

Equazioni d'onda relativistiche

(Appunti per il corso di Fisica Teorica - 2011/12)

Fiorenzo Bastianelli

1 Introduzione

L'equazione di Schrödinger è un'equazione d'onda che descrive la meccanica quantistica di particelle non relativistiche. Il tentativo di generalizzare questa equazione al caso relativistico portò alla formulazione di varie equazioni d'onda (Klein-Gordon, Dirac, Proca-Maxwell, etc.). Purtroppo risultò subito chiaro che queste equazioni d'onda relativistiche presentavano diversi problemi interpretativi: alcune non ammettevano un'ovvia interpretazione probabilistica e tutte includevano stati di singola particella con energie negative. Queste equazioni, oggi denominate "equazioni d'onda di prima quantizzazione, possono essere reinterpretate come campi "classici" che devono a loro volta essere quantizzati (da qui il nome di "seconda quantizzazione" dato alla teoria quantistica dei campi). Tutti i problemi interpretativi sopra menzionati sono risolti nell'ambito della teoria quantistica dei campi. Ciononostante, diversi problemi possono essere trattati efficacemente, ed in maniera più semplice, nell'ambito della prima quantizzazione.

Le diverse equazioni d'onda relativistiche corrispondono alla meccanica quantistica di particelle con determinata massa e spin. Ad esempio, l'equazione di Klein-Gordon è un'equazione relativistica che descrive particelle scalari, cioè con spin $s = 0$. È indubbiamente l'equazione relativistica più semplice, ma poiché tiene conto della corretta relazione relativistica tra energia ed impulso essa contiene già l'essenza di tutte le equazioni relativistiche (come l'apparente presenza di soluzioni con energie negative, da reinterpretare come antiparticelle con energia positiva). Le equazioni d'onda corrette per descrivere particelle con spin s dipende in modo essenziale dal valore dello spin e sono conosciute come segue:

- spin 0 → equazione di Klein-Gordon
- spin $\frac{1}{2}$ → equazione di Dirac
- spin 1 senza massa → equazioni (libere) di Maxwell
- spin 1 massiva → equazioni di Proca
- spin $\frac{3}{2}$ → equazione di Rarita-Schwinger
- spin 2 → equazioni di Pauli-Fierz (equazioni di Einstein linearizzate).

In generale particelle relativistiche sono classificate da massa m e spin s , dove il valore dello spin indica che ci sono in generale $2s + 1$ componenti fisiche indipendenti della funzione d'onda, a meno che $m = 0$, nel qual caso esistono solo due componenti fisiche (collegate all'elicità, definita come proiezione dello spin lungo la direzione del moto).

Qui di seguito, dopo un breve richiamo all'equazione di Schrödinger, vengono descritte alcune proprietà delle equazioni di Klein Gordon e di Dirac.

2 Equazione di Schrödinger

Dopo l'introduzione del quanto d'azione h da parte di Planck nel 1900 e l'uso che ne fece Einstein nel 1905 nello spiegare l'effetto fotoelettrico (fotoni con energia $E = h\nu$), e dopo che Bohr nel 1913 propose il suo modello atomico con livelli di energia quantizzati, rimaneva

ancora da capire quali leggi fondamentali potessero organizzare e sistematizzare quanto andava emergendo nello studio dei fenomeni atomici e nucleari, cioè quali fossero le vere leggi della meccanica quantistica. Un contributo importante venne da de Broglie, che nel 1923 suggerì un'estensione dell'idea di Einstein congetturando un comportamento ondulatorio per particelle di materia, assegnando una lunghezza d'onda $\lambda = \frac{h}{p}$ a particelle con momento p . Questa visione rese interpretabile l'assunzione di Bohr di livelli energetici atomici quantizzati come i soli possibili per l'elettrone, perché corrispondenti a traiettorie contenenti un numero intero di lunghezze d'onda dell'elettrone, quindi stabili per interferenza costruttiva. de Broglie si ispirò per questa sua idea alla meccanica relativistica: un campo d'onda piana con frequenza $\nu = \frac{1}{T}$ (dove T è il periodo) e con numero d'onda \vec{k} (con $|\vec{k}| = \frac{1}{\lambda}$, dove λ è la lunghezza d'onda) ha la forma

$$\psi(\vec{x}, t) \sim e^{2\pi i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \nu t)} . \quad (1)$$

Assumendo che la fase $2\pi(\vec{k} \cdot \vec{x} - \nu t)$ fosse un invariante di Lorentz, e sapendo che le coordinate spazio-temporali (\vec{x}, t) formano un quadrivettore, de Broglie dedusse che anche (\vec{k}, ν) doveva essere un quadrivettore, e quindi trasformarsi per cambio di sistema di riferimento inerziale come (\vec{x}, t) o (\vec{p}, E) . Poiché nel caso dei fotoni valeva $E = h\nu$, risultò naturale assumere una proporzionalità tra i quadrivettori (\vec{k}, ν) e (\vec{p}, E) per particelle materiali con la stessa costante di proporzionalità h valida per i fotoni

$$\vec{p} = h\vec{k} , \quad E = h\nu \quad (2)$$

e cioè $\lambda = \frac{h}{|\vec{p}|}$ come lunghezza d'onda per particelle di materia con momento \vec{p} . Quindi un'onda piana associata a particelle libere materiali, con determinati energia ed impulso, deve assumere la forma

$$\psi(\vec{x}, t) \sim e^{2\pi i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \nu t)} = e^{\frac{2\pi i}{h}(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)} = e^{\frac{i}{h}(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)} . \quad (3)$$

A questo punto Schrödinger si chiese: che tipo di equazione soddisfa tale funzione? Iniziò direttamente con il caso relativistico, ma siccome non gli fu possibile riprodurre alcuni risultati sperimentali per l'atomo d'idrogeno, si accontentò del limite non-relativistico che sembrava funzionare meglio (oggi sappiamo che alcune correzioni relativistiche sono parzialmente compensate da effetti dovuti allo spin dell'elettrone, di cui non si teneva conto). Per una particella libera non-relativistica vale $E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$, quindi la funzione d'onda (3) soddisfa

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = E\psi(\vec{x}, t) = \frac{\vec{p}^2}{2m} \psi(\vec{x}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{x}, t) \quad (4)$$

e risolve l'equazione differenziale

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{x}, t) \quad (5)$$

che è detta equazione di Schrödinger libera. Questo esempio suggerisce che la prescrizione per ottenere una equazione d'onda dal modello classico di particella libera è il seguente:

- considerare la relazione classica tra energia ed impulso $E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$
- sostituire $E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ e $\vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}$
- interpretare questi operatori differenziali come agenti su una funzione d'onda ψ :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{x}, t) .$$

Naturalmente Schrödinger estese queste sue considerazioni ad una particella immersa nel campo coulombiano di un nucleo per dedurre analiticamente le conseguenze della meccanica quantistica ondulatoria e riprodurre alcuni risultati sperimentali oltre che il modello atomico di Bohr, ottenendo un notevole successo.

