mu x^\mu}, \quad w(p) = \begin{pmatrix} w_1(p) \\ w_2(p) \\ w_3(p) \\ w_4(p) \end{pmatrix} \quad (46)$$

come ansatz nell'equazione di Dirac, si vede che la polarizzazione deve soddisfare un'equazione algebrica, $(i\gamma^\mu p_\mu + m)w(p) = 0$, e che il momento deve essere on-shell, $p_\mu p^\mu = -m^2$. Ci sono quattro soluzioni, due ad "energia positiva" (elettrone con spin su e spin giù) e due ad "energia negativa" (positrone con spin su e spin giù). Più in dettaglio, inserendo l'ansatz di onda piana nell'equazione di Dirac si ottiene $(\not{p} + m)w(p) = 0$

$$(i\not{p} + m)w(p) = 0 \quad (47)$$

da cui moltiplicando per $(-i\not{p} + m)$

$$(-i\not{p} + m)(i\not{p} + m)w(p) = (\not{p}^2 + m^2)w(p) = (p_\mu p^\mu + m^2)w(p) = 0 \quad (48)$$

che implica che $p_\mu p^\mu + m^2 = 0$. Con un pò più di sforzo si possono ottenere le espressioni esplicite delle quattro polarizzazioni indipendenti $w(p)$.

Per sviluppare un pò d'intuizione consideriamo il caso semplice di particella a riposo $p^\mu = (E, 0, 0, 0)$. La (47) diventa

$$0 = (i\gamma^0 p_0 + m)w(p) = (-i\gamma^0 E + m)w(p) = (-\beta E + m)w(p) \quad (49)$$

ed esplicitando la matrice β

$$\begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E \end{pmatrix} w(p) = m w(p) \quad (50)$$

Vediamo quindi che esistono due soluzioni ad energia positiva $E = m$

$$\psi_1(x) \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt}, \quad \psi_2(x) \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt} \quad (51)$$

e due soluzioni ad energia negativa $E = -m$

$$\psi_3(x) \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{imt}, \quad \psi_4(x) \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{imt}. \quad (52)$$

Queste ultime sono reinterprete come descrittive di una antiparticella. Il caso generale con momento arbitrario può essere derivato con calcoli simili.

Covarianza

Descriviamo ora la covarianza dell'equazione di Dirac sotto trasformazioni di Lorentz. Le trasformazioni di Lorentz sono definite da

$$\begin{aligned} x^\mu &\longrightarrow x^{\mu'} = \Lambda^\mu{}_{\nu} x^\nu \\ \psi(x) &\longrightarrow \psi'(x') = D(\Lambda)\psi(x) \end{aligned} \quad (53)$$

dove le matrici $D(\Lambda)$ costituiscono una rappresentazione (spinoriale) del gruppo di Lorentz. Questa rappresentazione si può costruire usando le matrici gamma. Per trasformazioni infinitesime $\Lambda^\mu{}_{\nu} = \delta^\mu{}_{\nu} + \omega^\mu{}_{\nu}$

$$D(\Lambda) = 1 + \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \quad (54)$$

dove i generatori infinitesimi sono costruiti con le matrici gamma

$$M^{\mu\nu} = -\frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (55)$$

che difatti realizzano correttamente l'algebra del gruppo di Lorentz

$$[M^{\mu\nu}, M^{\lambda\rho}] = -i\eta^{\nu\lambda}M^{\mu\rho} + i\eta^{\mu\lambda}M^{\nu\rho} + i\eta^{\nu\rho}M^{\mu\lambda} - i\eta^{\mu\rho}M^{\nu\lambda} . \quad (56)$$

Come esercizio si può verificare un caso particolare, ad esempio $[M^{01}, M^{12}] = -iM^{02}$. Possiamo esplicitare $M^{01} = -\frac{i}{4}[\gamma^0, \gamma^1] = -\frac{i}{2}\gamma^0\gamma^1$, e similmente $M^{12} = -\frac{i}{2}\gamma^1\gamma^2$, $M^{02} = -\frac{i}{2}\gamma^0\gamma^2$, e calcolare

$$\begin{aligned} [M^{01}, M^{12}] &= \left(-\frac{i}{2}\right)^2 [\gamma^0\gamma^1, \gamma^1\gamma^2] = -\frac{1}{4}(\gamma^0\gamma^1\gamma^1\gamma^2 - \gamma^1\gamma^2\gamma^0\gamma^1) \\ &= -\frac{1}{4}(\gamma^0\gamma^2 - \gamma^2\gamma^0) = -\frac{1}{2}\gamma^0\gamma^2 = -iM^{02} . \end{aligned} \quad (57)$$

Inoltre si può mostrare che le matrici gamma sono tensori invarianti

$$\gamma^\mu \longrightarrow \gamma^{\mu'} = \Lambda^\mu{}_\nu D(\Lambda)\gamma^\nu D^{-1}(\Lambda) = \gamma^\mu \quad (58)$$

proprio come la metrica $\eta_{\mu\nu}$ (è relativamente semplice vederlo per trasformazioni infinitesime). Con queste proprietà gruppali è facile mostrare l'invarianza in forma dell'equazione di Dirac

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\gamma^{\mu'} \partial'_{\mu'} + m)\psi'(x') = 0 . \quad (59)$$

Infatti, usando il fatto che le matrici gamma sono tensori invarianti, possiamo scrivere il lato sinistro della seconda equazione con $\gamma^{\mu'}$ per cui

$$\begin{aligned} (\gamma^{\mu'} \partial'_{\mu'} + m)\psi'(x') &= (\gamma^{\mu'} \partial'_\mu + m)\psi'(x') \\ &= \left(\Lambda^\mu{}_\nu D(\Lambda)\gamma^\nu D^{-1}(\Lambda)\Lambda_\mu{}^\lambda \partial_\lambda + m\right)D(\Lambda)\psi(x) \\ &= D(\Lambda)(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi(x) \end{aligned} \quad (60)$$

da cui segue la (59).

Oltre alle trasformazioni di Lorentz connesse all'identità, si può mostrare l'invarianza dell'equazione di Dirac libera per trasformazioni discrete quali la riflessione spaziale (o parità) P , la riflessione temporale T e la coniugazione di carica C che scambia particelle con antiparticelle. Discutiamo esplicitamente la trasformazione di parità

(61)

$$\begin{aligned} x^\mu &\longrightarrow \tilde{x}^\mu = P^\mu{}_\nu x^\nu , & P^\mu{}_\nu &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \psi(x) &\longrightarrow \tilde{\psi}(\tilde{x}) = D(P)\psi(x) , & D(P) &= e^{i\phi}\gamma^0 \end{aligned} \quad (62)$$

dove la rappresentazione sugli spinori della trasformazione di parità, $D(P) = e^{i\phi}\gamma^0$, può contenere una fase arbitraria ϕ . Mostriamo che con queste trasformazioni l'equazione è invariante in forma

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\gamma^{\mu'} \tilde{\partial}'_{\mu'} + m)\tilde{\psi}(\tilde{x}) = 0 . \quad (63)$$

Infatti possiamo calcolare

$$\begin{aligned} (\gamma^{\mu'} \tilde{\partial}'_{\mu'} + m)\tilde{\psi}(\tilde{x}) &= (\gamma^0 \partial_0 - \gamma^i \partial_i + m)e^{i\phi}\gamma^0\psi(x) = e^{i\phi}\gamma^0(\gamma^0 \partial_0 + \gamma^i \partial_i + m)\psi(x) \\ &= e^{i\phi}\gamma^0(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi(x) \end{aligned} \quad (64)$$

per cui un'equazione in un sistema di riferimento implica l'altra nel sistema di riferimento con assi spaziali riflessi.