Seppur dedotta originariamente dal limite non-relativistico di una particella puntiforme, quando scritta nella forma

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi \quad (6)$$

con H l'operatore hamiltoniano, l'equazione di Schrödinger acquista una validità universale per la descrizione di sistemi quantistici.

Conservazione della probabilità. Se una particella non-relativistica è descritta da una funzione d'onda normalizzabile $\psi(\vec{x}, t)$ (l'onda piana non è normalizzabile, per cui occorre considerare pacchetti d'onda), allora si può interpretare la grandezza $\rho(\vec{x}, t) = |\psi(\vec{x}, t)|^2$ come densità di probabilità di trovare la particella nel punto \vec{x} al tempo t . In particolare, si può provare che ρ soddisfa una equazione di continuità della forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (7)$$

con una opportuna corrente \vec{J} . Questo equivale alla conservazione della probabilità di trovare la particella da qualche parte nello spazio ad ogni istante di tempo. In particolare la particella non-relativistica non può essere creata né distrutta. Questo è comprensibile pensando al limite non-relativistico di una particella relativistica, limite formalmente ottenuto mandando $c \rightarrow \infty$ (velocità limite di propagazione delle interazioni molto grande, tendente all'infinito come limite matematico): infatti dalla formula relativistica dell'energia

$$E = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4} = mc^2 \sqrt{1 + \frac{\vec{p}^2}{m^2 c^2}} \implies mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m} + \dots \quad (8)$$

si vede che per $c \rightarrow \infty$ occorrerebbe un'energia infinita per creare una particella di massa m .

3 Spin 0: il campo scalare di Klein Gordon

L'equazione di Klein-Gordon può essere ottenuta dalla prima quantizzazione di una particella relativistica. Però il campo di Klein-Gordon non ammette una interpretazione probabilistica come nel caso della funzione d'onda dell'equazione di Schroedinger. La consistenza con la meccanica quantistica sarà recuperata trattando il campo di Klein-Gordon come un campo dinamico classico descrivente un numero infinito di gradi di libertà (che successivamente dovrà essere quantizzato, esattamente come nel caso del campo elettromagnetico che storicamente fu il primo esempio di campo quantizzato) e non come funzione d'onda quantistica. Spesso ci si riferisce alla quantizzazione del campo come alla seconda quantizzazione. Con la seconda quantizzazione il campo di Klein-Gordon permette di descrivere un numero arbitrario di particelle ed antiparticelle identiche di spin zero. Ciononostante, anche rimanendo nell'ambito della prima quantizzazione, l'equazione di Klein-Gordon permette di ottenere molte informazioni sulla meccanica quantistica di particelle di spin 0.

Equazione d'onda libera

Come ottenere una equazione d'onda relativistica? Un'idea semplice è quella di usare la corretta relazione relativistica tra energia ed impulso. Sappiamo che per una particella relativistica di massa m vale

$$p_\mu p^\mu = -m^2 c^2 \quad \Longrightarrow \quad -\frac{E^2}{c^2} + \vec{p}^2 = -m^2 c^2 \quad \Longrightarrow \quad E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (9)$$

Quindi si potrebbe pensare di usare $E = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$, ma l'equazione che emerge con le sostituzioni $E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ e $\vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}$ produce un'equazione complicatissima e di difficile interpretazione, contenente una radice quadrata di operatori differenziali

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{x}, t) = \sqrt{-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4} \phi(\vec{x}, t). \quad (10)$$

Klein e Gordon proposero una equazione più semplice considerando la relazione quadratica tra energia ed impulso, che ha il pregio di non contenere nessuna radice quadrata. Partendo da $E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$, ed usando $E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ e $\vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}$, ottennero l'equazione

$$\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi(\vec{x}, t) = 0 \quad (11)$$

conosciuta oggi come equazione di Klein-Gordon. In notazioni relativistiche si può scrivere come

$$(\partial_\mu \partial^\mu - \mu^2) \phi(x) = 0, \quad \mu \equiv \frac{mc}{\hbar}. \quad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (12)$$

ed anche come

$$(\square - \mu^2) \phi(x) = 0 \quad (13)$$

dove $\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2$ indica l'operatore di d'Alembert (il d'alembertiano). Secondo Dirac, Schrödinger considerò questa equazione ancor prima di dedurre la sua equazione, ma insoddisfatto dei risultati che sembrava produrre per l'atomo d'idrogeno, si accontentò del suo limite non relativistico. Quando più tardi si decise a pubblicarla, era già stato preceduto da Klein e Gordon. Per semplicità notazionale useremo da ora in poi unità di misura con $\hbar = c = 1$.

Equazione di continuità

Dall'equazione di KG si può facilmente derivare un'equazione di continuità. Quest'ultima però non sarà interpretabile come dovuta alla conservazione di una probabilità, come nel caso dell'eq. di Schrödinger. Vediamo i dettagli di questa affermazione.

Un modo di ottenere l'equazione di continuità annunciata è quello di prendere l'equazione di KG moltiplicata per il campo d'onda complesso coniugato ϕ^* , sottraendone l'equazione complesso coniugata moltiplicata per ϕ . Si ottiene

$$0 = \phi^* (\square - m^2) \phi - \phi (\square - m^2) \phi^* = \partial^\mu (\phi^* \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \phi^*). \quad (14)$$

La corrente definita da

$$J_\mu = \frac{\hbar}{2im} (\phi^* \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \phi^*) \quad (15)$$

soddisfa quindi ad una equazione di continuità ($\partial_\mu J^\mu = 0$), ma la componente temporale

$$J^0 = \frac{i\hbar}{2m} (\phi^* \partial_0 \phi - \phi \partial_0 \phi^*) \quad (16)$$

sebbene reale, non è definita positiva. Infatti può assumere valori sia positivi che negativi (questo è deducibile dal fatto che si possono fissare liberamente sia i valori del campo che le sue derivate temporali come condizioni iniziali, essendo l'eq. di KG un'equazione del secondo grado nelle derivate temporali). Di conseguenza la corrispondente grandezza conservata non può essere associata ad una probabilità, che deve necessariamente essere definita positiva.