Molte delle proprietà degli spinori seguono dalle proprietà algebriche delle matrici gamma e per convenienza ne elenchiamo qui alcune

$$\begin{aligned} \gamma^{\mu\dagger} &= \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 & (\gamma^i \text{ hermitiane, } \gamma^0 \text{ antihermitiana}) \\ \gamma_5 &\equiv -i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 & \implies \{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0, \quad (\gamma_5)^2 = 1, \quad \gamma_5^\dagger = \gamma_5. \end{aligned} \quad (65)$$

Azione

Per scrivere l'azione conviene introdurre il coniugato di Dirac $\bar{\psi}$ del campo ψ , definito come

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \beta = \psi^\dagger i\gamma^0 \quad (66)$$

che ha la proprietà di trasformarsi in modo tale da rendere il prodotto $\bar{\psi}\psi$ uno scalare. Infatti dalla trasformazione infinitesima di Lorentz su uno spinore ψ (trascurando la dipendenza dalle coordinate dello spazio-tempo) si ottiene quella del suo coniugato di Dirac

$$\delta\psi = \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\psi \quad \longrightarrow \quad \delta\bar{\psi} = -\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\bar{\psi}M^{\mu\nu} \quad (67)$$

da cui si deduce che $\bar{\psi}\psi$ è uno scalare. L'azione è uno scalare ed è data da

$$S[\psi, \bar{\psi}] = \int d^4x \mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}), \quad \mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}) = -\bar{\psi}(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi. \quad (68)$$

Variando $\bar{\psi}$ e ψ ed usando il principio di minima azione si ottengono l'equazione di Dirac e la sua coniugata

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi(x) = 0, \quad \bar{\psi}(x)(\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu - m) = 0. \quad (69)$$

Come esercizio verifichiamo esplicitamente le trasformazioni di Lorentz di $\bar{\psi}$:

$$\begin{aligned} \delta\bar{\psi} &= \delta\psi^\dagger i\gamma^0 = \left(\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\psi\right)^\dagger i\gamma^0 = \left(\frac{1}{4}\omega_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi\right)^\dagger i\gamma^0 = \frac{1}{4}\omega_{\mu\nu}\psi^\dagger\gamma^{\nu\dagger}\gamma^{\mu\dagger}i\gamma^0 \\ &= \frac{1}{4}\omega_{\mu\nu}\psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\gamma^{\nu\dagger}\gamma^0\gamma^0\gamma^{\mu\dagger}i\gamma^0 = \frac{1}{4}\omega_{\mu\nu}(\psi^\dagger i\gamma^0)(\gamma^0\gamma^{\nu\dagger}\gamma^0)(\gamma^0\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0) = \frac{1}{4}\omega_{\mu\nu}\bar{\psi}\gamma^\nu\gamma^\mu \\ &= -\frac{1}{4}\omega_{\mu\nu}\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu = -\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\bar{\psi}M^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (70)$$

Simmetrie

Le simmetrie sotto il gruppo di Lorentz sono state già descritte sopra, mentre quelle addizionali per traslazioni spazio temporali sono immediate considerando il campo come uno scalare ($x \rightarrow x' = x + a$ con $\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = \psi(x)$). Da questa ultima si può ottenere il tensore energia-impulso come corrente di Noether.

Consideriamo in dettaglio la simmetria interna generata dalle trasformazioni di fase del gruppo $U(1)$

$$\begin{aligned} \psi(x) &\longrightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha}\psi(x) \\ \bar{\psi}(x) &\longrightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{-i\alpha}\bar{\psi}(x). \end{aligned} \quad (71)$$

È facile vedere che l'azione (68) è invariante. Per trasformazioni infinitesime

$$\begin{aligned} \delta\psi(x) &= i\alpha\psi(x) \\ \delta\bar{\psi}(x) &= -i\alpha\bar{\psi}(x) \end{aligned} \quad (72)$$

considerando un parametro locale $\alpha(x)$ si calcola

$$\delta S[\psi, \bar{\psi}] = \int d^4x \partial_\mu \alpha \underbrace{(-i\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)}_{-J^\mu} \quad (73)$$

da cui si verifica di nuovo la simmetria $U(1)$ (per α costante) e si ottiene la relativa corrente di Noether

$$J^\mu = i\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (74)$$

che è conservata $\partial_\mu J^\mu = 0$. In particolare la densità di carica conservata è definita positiva

$$J^0 = i\bar{\psi}\gamma^0\psi = i\psi^\dagger i\gamma^0\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi \geq 0 \quad (75)$$

e fu originariamente considerata da Dirac come una densità di probabilità.

Proprietà chirali

Analizziamo infine la riducibilità dello spinore di Dirac sotto il gruppo di Lorentz proprio ed ortocrono $SO^+(3, 1)$. Costruendo i proiettori

$$P_L = \frac{1 - \gamma_5}{2}, \quad P_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} \quad (76)$$

(sono proiettori poiché $P_L + P_R = 1$, $P_L^2 = P_L$, $P_R^2 = P_R$, $P_L P_R = 0$) possiamo dividere lo spinore di Dirac nelle sue componenti sinistrorse e destrorse (spinori di Weyl)

$$\psi = \psi_L + \psi_R, \quad \psi_L \equiv \frac{1 - \gamma_5}{2}\psi, \quad \psi_R \equiv \frac{1 + \gamma_5}{2}\psi \quad (77)$$

che sono le due rappresentazioni irriducibili del gruppo di Lorentz proprio ed ortocrono (nella teoria delle rappresentazioni abbiamo anticipato la presenza delle rappresentazioni irriducibili inequivalenti $(\frac{1}{2}, 0)$ e $(0, \frac{1}{2})$ che corrispondono agli spinori di Weyl, e descritto lo spinore di Dirac come la rappresentazione riducibile data dalla somma diretta $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$). Infatti i generatori infinitesimi delle trasformazioni di Lorentz $M^{\mu\nu}$ commutano con i proiettori P_L, P_R

$$P_{L/R}M^{\mu\nu} = \frac{1 \mp \gamma_5}{2} \left(-\frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \right) = \left(-\frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \right) \frac{1 \mp \gamma_5}{2} = M^{\mu\nu} P_{L/R} \quad (78)$$

e questo indica come lo spinore di Dirac sia riducibile nella sue parti destrorse e sinistrorse. L'operazione di parità (riflessione degli assi spaziali) trasforma un fermione sinistrorso in un fermione destrorso e viceversa. Infatti

$$\psi_L \xrightarrow{P} (\psi_L)' = \left(\frac{1 - \gamma_5}{2}\psi \right)' = e^{i\phi}\gamma^0 \frac{1 - \gamma_5}{2}\psi = \frac{1 + \gamma_5}{2} e^{i\phi}\gamma^0\psi = \frac{1 + \gamma_5}{2}\psi' = (\psi')_R. \quad (79)$$

È interessante scrivere l'azione in termini di queste componenti chirali irriducibili

$$S[\psi_L, \psi_R] = \int d^4x \left(-\bar{\psi}_L \not{\partial} \psi_L - \bar{\psi}_R \not{\partial} \psi_R - m(\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L) \right) \quad (80)$$

che mostra come una massa di Dirac m non possa essere presente per fermioni chirali (i.e. fermioni puramente sinistrorsi per cui $\psi_R = 0$ o puramente destrorsi per cui $\psi_L = 0$). I fermioni che entrano nel modello standard sono chirali e non possono avere masse di Dirac (per ragioni collegate all'invarianza di gauge). Masse di Dirac possono emergere come conseguenza del meccanismo di Higgs per la rottura spontanea della simmetria di gauge.