Soluzioni

Per costruzione le onde piane con la corretta relazione tra energia ed impulso sono soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon. Possiamo facilmente riderivare queste soluzioni da un'analisi diretta dell'equazione. Si possono cercare soluzioni di onda piana del tipo

$$\phi(x) \sim e^{ip_\mu x^\mu} \quad (17)$$

che inserite in (36) producono

$$-(p^\mu p_\mu + m^2) e^{ip_\nu x^\nu} = 0. \quad (18)$$

L'onda piana è quindi una soluzione se il quadrimomento p_μ soddisfa la condizione di mass-shell

$$p^\mu p_\mu = -m^2 \quad (19)$$

che è risolta da

$$(p^0)^2 = \vec{p}^2 + m^2 \quad \Longrightarrow \quad p^0 = \pm \underbrace{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}}_{E_p} = \pm E_p \quad (20)$$

(se si cerca di interpretare $\phi(x)$ come una funzione d'onda, oltre alle soluzioni con energia positiva $p^0 = E_p$ sono presenti anche soluzioni con energia negativa $p^0 = -E_p$, che saranno poi reinterpretate come dovute alle antiparticelle). Tutte le soluzioni sono quindi indicizzate dal valore del momento spaziale $\vec{p} \in R^3$, oltre che dal segno di $p^0 = \pm E_p$. Una soluzione generale si può quindi scrivere come combinazione lineare di onde piane

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left(a(\vec{p}) e^{-iE_p t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} + b^*(\vec{p}) e^{iE_p t - i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) \quad (21)$$

e relativo complesso coniugato

$$\phi^*(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left(b(\vec{p}) e^{-iE_p t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a^*(\vec{p}) e^{iE_p t - i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) \quad (22)$$

Per campi reali ($\phi^* = \phi$) i coefficienti di Fourier $a(\vec{p})$ e $b(\vec{p})$ coincidono, $a(\vec{p}) = b(\vec{p})$.

Potenziale di Yukawa

Consideriamo ora l'eq. di KG in presenza di una sorgente puntiforme statica

$$(\square - m^2)\phi(x) = g\delta^3(\vec{x}) \quad (23)$$

dove la sorgente puntiforme è localizzata nell'origine degli assi cartesiani e la costante g indica il valore della carica (l'intensità con si accoppia al campo d'onda di KG). Siccome la sorgente è statica, possiamo cercare una soluzione indipendente dal tempo, per cui l'equazione si semplifica

$$(\vec{\nabla}^2 - m^2)\phi(\vec{x}) = g\delta^3(\vec{x}) \quad (24)$$

Questa equazione può essere risolta con una trasformata di Fourier. Si ottiene così il potenziale di Yukawa

$$\phi(\vec{x}) = -\frac{g}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r}. \quad (25)$$

Per derivarlo, si può scrivere la soluzione in trasformata di Fourier

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tilde{\phi}(\vec{k}) \quad (26)$$

e tenendo conto della trasformata di Fourier della delta di Dirac (che è una distribuzione o “funzione generalizzata”)

$$\delta^3(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad (27)$$

si trova subito che

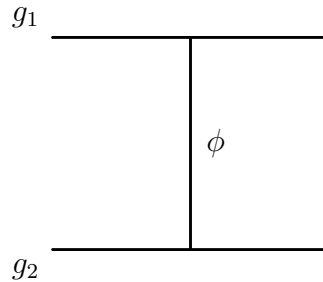
$$\tilde{\phi}(\vec{k}) = -\frac{g}{\vec{k}^2 + m^2} \quad (28)$$

Un calcolo diretto, in coordinate sferiche e con l’uso del teorema dei residui per percorsi chiusi nel piano complesso, produce immediatamente

$$\phi(\vec{x}) = -g \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{\vec{k}^2 + m^2} = -\frac{g}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r}. \quad (29)$$

Questo è un potenziale che risulta essere attrattivo tra cariche dello stesso segno, con raggio d’azione $\lambda = \frac{1}{m}$ corrispondente alla lunghezza d’onda Compton di una particella di massa m .

Il grafico che descrive l’interazione tra una carica g_1 ed una carica g_2 mediato dal campo di KG (interpretato come uno scambio di un quanto virtuale del campo scalare) è dato dal seguente diagramma di Feynman



e corrisponde al seguente potenziale d’interazione tra le due cariche

$$V(r) = -\frac{g_1 g_2}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r}. \quad (30)$$

Nel 1935 Yukawa introdusse una simile particella scalare per descrivere le forze nucleari e la chiamò mesone. Con una stima dell’ordine di $\lambda \sim \frac{1}{3}$ fm si ottiene una massa $m \sim 150$ MeV, ed infatti il mesone π^0 (detto anche pione), che fu successivamente scoperto studiando le interazioni dei raggi cosmici, ha una massa di questo ordine di grandezza $m_{\pi^0} \sim 135$ MeV.

Funzione di Green e propagatore

La funzione di Green dell’equazione di KG assume una particolare importanza nella interpretazione quantistica ed è associata al cosiddetto propagatore (propaga un quanto da un

punto dello spazio tempo ad un'altro punto). La funzione di Green è definita come la soluzione dell'equazione di KG in presenza di una sorgente puntiforme ed istantanea di carica unitaria localizzata nell'origine del sistema di coordinate che descrive lo spazio-tempo, ed è indicata con $G(x)$. In formule

$$(\square - m^2)G(x) = \delta^4(x) . \quad (31)$$

Si noti che conoscendo la funzione di Green $G(x)$, si può ottenere una soluzione dell'equazione non omogenea di KG

$$(-\square + \mu^2)\phi(x) = J(x) \quad (32)$$

con $J(x)$ sorgente arbitraria come

$$\phi(x) = \phi_0(x) + \int d^4y G(x - y)J(y) . \quad (33)$$

con $\phi_0(x)$ soluzione dell'equazione omogenea associata. Questo si verifica facilmente inserendo (33) in (32) ed usando la proprietà (31).

In generale la funzione di Green non è unica per equazioni iperboliche, ma dipende dalle condizioni iniziali imposte. Nell'interpretazione quantistica si usano le condizioni causali di Feynman-Stuckelberg, che prevede che si progaghino avanti nel tempo le sole frequenze positive, ed indietro nel tempo le rimanenti frequenze negative. In trasformata di Fourier la soluzione si scrive come

$$G(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ip_\mu x^\mu} \tilde{G}(p) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip_\mu x^\mu}}{p^2 + m^2 - i\epsilon} \quad (34)$$

dove $\epsilon \rightarrow 0^+$ è un parametro infinitesimo positivo che implementa le condizioni al contorno (prescrizione causale di Feynman-Stuckelberg). In una interpretazione particellare descrive sia la propagazione di “particelle reali” che gli effetti di “particelle virtuali”, identificate con i quanti del campo scalare. Queste particelle possono propagarsi a distanze macroscopiche solo se vale la relazione $p^2 = -m^2$ (il polo che compare nell'integrando compensa gli effetti di interferenza distruttiva dell'integrale di Fourier sulle onde piane) e sono dette “particelle reali”. Gli effetti quantistici dovuti alle fluttuazioni con $p^2 \neq -m^2$ sono invece considerati come dovuti a “particelle virtuali” che non sono visibili come stati asintotici (cioè su distanze macroscopiche e sono “nascoste” dal principio di indeterminazione).