Propagatore

Quantizzando il campo di Dirac libero si ottiene il propagatore. Come nel caso del campo di Klein Gordon, il propagatore è collegato alla funzione di Green $S(x - y)$ dell'operatore differenziale descrivente l'equazione del moto libera $((\not{\partial}_x + m)S(x - y) = \delta^4(x - y))$. Il propagatore ha quindi la seguente forma

$$\langle \psi(x)\bar{\psi}(y) \rangle = -iS(x - y) = -i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ip \cdot (x-y)} \frac{-i\not{p} + m}{p^2 + m^2 - i\epsilon} \quad (81)$$

da cui segue, grazie alla prescrizione causale di Feynman $(-i\epsilon)$, la corretta interpretazione di fluttuazioni di particelle ed antiparticelle con energie positive che si propagano dal passato al futuro, proprio come nel caso delle particelle scalari.

3 Spin 1: equazioni di Maxwell e Proca

Proca

Particelle di spin 1 possono essere descritte da un campo vettoriale $A_\mu(x)$. Nel caso di particelle massive di massa m le equazioni libere sono conosciute come equazioni di Proca e sono derivabili dalla seguente azione

$$S_{Proca}[A_\mu] = \int d^4x \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu \right) \quad (82)$$

dove si è usata la definizione

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu . \quad (83)$$

Un'integrazione per parti permette di ottenere una forma alternativa dell'azione

$$S_{Pro}[A_\mu] = \int d^4x \left(-\frac{1}{2} \partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu + \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 - \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu \right) \quad (84)$$

simile all'azione di quattro campi di Klein Gordon (primo e terzo termine) ma con l'aggiunta cruciale del termine $(\partial_\mu A^\mu)^2$. Variando A_μ si ottengono le equazioni del moto

$$\frac{\delta S_{Pro}[A]}{\delta A^\nu(x)} \equiv \partial^\mu F_{\mu\nu} - m^2 A_\nu(x) = 0 . \quad (85)$$

Queste sono le equazioni di Proca. Possono essere scritte in una forma equivalente notando l'identità $\partial^\mu \partial^\nu F_{\mu\nu} = 0$ che implica

$$\partial^\mu \partial^\nu F_{\mu\nu} = m^2 \partial^\nu A_\nu(x) = 0 . \quad (86)$$

Quindi per $m \neq 0$ si ha il vincolo

$$\partial^\mu A_\mu = 0 . \quad (87)$$

Utilizzando questa relazione si possono scrivere le equazioni di Proca come quattro equazioni di Klein-Gordon con in più un vincolo

$$\begin{aligned} (\square - m^2) A_\mu &= 0 \\ \partial^\mu A_\mu &= 0 . \end{aligned} \quad (88)$$

Questo ci dice che dei quattro campi A_μ solo tre di essi sono indipendenti, e descrivono in modo covariante le tre polarizzazioni associate ad una particella di spin 1. L'invarianza dell'azione e delle equazioni del moto per trasformazioni di Lorentz

$$\begin{aligned} x^\mu &\longrightarrow x^{\mu'} = \Lambda^\mu{}_{\nu'} x^{\nu'} \\ A_\mu(x) &\longrightarrow A_{\mu'}(x') = (D(\Lambda))_{\mu'}{}^\nu A_\nu(x) = \Lambda_{\mu'}{}^\nu A_\nu(x) \end{aligned} \quad (89)$$

è manifesta: basta trasformare il campo A_μ nella rappresentazione quadrivettoriale come indicato dal suo indice.

Soluzioni

È facile trovare soluzioni di onda piana dell'equazione di Proca. Inserendo in (88) l'ansatz

$$A_\mu = \varepsilon_\mu(p) e^{ip \cdot x} \quad (90)$$

si trova che: (i) il momento p_μ deve soddisfare alla condizione di "mass shell" $p_\mu p^\mu = -m^2$ (prima equazione in (88)), (ii) una combinazione lineare delle quattro possibili polarizzazioni deve essere nulla, $p^\mu \varepsilon_\mu(p) = 0$ (seconda equazione in (88)). Le tre rimanenti polarizzazioni descrivono i tre gradi di libertà di una particella con spin 1. Soluzioni reali possono facilmente essere ottenute sommando con opportuni coefficienti di Fourier queste onde piane.