Come anticipato, la prescrizione $i\epsilon$ per spostare i poli dell'integrando corrisponde ad una scelta ben precisa delle condizioni al contorno da dare alla funzione di Green: corrisponde a propagare in avanti nel tempo le onde piane con energia positiva ($p^0 = E_p$), mentre propaga indietro nel tempo le fluttuazioni con energia negativa ($p^0 = -E_p$). Questa prescrizione è anche detta causale, perchè non permette la propagazione nel futuro di stati ad energia negativa. Tali particelle con energia negativa che si propagano indietro nel tempo sono interpretate come antiparticelle con energia positiva che si propagano avanti nel tempo. Vediamo esplicitamente come questo emerge matematicamente dal calcolo dell'integrale in p^0 del propagatore, che mostra anche come il campo libero si possa interpretare come una collezione di oscillatori armonici. Per convenzione il propagatore $\Delta(x - y)$ è $(-i)$ volte la funzione di Green $G(x - y)$,

ed otteniamo

$$\begin{aligned}
\Delta(x-y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-i}{p^2 + m^2 - i\epsilon} e^{ip \cdot (x-y)} \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x}-\vec{y})} \int \frac{dp^0}{2\pi} e^{-ip^0(x^0-y^0)} \frac{i}{(p^0 - E_p + i\epsilon')(p^0 + E_p - i\epsilon')} \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x}-\vec{y})} \left[\theta(x^0 - y^0) \frac{e^{-iE_p(x^0-y^0)}}{2E_p} + \theta(y^0 - x^0) \frac{e^{-iE_p(y^0-x^0)}}{2E_p} \right] \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x}-\vec{y})} \frac{e^{-iE_p|x^0-y^0|}}{2E_p} \tag{35}
\end{aligned}$$

dove $E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ ed $\epsilon \sim \epsilon' \rightarrow 0^+$. Gli integrali sono stati fatti usando l'integrazione su un circuito del piano complesso p^0 , scegliendo di chiudere il circuito sul semicerchio di raggio infinito che dà un contributo nullo e valutando l'integrale col teorema dei residui). Ricordando la forma del propagatore dell'oscillatore armonico si vede come il campo possa essere interpretato come una collezione infinita di oscillatori armonici con frequenza E_p .

Azione

L'equazione di Klein-Gordon per un campo scalare complesso $\phi(x)$ (in unità di misura con $\hbar = c = 1$) è data da

$$(\square - m^2)\phi(x) = 0 \tag{36}$$

dove $\square \equiv \partial^\mu \partial_\mu$ è l'operatore differenziale di d'Alembert. Questa equazione può essere convenientemente ottenuta da un principio d'azione

$$S[\phi, \phi^*] = \int d^4x \left(-\partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \right). \tag{37}$$

Variando indipendentemente ϕ e ϕ^* ed imponendo il principio di minima azione si ottengono le equazioni del moto:

$$\frac{\delta S[\phi, \phi^*]}{\delta \phi^*(x)} = (\square - m^2)\phi(x) = 0, \quad \frac{\delta S[\phi, \phi^*]}{\delta \phi(x)} = (\square - m^2)\phi^*(x) = 0. \tag{38}$$

Per un campo scalare reale $\phi^* = \phi$, l'azione convenientemente normalizzata è data da

$$S[\phi] = \int d^4x \left(-\frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi \phi \right) \tag{39}$$

da cui

$$\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(x)} = (\square - m^2)\phi(x) = 0. \tag{40}$$

Simmetrie

Il campo complesso di Klein-Gordon libero (cioè senza interazioni) possiede simmetrie rigide generate dal gruppo di Poincaré (simmetrie di spazio-tempo) e simmetrie rigide per trasformazioni di fase generate dal gruppo $U(1)$ (simmetrie interne).

La simmetria $U(1)$ è data da

$$\begin{aligned}\phi(x) &\longrightarrow \phi'(x) = e^{i\alpha}\phi(x) \\ \phi^*(x) &\longrightarrow \phi^{*'}(x) = e^{-i\alpha}\phi^*(x)\end{aligned}\quad (41)$$

ed è facile vedere che l'azione (37) è invariante. Per trasformazioni infinitesime

$$\begin{aligned}\delta\phi(x) &= i\alpha\phi(x) \\ \delta\phi^*(x) &= -i\alpha\phi^*(x).\end{aligned}\quad (42)$$

Considerando il parametro locale, $\alpha \rightarrow \alpha(x)$, si calcola

$$\delta S[\phi, \phi^*] = \int d^4x \partial_\mu \alpha \underbrace{\left(i\phi^* \partial^\mu \phi - i(\partial^\mu \phi^*) \phi \right)}_{J^\mu} \quad (43)$$

da cui verifichiamo di nuovo la simmetria $U(1)$ (per α costante), ottenendo allo stesso tempo la relativa corrente di Noether

$$J^\mu = i\phi^* \partial^\mu \phi - i(\partial^\mu \phi^*) \phi \equiv i\phi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi \quad (44)$$

che soddisfa un'equazione di continuità, $\partial_\mu J^\mu = 0$. La corrispondente carica conservata

$$Q \equiv \int d^3x J^0 = -i \int d^3x \phi^* \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi \quad (45)$$

non è definita positiva: come già descritto non può essere interpretata come una probabilità come nel caso delle soluzioni dell'equazione di Schroedinger. Più in generale si può definire un prodotto scalare tra due soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon χ e ϕ come

$$\langle \chi | \phi \rangle \equiv \int d^3x i\chi^* \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi. \quad (46)$$

Questo prodotto scalare è conservato grazie alle equazioni del moto, ma non è interpretabile come ampiezza di probabilità.

Le trasformazioni generate dal gruppo di Poincaré

$$\begin{aligned}x^\mu &\longrightarrow x^{\mu'} = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \\ \phi(x) &\longrightarrow \phi'(x') = \phi(x) \\ \phi^*(x) &\longrightarrow \phi^{*'}(x') = \phi^*(x)\end{aligned}\quad (47)$$

trattano il campo di Klein-Gordon come uno scalare. È facile verificare l'invarianza dell'azione sotto queste trasformazioni finite. Consideriamo in particolare il caso di traslazioni spaziotemporali infinitesime, che possiamo scrivere come

$$\delta\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x) = -a^\mu \partial_\mu \phi(x) \quad (48)$$

con relativo complesso coniugato (ora a^μ è da considerare infinitesimo). Considerando il parametro infinitesimo a^μ come funzione arbitraria dello spazio-tempo otteniamo dalla variazione dell'azione le corrispondenti correnti di Noether conservate (il tensore energia-impulso)

$$\delta S[\phi, \phi^*] = \int d^4x (\partial_\mu a_\nu) \underbrace{\left(\partial^\mu \phi^* \partial^\nu \phi + \partial^\nu \phi^* \partial^\mu \phi + \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \right)}_{T^{\mu\nu}} \quad (49)$$

dove abbiamo trascurato derivate totali e dove \mathcal{L} indica la densità di lagrangiana (l'integrando della (37)). Il tensore $T^{\mu\nu}$ è chiamato tensore energia-impulso ed è conservato (più precisamente soddisfa ad un'equazione di continuità, $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$). In particolare sono conservate le cariche

$$P^\mu = \int d^3x T^{0\mu} \quad (50)$$

corrispondenti al quadrimomento totale portato del campo. Ad esempio, la densità di energia trasportata del campo è

$$\mathcal{E}(x) = T^{00} = \partial_0\phi^*\partial_0\phi + \vec{\nabla}\phi^* \cdot \vec{\nabla}\phi + m^2\phi^*\phi \quad (51)$$

e l'energia totale conservata è data da $P^0 \equiv E = \int d^3x \mathcal{E}(x)$ che è manifestamente definita positiva.