Propagatore

La quantizzazione per la teoria libera procede in modo semplice. Infatti la definizione dell'integrale funzionale non presenta problemi particolari. È quindi facile ottenere il propagatore

$$\langle A_\mu(x) A_\nu(y) \rangle = -i G_{\mu\nu}(x-y) = -i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ip \cdot (x-y)} \underbrace{\left(\frac{\eta_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m^2}}{p^2 + m^2 - i\epsilon} \right)}_{\tilde{G}_{\mu\nu}(p)} \quad (91)$$

dove si è fatto uso della funzione di Green $G_{\mu\nu}(x-y)$ dell'operatore differenziale $K^{\mu\nu}(\partial) \equiv (-\square + m^2)\eta^{\mu\nu} + \partial^\mu \partial^\nu$ che soddisfa

$$K^{\mu\nu}(\partial_x) G_{\nu\lambda}(x-y) = \delta_\lambda^\mu \delta^4(x-y) . \quad (92)$$

Tale funzione di Green è facilmente ottenibile in trasformata di Fourier, poichè per simmetria la funzione $\tilde{G}(p)$ in (91) deve avere una struttura della forma

$$\tilde{G}_{\mu\nu}(p) = A(p)\eta_{\mu\nu} + B(p)p_\mu p_\nu \quad (93)$$

ed imponendo la (92) si ottiene facilmente

$$A(p) = \frac{1}{p^2 + m^2}, \quad B(p) = \frac{1}{m^2} A(p). \quad (94)$$

Tale propagatore descrive la propagazione di particelle (ed antiparticelle) reali e virtuali, come nel caso delle particelle di spin 0. Si noti che la polarizzazione longitudinale $\epsilon_\mu(p) \sim p_\mu$ non si propaga ma genera solo effetti di contatto (cioè proporzionali ad una delta di Dirac).

Maxwell

Per $m \rightarrow 0$ l'azione di Proca si riduce all'azione di Maxwell che descrive particelle di massa nulla e spin 1 (elicità 1)

$$S_{Max}[A_\mu] = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \quad (95)$$

le equazioni del moto ora sono

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0 \quad (96)$$

e corrispondono a metà delle equazioni di Maxwell nel vuoto. L'altra metà delle equazioni di Maxwell sono automaticamente soddisfatte dalla relazione

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (97)$$

che infatti soddisfa alle identità di Bianchi

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \quad (98)$$

corrispondenti alle equazioni di Maxwell mancanti. Infatti sostituendo (97) in (98) si vede che tutti i termini si cancellano due a due. Questa equazione può essere scritta anche in una forma equivalente usando il tensore completamente antisimmetrico $\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \partial_\nu F_{\lambda\rho} = 0. \quad (99)$$

La novità di questa formulazione di particelle massless di spin 1 è la presenza di una simmetria di gauge

$$\delta A_\mu(x) = \partial_\mu \lambda(x) \quad (100)$$

che implica che l'azione descriva non tre ma solo due gradi di libertà: gli stati di spin massimo e minimo lungo la direzione del moto (elicità).