3.1 Propagatore, tempo proprio e path integral di prima quantizzazione

Da completare

4 Spin $\frac{1}{2}$: l'equazione di Dirac

Storicamente Dirac trovò la corretta equazione per descrivere particelle di spin $\frac{1}{2}$ cercando un'equazione relativistica che potesse avere un'interpretazione probabilistica per essere consistente con i principi della meccanica quantistica, a differenza dell'equazione di Klein-Gordon che non ammette questa interpretazione. Sebbene un'interpretazione probabilistica non sarà tenibile in presenza di interazioni, e la funzione d'onda di Dirac dovrà essere trattata come un campo classico da quantizzare (seconda quantizzazione), è utile ripercorrere la deduzione che portò Dirac alla formulazione di un'equazione del primo ordine nel tempo, l'equazione di Dirac

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi(x) = 0 \quad (52)$$

dove la funzione d'onda $\psi(x)$ ha quattro componenti (spinore di Dirac) e le γ^μ sono matrici 4×4 . Poichè le quattro componenti del campo di Dirac $\psi(x)$ non sono componenti di un quadrivettore, ma sono di natura spinoriale e si trasformano in modo differente per trasformazioni di Lorentz, occorre usare indici diversi per indicarne le componenti senza ambiguità. In questo contesto usiamo indici $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$ per indicare le componenti di un quadrivettore ed indici $a, b, \dots = 1, 2, 3, 4$ per indicare le componenti di uno spinore di Dirac. L'equazione (52) si scrive in modo più esplicito come

$$\left((\gamma^\mu)_{a^b} \partial_\mu + m \delta_a^b \right) \psi_b(x) = 0 . \quad (53)$$

e contiene quattro equazioni distinte ($\alpha = 1, \dots, 4$). In genere gli indici spinoriali sono sottointesi e si usa al loro posto una notazione matriciale.

Equazione di Dirac

La relazione relativistica tra energia ed impulso di una particella libera

$$p^\mu p_\mu = -m^2 c^2 \quad \Longleftrightarrow \quad E^2 = c^2 \vec{p}^2 + m^2 c^4 \quad (54)$$

con le sostituzioni

$$E = cp^0 \rightsquigarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \rightsquigarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \quad \iff \quad p_\mu \rightsquigarrow -i\hbar \partial_\mu \quad (55)$$

porta all'equazione di Klein Gordon che è del secondo ordine nelle derivate temporali: come conseguenza la corrente conservata $U(1)$ associata non ha una densità di carica definita positiva che possa essere interpretata come densità di probabilità. Dirac allora propose una relazione lineare della forma

$$E = c\vec{p} \cdot \vec{\alpha} + mc^2\beta \quad (56)$$

assumendo che $\vec{\alpha}, \beta$ siano matrici unitarie tali che questa relazione lineare sia consistente con la (54). Elevandola al quadrato si ottiene

$$\begin{aligned} E^2 &= (cp^i\alpha^i + mc^2\beta)(cp^j\alpha^j + mc^2\beta) \\ &= c^2p^ip^j\alpha^i\alpha^j + m^2c^4\beta^2 + mc^3p^i(\alpha^i\beta + \beta\alpha^i) \\ &= \frac{1}{2}c^2p^ip^j(\alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i) + m^2c^4\beta^2 + mc^3p^i(\alpha^i\beta + \beta\alpha^i) \end{aligned} \quad (57)$$

e la consistenza con (54) per momenti arbitrari p^i produce le relazioni

$$\alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i = 2\delta^{ij}, \quad \beta^2 = 1, \quad \alpha^i\beta + \beta\alpha^i = 0 \quad (58)$$

dove, come di consuetudine, la matrice identità è sottintesa nel lato destro di queste equazioni. Queste relazioni sono note anche come algebra di Clifford. Dirac ottenne una soluzione minimale con matrici 4×4 . Una soluzione esplicita in termini di blocchi 2×2 è data da

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (59)$$

dove le matrici σ^i sono le matrici di Pauli. Questa soluzione è detta rappresentazione di Dirac dell'algebra di Clifford (tutte le altre rappresentazioni di dimensione quattro sono unitariamente equivalenti alla rappresentazione di Dirac, mentre quelle di dimensioni maggiori non sono irriducibili).

Quantizzando la relazione (56) con le (55) si ottiene l'equazione di Dirac nella forma "hamiltoniana"

$$i\hbar\partial_t\psi = \underbrace{(-i\hbar c\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + mc^2\beta)}_{H_D}\psi \quad (60)$$

dove l'hamiltoniana H_D è una matrice 4×4 di operatori differenziali. La hermiticità delle matrici α^i e β garantisce la hermiticità della hamiltoniana H_D (e quindi una evoluzione temporale unitaria). Moltiplicando questa equazione con la matrice invertibile $\frac{1}{\hbar c}\beta$ e definendo le matrici gamma

$$\gamma^0 \equiv -i\beta, \quad \gamma^i \equiv -i\beta\alpha^i \quad (61)$$

si ottiene l'equazione di Dirac nella forma "covariante"

$$(\gamma^\mu\partial_\mu + \mu)\psi = 0 \quad (62)$$

con $\mu = \frac{mc}{\hbar}$ inverso della lunghezza d'onda Compton associata alla massa m . Le relazioni fondamentali che definiscono le matrici gamma sono facilmente ottenibili dalle relazioni (58) e si possono scrivere usando gli anticommutatori ($\{A, B\} \equiv AB + BA$) nella seguente forma

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (63)$$

Nella rappresentazione di Dirac le matrici gamma assumono la forma

$$\gamma^0 = -i\beta = -i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = -i\beta\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^i \\ i\sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \quad (64)$$

In seguito useremo unità di misura con $\hbar = c = 1$, per cui $\mu = m$ e l'equazione di Dirac è scritta come in (52). Una notazione molto in uso impegna la definizione introdotta da Feynman ($\not{\partial} \equiv \gamma^\mu \partial_\mu$) per cui l'equazione di Dirac si scrive come

$$(\not{\partial} + m)\psi = 0. \quad (65)$$

Equazione di continuità

....