Equazioni di Maxwell

Accoppiando il campo A_μ ad una sorgente di carica conservata J^μ ($\partial_\mu J^\mu = 0$) si ha l'azione

$$S_{Max}[A_\mu] = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + A_\mu J^\mu \right) \quad (101)$$

da cui si ottengono le equazioni di Maxwell con sorgente

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = -J_\nu \quad (102)$$

La conservazione della corrente è necessaria per la consistenza delle equazioni di Maxwell. Infatti

$$\partial^\mu \partial^\nu F_{\mu\nu} = 0 \quad \implies \quad \partial^\nu J_\nu = 0. \quad (103)$$

Esplicitiamo queste equazioni separando gli indici in parti spaziali e parti temporali. Ponendo

$$\begin{aligned} A^\mu &= (A^0, \vec{A}) = (\phi, \vec{A}), & A_\mu &= (-\phi, \vec{A}) \\ J^\mu &= (\rho, \vec{J}), & \partial_\mu J^\mu &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \\ F_{0i} &= \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = \partial_t A_i + \partial_i \phi = -E_i \\ F_{ij} &= \partial_i A_j - \partial_j A_i = \epsilon_{ijk} B_k \end{aligned} \quad (104)$$

per cui il tensore campo elettromagnetico si può scrivere (in unità di Heaviside-Lorentz) come

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (105)$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \partial^\mu F_{\mu 0} = -J_0 &\longrightarrow \partial^i F_{i0} = \rho &\longrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \\ \partial^\mu F_{\mu i} = -J_i &\longrightarrow \partial^j F_{ji} + \partial^0 F_{0i} = -J_i &\longrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} - \partial_t \vec{E} = \vec{J} \end{aligned} \quad (106)$$

che riconosciamo come le equazioni di Maxwell con sorgenti. Le altre equazioni di Maxwell (quelle senza sorgenti)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (107)$$

sono similmente contenute in (98).

Soluzioni

Le equazioni del moto non hanno una soluzione univoca (anche fissando opportune condizioni iniziali) a causa della simmetria di gauge. Si può utilizzare l'invarianza di gauge per fissare delle condizioni (condizioni di gauge fixing) che permettono di trovare soluzioni inequivalenti per trasformazioni di gauge.

Scegliamo di fissare il gauge imponendo la condizione di Lorenz

$$\partial^\mu A_\mu = 0 \quad (108)$$

che può essere sempre imposta. Con questo vincolo le equazioni del moto libere si semplificano e diventano

$$\square A_\mu = 0 \quad (109)$$

le cui soluzioni di onda piana sono

$$A_\mu(x) = \varepsilon_\mu(p) e^{ip \cdot x}, \quad p_\mu p^\mu = 0, \quad p_\mu \varepsilon^\mu(p) = 0 \quad (110)$$

e contiene 3 polarizzazioni indipendenti. Di queste tre polarizzazioni, quella longitudinale ($\varepsilon_\mu(p) = p_\mu$) può essere rimossa usando le trasformazioni di gauge residue, cioè quelle trasformazioni di gauge che lasciano invariata la condizione di Lorenz (108). Rimangono quindi solo due polarizzazioni fisiche indipendenti che corrispondono alle due possibili elicità del fotone (elicità = proiezione dello spin lungo la direzione del moto).

Si potrebbero discutere anche le soluzioni in presenza di sorgenti esterne prefissate J_μ . Anche qui c'è la complicazione dovuta alla simmetria di gauge. In assenza di simmetrie di gauge la soluzione formale può essere ottenuta usando la corrispondente funzione di Green (ritardata, anticipata o con le condizioni causali di Feynman, scelta che dipende dalle condizioni al contorno imposte al problema): infatti la funzione di Green rappresenta la soluzione elementare corrispondente ad una sorgente puntiforme localizzata nel tempo e nello spazio (delta di Dirac):

$$\begin{aligned} D(\partial_x)\phi(x) &= J(x) && \text{(eq. del moto)} \\ D(\partial_x)G(x-y) &= \delta^4(x-y) && \text{(funz. di Green)} \\ \phi(x) &= \int d^4y G(x-y)J(y) && \text{(soluzione formale)} \end{aligned}$$