Alcune proprietà delle matrici gamma

Le matrici β ed α^i sono hermitiane e garantiscono l'hermiticità della hamiltoniana di Dirac. Sono matrici 4×4 (in quattro dimensioni) e con traccia nulla. Le corrispondenti matrici γ^μ ($\gamma^0 = -i\beta$ e $\gamma^i = -i\beta\alpha^i$) soddisfano di conseguenza l'algebra di Clifford scritta nella forma

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \quad (66)$$

con

$$(\gamma^0)^\dagger = -\gamma^0, \quad (\gamma^i)^\dagger = \gamma^i \quad (67)$$

Dunque le γ^i con indici spaziali sono hermitiane, mentre γ^0 è antihermitiana. Queste relazioni di hermiticità possono essere descritte in modo compatto da

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \quad (68)$$

o equivalentemente da

$$(\gamma^\mu)^\dagger = -\beta \gamma^\mu \beta \quad (69)$$

Si può facilmente provare che anche le matrici gamma hanno traccia nulla.

Molte delle proprietà degli spinori sono derivabili usando proprietà delle matrici gamma. Proviamo a descriverne alcune.

Innanzitutto conviene introdurre la matrice di chiralità γ^5 , definita da

$$\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (70)$$

che soddisfa alle seguenti proprietà:

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, \quad (\gamma^5)^2 = 1, \quad (\gamma^5)^\dagger = \gamma^5, \quad \text{tr}(\gamma^5) = 0. \quad (71)$$

Nella rappresentazione di Dirac assume la forma (usando blocchi 2×2)

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (72)$$

Come vedremo questa matrice permette di introdurre i proiettori di chiralità

$$P_L = \frac{1 - \gamma^5}{2}, \quad P_R = \frac{1 + \gamma^5}{2} \quad (73)$$

(sono proiettori poiché $P_L + P_R = 1$, $P_L^2 = P_L$, $P_R^2 = P_R$, $P_L P_R = 0$) che permettono di dividere lo spinore di Dirac nelle sue componenti sinistrorse e destrorse.

Le matrici gamma agiscono nello spazio spinoriale, un spazio vettoriale complesso a quattro dimensioni. Gli operatori lineari sono matrici 4×4 , e le matrici gamma ne sono un esempio. È utile considerare una base di questi operatori, che a loro volta possono essere considerati appartenenti ad uno spazio vettoriale 16-dimensionale (il numero di componenti indipendenti di una matrice 4×4). Una base è la seguente

$$(1, \gamma^\mu, \gamma^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu], \gamma^\mu \gamma^5, \gamma^5)$$

che difatti formano $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$ matrici linearmente indipendenti.

Soluzioni

L'equazione libera ammette soluzioni di onda piana, che oltre alla fase $e^{ip_\mu x^\mu}$ che descrive l'onda che si propaga nello spaziotempo possiedono anche una polarizzazione $w(p)$ collegata allo spin. Infatti immettendo un'onda piana della forma

$$\psi(x) \sim w(p)e^{ip_\mu x^\mu}, \quad w(p) = \begin{pmatrix} w_1(p) \\ w_2(p) \\ w_3(p) \\ w_4(p) \end{pmatrix} \quad (74)$$

come ansatz nell'equazione di Dirac, si vede che la polarizzazione deve soddisfare un'equazione algebrica, $(i\gamma^\mu p_\mu + m)w(p) = 0$, e che il momento deve essere on-shell, $p_\mu p^\mu = -m^2$. Ci sono quattro soluzioni, due ad "energia positiva" (elettrone con spin su e spin giù) e due ad "energia negativa" (positrone con spin su e spin giù). Più in dettaglio, inserendo l'ansatz di onda piana nell'equazione di Dirac si ottiene ($\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$)

$$(i\not{p} + m)w(p) = 0 \quad (75)$$

da cui moltiplicando per $(-i\not{p} + m)$

$$(-i\not{p} + m)(i\not{p} + m)w(p) = (\not{p}^2 + m^2)w(p) = (p_\mu p^\mu + m^2)w(p) = 0 \quad (76)$$

che implica che $p_\mu p^\mu + m^2 = 0$. Con un pò più di sforzo si possono ottenere le espressioni esplicite delle quattro polarizzazioni indipendenti $w(p)$.

Per sviluppare un pò d'intuizione consideriamo il caso semplice di particella a riposo $p^\mu = (E, 0, 0, 0)$. La (75) diventa

$$0 = (i\gamma^0 p_0 + m)w(p) = (-i\gamma^0 E + m)w(p) = (-\beta E + m)w(p) \quad (77)$$

ed esplicitando la matrice β

$$\begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E \end{pmatrix} w(p) = m w(p) \quad (78)$$

Vediamo quindi che esistono due soluzioni ad energia positiva $E = m$

$$\psi_1(x) \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt}, \quad \psi_2(x) \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt} \quad (79)$$

e due soluzioni ad energia negativa $E = -m$

$$\psi_3(x) \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{imt}, \quad \psi_4(x) \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{imt}. \quad (80)$$

Queste ultime sono reinterpretate come descriventi una antiparticella. Il caso generale con momento arbitrario può essere derivato con calcoli simili, o ottenuto tramite una trasformazione di Lorentz delle soluzioni precedenti. Per usare quest'ultimo metodo occorre studiare la covarianza dell'eq. di Dirac.

Limite non-relativistico ed equazione di Pauli

....

Covarianza

Covarianza 2

Descriviamo ora la covarianza dell'equazione di Dirac sotto trasformazioni di Lorentz. Le trasformazioni di Lorentz sono definite da

$$\begin{aligned} x^\mu &\longrightarrow x^{\mu'} = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \\ \psi(x) &\longrightarrow \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) \end{aligned} \quad (81)$$

dove le matrici $S(\Lambda)$ costituiscono una rappresentazione (spinoriale) del gruppo di Lorentz. Questa rappresentazione si può costruire usando le matrici gamma. Per trasformazioni infinitesime $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$

$$S(\Lambda) = 1 + \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \quad (82)$$

dove i generatori infinitesimi sono costruiti con le matrici gamma

$$M^{\mu\nu} = -\frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (83)$$

che difatti realizzano correttamente l'algebra del gruppo di Lorentz

$$[M^{\mu\nu}, M^{\lambda\rho}] = -i\eta^{\nu\lambda} M^{\mu\rho} + i\eta^{\mu\lambda} M^{\nu\rho} + i\eta^{\nu\rho} M^{\mu\lambda} - i\eta^{\mu\rho} M^{\nu\lambda}. \quad (84)$$

Come esercizio si può verificare un caso particolare, ad esempio $[M^{01}, M^{12}] = -iM^{02}$. Possiamo esplicitare $M^{01} = -\frac{i}{4} [\gamma^0, \gamma^1] = -\frac{i}{2} \gamma^0 \gamma^1$, e similmente $M^{12} = -\frac{i}{2} \gamma^1 \gamma^2$, $M^{02} = -\frac{i}{2} \gamma^0 \gamma^2$, e calcolare

$$\begin{aligned} [M^{01}, M^{12}] &= \left(-\frac{i}{2}\right)^2 [\gamma^0 \gamma^1, \gamma^1 \gamma^2] = -\frac{1}{4} (\gamma^0 \gamma^1 \gamma^1 \gamma^2 - \gamma^1 \gamma^2 \gamma^0 \gamma^1) \\ &= -\frac{1}{4} (\gamma^0 \gamma^2 - \gamma^2 \gamma^0) = -\frac{1}{2} \gamma^0 \gamma^2 = -iM^{02}. \end{aligned} \quad (85)$$

Inoltre si può mostrare che le matrici gamma sono tensori invarianti

$$\gamma^\mu \longrightarrow \gamma^{\mu'} = \Lambda^\mu{}_\nu S(\Lambda) \gamma^\nu S^{-1}(\Lambda) = \gamma^\mu \quad (86)$$

proprio come lo è la metrica $\eta_{\mu\nu}$ (è relativamente semplice vederlo per trasformazioni infinitesime). Con queste proprietà gruppali è facile mostrare l'invarianza in forma dell'equazione di Dirac

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\gamma^\mu \partial'_\mu + m)\psi'(x') = 0 . \quad (87)$$

Infatti, usando il fatto che le matrici gamma sono tensori invarianti, possiamo scrivere il lato sinistro della seconda equazione con $\gamma^{\mu'}$ per cui

$$\begin{aligned} (\gamma^\mu \partial'_\mu + m)\psi'(x') &= (\gamma^{\mu'} \partial'_\mu + m)\psi'(x') \\ &= \left(\Lambda^\mu{}_{\nu'} S(\Lambda) \gamma^\nu S^{-1}(\Lambda) \Lambda_\mu{}^\lambda \partial_\lambda + m \right) S(\Lambda) \psi(x) \\ &= S(\Lambda) (\gamma^\mu \partial_\mu + m) \psi(x) \end{aligned} \quad (88)$$

da cui segue la (87).

Oltre alle trasformazioni di Lorentz connesse all'identità, si può mostrare l'invarianza dell'equazione di Dirac libera per trasformazioni discrete quali la riflessione spaziale (o parità) P , la riflessione temporale T e la coniugazione di carica C che scambia particelle con antiparticelle. Discutiamo esplicitamente la trasformazione di parità

$$\begin{aligned} x^\mu &\longrightarrow \tilde{x}^\mu = P^\mu{}_\nu x^\nu , & P^\mu{}_\nu &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \psi(x) &\longrightarrow \tilde{\psi}(\tilde{x}) = S(P)\psi(x) , & S(P) &= e^{i\phi} \gamma^0 \end{aligned} \quad (89)$$

dove la rappresentazione sugli spinori della trasformazione di parità, $S(P) = e^{i\phi} \gamma^0$, può contenere una fase arbitraria ϕ . Mostriamo che con queste trasformazioni l'equazione è invariante in forma

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\gamma^\mu \tilde{\partial}_\mu + m)\tilde{\psi}(\tilde{x}) = 0 . \quad (90)$$

Infatti possiamo calcolare

$$\begin{aligned} (\gamma^\mu \tilde{\partial}_\mu + m)\tilde{\psi}(\tilde{x}) &= (\gamma^0 \partial_0 - \gamma^i \partial_i + m) e^{i\phi} \gamma^0 \psi(x) = e^{i\phi} \gamma^0 (\gamma^0 \partial_0 + \gamma^i \partial_i + m) \psi(x) \\ &= e^{i\phi} \gamma^0 (\gamma^\mu \partial_\mu + m) \psi(x) \end{aligned} \quad (91)$$

per cui un'equazione in un sistema di riferimento implica l'altra nel sistema di riferimento con assi spaziali riflessi.

Molte delle proprietà degli spinori seguono dalle proprietà algebriche delle matrici gamma e per convenienza ne elenchiamo qui alcune

$$\begin{aligned} \gamma^{\mu\dagger} &= \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 & (\gamma^i \text{ hermitiane, } \gamma^0 \text{ antihermitiana}) \\ \gamma_5 &\equiv -i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 & \Longrightarrow \quad \{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0 , \quad (\gamma_5)^2 = 1 , \quad \gamma_5^\dagger = \gamma_5 . \end{aligned} \quad (92)$$

Inversione temporale

$$\begin{aligned} x^\mu &\longrightarrow \tilde{x}^\mu = T^\mu{}_\nu x^\nu , & T^\mu{}_\nu &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \psi(x) &\longrightarrow \tilde{\psi}(\tilde{x}) = \mathcal{T} \psi^*(x) , & \mathcal{T} &= \eta_T \gamma^1 \gamma^3 \end{aligned} \quad (93)$$

con η_T fase arbitraria. Sotto questa trasformazione l'eq. di Dirac libera è invariante.

Teoria delle buche

Coniugazione di carica

Questa è una simmetria discreta interna, che non agisce sulle coordinate spazio-temporali.

$$\begin{aligned} x^\mu &\longrightarrow \tilde{x}^\mu = x^\mu \\ \psi(x) &\longrightarrow \tilde{\psi}(\tilde{x}) = \mathcal{A}\psi^*(x), \quad \mathcal{A} = \eta_C \mathcal{C} \beta, \quad \mathcal{C} = \gamma^0 \gamma^2 \end{aligned} \quad (94)$$

con η_T fase arbitraria. Sotto questa trasformazione l'eq. di Dirac libera è invariante.

Simmetria CPT

Sebbene le simmetrie discrete P, T, C della teoria libera possono essere rotte da alcune interazioni (in modo particolare dall'interazione debole), la combinazione CPT risulta essere sempre valida in teorie Lorentz invarianti (invariante sotto il gruppo di Lorentz proprio ed ortocrono).

$$\begin{aligned} x^\mu &\longrightarrow \tilde{x}^\mu = -x^\mu \\ \psi(x) &\longrightarrow \psi_{CPT}(\tilde{x}) = \eta_{CPT} \gamma^5 \psi(x) \end{aligned} \quad (95)$$

con η_{CPT} una fase arbitraria. Sotto questa trasformazione l'eq. di Dirac libera è invariante.