La complicazione dovuta alle simmetrie di gauge è associata al fatto che la funzione di Green non è univoca, infatti le equazioni del moto anche in presenza di condizioni al contorno non sono univocamente risolte (infatti si possono fare trasformazioni di gauge dipendenti dal tempo che non modificano gli osservabili fisici). Abbiamo già visto che la simmetria di gauge implica un vincolo sulle correnti esterne J_μ (devono necessariamente essere conservate $\partial^\mu J_\mu = 0$). In genere occorre fissare un gauge, cioè imporre delle condizioni aggiuntive sulle variabili dinamiche, in modo tale che la soluzione sia unica una volta fissate le condizioni al contorno. Qui sopra abbiamo brevemente discusso il gauge di Lorenz $\partial^\mu A_\mu = 0$ che ha la proprietà di essere manifestamente Lorenz invariante, però non fissa completamente il gauge. Una condizione più restrittiva è il gauge di Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ che fissa completamente il gauge ma non è invariante di Lorenz (in altri sistemi inerziali i potenziali di gauge soddisfano relazioni di gauge fixing diverse, anche

se il campo elettromagnetico $F_{\mu\nu}$ rimane sempre come un tensore di rango due). Ricordiamo brevemente alcune conseguenze del gauge di Coulomb ($\partial_i A^i = 0$):

$$\square A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) = -J^\mu \rightarrow \begin{cases} \square A^0 - \partial^0(\partial_0 A^0) = -J^0 \\ \square A^i - \partial^i(\partial_0 A^0) = -J^i \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \nabla^2 A^0 = -\rho \\ \square A^i = -J^i + \partial^i \partial_0 A^0 \end{cases} \quad (111)$$

da cui

$$\begin{cases} A^0(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3 y}{4\pi |\vec{x}-\vec{y}|} \rho(t, y) \\ \square A^i(t, \vec{x}) = -J^i(t, \vec{x}) + \partial_{(x)}^i \int \frac{d^3 y}{4\pi |\vec{x}-\vec{y}|} \partial_t \rho(t, y) \end{cases} \quad (112)$$

(si noti che abbiamo usato la relazione $\nabla_{(x)}^2 \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} = -4\pi \delta^3(\vec{x}-\vec{y})$).

Potenziale dovuto allo scambio di una particella di spin 1

Generalizziamo il potenziale di Yukawa al caso in cui la particella scambiata che genera il potenziale abbia spin 1 e sia massiva. L'azione efficace in presenza di sorgenti esterne J_μ è data da

$$W[J^\mu] = \frac{1}{2} \int d^4 x d^4 y J^\mu(x) G_{\mu\nu}(x-y) J^\nu(y) \quad (113)$$

che generalizza il caso scalare descritto precedentemente in eq. (29). Consideriamo sorgenti statiche con $J^\mu = (J^0, 0, 0, 0)$ e

$$J^0(x) = e_1 \delta^3(\vec{x} - \vec{r}) + e_2 \delta^3(\vec{x}) . \quad (114)$$

Calcolando l'azione efficace che descrive l'interazione tra la carica e_1 e la carica e_2 mediata dal campo massivo di spin 1 A_μ otteniamo

$$\begin{aligned} W[e_1, e_2] &= \int d^4 x d^4 y e_1 \delta^3(\vec{x} - \vec{r}) G_{00}(x-y) e_2 \delta^3(\vec{y}) \\ &= - \int dt e_1 e_2 \frac{e^{-mr}}{4\pi r} \end{aligned} \quad (115)$$

dove abbiamo usato la funzione di Green in (91). Si noti la differenza di segno rispetto al caso scalare che è dovuta ad $\eta_{00} = -1$. Il risultato finale corrisponde al seguente potenziale d'interazione tra le due cariche ($L = T - V$)

$$V(r) = \frac{e_1 e_2}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r} . \quad (116)$$

Questo è un potenziale repulsivo tra cariche dello stesso segno. Il limite $m \rightarrow 0$ corrisponde al potenziale di Coulomb.