Azione

Per scrivere l'azione conviene introdurre il coniugato di Dirac $\bar{\psi}$ del campo ψ , definito come

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \beta = \psi^\dagger i \gamma^0 \quad (96)$$

che ha la proprietà di trasformarsi in modo tale da rendere il prodotto $\bar{\psi}\psi$ uno scalare. Infatti dalla trasformazione infinitesima di Lorentz su uno spinore ψ (trascurando la dipendenza dalle coordinate dello spazio-tempo) si ottiene quella del suo coniugato di Dirac

$$\delta\psi = \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \psi \quad \longrightarrow \quad \delta\bar{\psi} = -\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \bar{\psi} M^{\mu\nu} \quad (97)$$

da cui si deduce che $\bar{\psi}\psi$ è uno scalare. L'azione è uno scalare ed è data da

$$S[\psi, \bar{\psi}] = \int d^4x \mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}), \quad \mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}) = -\bar{\psi}(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi. \quad (98)$$

Variando $\bar{\psi}$ e ψ ed usando il principio di minima azione si ottengono l'equazione di Dirac e la sua coniugata

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi(x) = 0, \quad \bar{\psi}(x)(\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu - m) = 0. \quad (99)$$

Come esercizio verifichiamo esplicitamente le trasformazioni di Lorentz di $\bar{\psi}$:

$$\begin{aligned} \delta\bar{\psi} &= \delta\psi^\dagger i \gamma^0 = \left(\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \psi\right)^\dagger i \gamma^0 = \left(\frac{1}{4} \omega_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu \psi\right)^\dagger i \gamma^0 = \frac{1}{4} \omega_{\mu\nu} \psi^\dagger \gamma^{\nu\dagger} \gamma^{\mu\dagger} i \gamma^0 \\ &= \frac{1}{4} \omega_{\mu\nu} \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \gamma^{\nu\dagger} \gamma^0 \gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} i \gamma^0 = \frac{1}{4} \omega_{\mu\nu} (\psi^\dagger i \gamma^0) (\gamma^0 \gamma^{\nu\dagger} \gamma^0) (\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0) = \frac{1}{4} \omega_{\mu\nu} \bar{\psi} \gamma^\nu \gamma^\mu \\ &= -\frac{1}{4} \omega_{\mu\nu} \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^\nu = -\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \bar{\psi} M^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (100)$$

Simmetrie

Le simmetrie sotto il gruppo di Lorentz sono state già descritte sopra, mentre quelle addizionali per traslazioni spazio temporali sono immediate considerando il campo come uno scalare ($x \rightarrow x' = x + a$ con $\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = \psi(x)$). Da questa ultima si può ottenere il tensore energia-impulso come corrente di Noether.

Consideriamo in dettaglio la simmetria interna generata dalle trasformazioni di fase del gruppo $U(1)$

$$\begin{aligned}\psi(x) &\longrightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha}\psi(x) \\ \bar{\psi}(x) &\longrightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{-i\alpha}\bar{\psi}(x) .\end{aligned}\quad (101)$$

È facile vedere che l'azione (98) è invariante. Per trasformazioni infinitesime

$$\begin{aligned}\delta\psi(x) &= i\alpha\psi(x) \\ \delta\bar{\psi}(x) &= -i\alpha\bar{\psi}(x)\end{aligned}\quad (102)$$

considerando un parametro locale $\alpha(x)$ si calcola

$$\delta S[\psi, \bar{\psi}] = \int d^4x \partial_\mu \alpha \underbrace{(-i\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)}_{-J^\mu} \quad (103)$$

da cui si verifica di nuovo la simmetria $U(1)$ (per α costante) e si ottiene la relativa corrente di Noether

$$J^\mu = i\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (104)$$

che è conservata $\partial_\mu J^\mu = 0$. In particolare la densità di carica conservata è definita positiva

$$J^0 = i\bar{\psi}\gamma^0\psi = i\psi^\dagger i\gamma^0\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi \geq 0 \quad (105)$$

e fu originariamente considerata da Dirac come una densità di probabilità.

Proprietà chirali

Analizziamo infine la riducibilità dello spinore di Dirac sotto il gruppo di Lorentz proprio ed ortocrono $SO^+(3, 1)$. Costruendo i proiettori

$$P_L = \frac{1 - \gamma_5}{2}, \quad P_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} \quad (106)$$

(sono proiettori poiché $P_L + P_R = 1$, $P_L^2 = P_L$, $P_R^2 = P_R$, $P_L P_R = 0$) possiamo dividere lo spinore di Dirac nelle sue componenti sinistrorse e destrorse (spinori di Weyl)

$$\psi = \psi_L + \psi_R, \quad \psi_L \equiv \frac{1 - \gamma_5}{2}\psi, \quad \psi_R \equiv \frac{1 + \gamma_5}{2}\psi \quad (107)$$

che sono le due rappresentazioni irriducibili del gruppo di Lorentz proprio ed ortocrono (nella teoria delle rappresentazioni abbiamo anticipato la presenza delle rappresentazioni irriducibili inequivalenti $(\frac{1}{2}, 0)$ e $(0, \frac{1}{2})$ che corrispondono agli spinori di Weyl, e descritto lo spinore di Dirac come la rappresentazione riducibile data dalla somma diretta $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$). Infatti i generatori infinitesimi delle trasformazioni di Lorentz $M^{\mu\nu}$ commutano con i proiettori P_L, P_R

$$P_{L/R}M^{\mu\nu} = \frac{1 \mp \gamma_5}{2} \left(-\frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \right) = \left(-\frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \right) \frac{1 \mp \gamma_5}{2} = M^{\mu\nu} P_{L/R} \quad (108)$$

e questo indica come lo spinore di Dirac sia riducibile nella sue parti destrorse e sinistrorse. L'operazione di parità (riflessione degli assi spaziali) trasforma un fermione sinistrorso in un fermione destrorso e viceversa. Infatti

$$\psi_L \xrightarrow{P} (\psi_L)' = \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \psi \right)' = e^{i\phi} \gamma^0 \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi = \frac{1 + \gamma_5}{2} e^{i\phi} \gamma^0 \psi = \frac{1 + \gamma_5}{2} \psi' = (\psi')_R. \quad (109)$$

È interessante scrivere l'azione in termini di queste componenti chirali irriducibili

$$S[\psi_L, \psi_R] = \int d^4x \left(-\bar{\psi}_L \not{\partial} \psi_L - \bar{\psi}_R \not{\partial} \psi_R - m(\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L) \right) \quad (110)$$

che mostra come una massa di Dirac m non possa essere presente per fermioni chirali (i.e. fermioni puramente sinistrorsi per cui $\psi_R = 0$ o puramente destrorsi per cui $\psi_L = 0$). I fermioni che entrano nel modello standard sono chirali e non possono avere masse di Dirac (per ragioni collegate all'invarianza di gauge). Masse di Dirac possono emergere come conseguenza del meccanismo di Higgs per la rottura spontanea della simmetria di gauge.

Propagatore

Quantizzando il campo di Dirac libero si ottiene il propagatore. Come nel caso del campo di Klein Gordon, il propagatore è collegato alla funzione di Green $S(x - y)$ dell'operatore differenziale descrivente l'equazione del moto libera ($(\not{\partial}_x + m)S(x - y) = \delta^4(x - y)$). Il propagatore ha quindi la seguente forma

$$\langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle = -iS(x - y) = -i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ip \cdot (x-y)} \frac{-i\not{p} + m}{p^2 + m^2 - i\epsilon} \quad (111)$$

da cui segue, grazie alla prescrizione causale di Feynman ($-i\epsilon$), la corretta interpretazione di fluttuazioni di particelle ed antiparticelle con energie positive che si propagano dal passato al futuro, proprio come nel caso delle particelle scalari.