Variabili di Grassmann

(Appunti per il corso di Fisica Teorica 2011/12)

Fiorenzo Bastianelli

Fermioni al livello classico possono essere descritti da variabili di Grassmann. Queste variabili permettono di introdurre modelli che sotto quantizzazione riproducono i gradi di libertà associati allo spin. Non si conosce nessun modo di misurare fisicamente il valore di una variabile di Grassmann, per cui si dovrebbe parlare di modelli pseudoclassici piuttosto che di modelli classici, ma nel seguito non faremo questa distinzione.

1 Algebra di Grassmann

Una algebra di Grassmann n-dimensionale è formata da generatori θ_i che soddisfano

$$\{\theta_i, \theta_j\} \equiv \theta_i\theta_j + \theta_j\theta_i = 0 \qquad\qquad i, j = 1, ..., n \ .$$

In particolare, ciascun generatore ha quadrato nullo

$$\theta_i^2 = 0 \ , \qquad i \ \ \text{fissato}$$

suggerendo già a livello classico l'essenza del principio di esclusione di Pauli, secondo cui non ci possono essere due fermioni nello stesso stato quantistico.

Funzioni di queste variabili di Grassmann hanno uno sviluppo in serie di Taylor finito. Ad esempio, con $n = 1$ per definizione c'è una sola variable di Grassmann θ, per cui una funzione arbitraria $f(\theta)$ è completamente definita da

$$f(\theta) = f_0 + f_1\theta$$

dove f_0 e f_1 possono essere numeri reali o complessi. Similmente, per $n = 2$ si ha

$$f(\theta_1, \theta_2) = f_0 + f_1\theta_1 + f_2\theta_2 + f_3\theta_1\theta_2 \ .$$

Termini con un numero pari di θ sono chiamati Grassmann-pari (oppure commutanti, bosonici o semplicemente pari). Termini con un numero dispari di θ sono chiamati Grassmann-dispari (oppure anticommutanti, fermionici o semplicemente dispari).

Le derivate rispetto alle variabili di Grassmann sono molto semplici. Poiché ogni funzione è al più lineare in ciascuna variabile di Grassmann, si deve tenere traccia solo di un segno. Le "derivate sinistre" sono quelle in cui si rimuove la variabile a sinistra, dopo averla commutata opportunamente in quella posizione. Ad esempio, per la funzione $f(\theta_1, \theta_2)$ introdotta sopra

$$\frac{\partial_L}{\partial\theta_1} f(\theta_1, \theta_2) = f_1 + f_3\theta_2 \ .$$

Similmente, le "derivate destre" sono quelle in cui si rimuove la variabile a destra

$$\frac{\partial_R}{\partial\theta_1} f(\theta_1, \theta_2) = f_1 - f_3\theta_2$$

dove il segno meno è dovuto al fatto che si deve spostare θ_1 attraverso θ_2. Se non specificato altrimenti, useremo le derivate sinistre omettendo il corrispondente pedice.

L'integrazione è definita, secondo Berezin, essere identica alla differenziazione

$$\int d\theta \equiv \frac{\partial}{\partial\theta} \ .$$

Questa definizione ha il pregio di definire una misura invariante per traslazione. Questo significa che

$$\int d\theta f(\theta + \eta) = \int d\theta f(\theta)$$

come si può provare facilmente con un calcolo esplicito.

Le variabili di Grassmann possono essere reali o complesse. Una variabile reale soddisfa

$$\theta^* = \theta$$

e per un prodotto di variabili di Grassmann il complesso coniugato include uno scambio dell'ordine delle variabili

$$(\theta_1\theta_2)^* = \theta_2^*\theta_1^*$$

cosicché il complesso coniugato del prodotto di due variabili di Grassmann reali è puramente immaginario

$$(\theta_1\theta_2)^* = -\theta_1\theta_2 \ .$$

Una grandezza reale è invece data da $i\theta_1\theta_2$, poiché il complesso coniugato dell' unità immaginaria porta un segno meno addizionale necessario per ottenere formalmente un oggetto reale

$$(i\theta_1\theta_2)^* = i\theta_1\theta_2 \ .$$

Variabili di Grassmann complesse η ed η^* possono sempre essere definite in termini di variabili di Grassmann reali

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1 + i\theta_2) \ , \qquad \eta^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1 - i\theta_2) \ .$$

È di uso comune indicare con una barra il complesso coniugato, $\bar{\eta} \equiv \eta^*$, e spesso queste notazioni equivalenti sono usate scambievolmente.

1.1 Integrazione gaussiana

Allo scopo di definire un funzionale integrale per fermioni è utile definire e descrivere l' integrale gaussiano nel caso delle variabili di Grassmann. Nel caso di una sola variabile reale θ la funzione gaussiana è banale

$$e^{-a\theta^2} = 1$$

Occorrono almeno due variabili per avere una funzione non banale

$$e^{-a\theta_1\theta_2} = 1 - a\theta_1\theta_2$$

ed il corrispondente "integrale gaussiano" diventa con la definizione di integrazione data sopra

$$\int d\theta_1 d\theta_2 \, e^{-a\theta_1\theta_2} = a \ .$$

Definendo la matrice antisimmetrica 2×2

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

si può riscrivere l'integrale precedente come

$$\int d\theta_1 d\theta_2 \, e^{-\frac{1}{2}\theta_i A^{ij}\theta_j} = \mathrm{Pfaff}(A)$$

dove si è introdotto il Pfaffiano, la radice quadrata del determinante che per matrici antisimmetriche è necessariamente positivo. È facile vedere che questa formula è valida in generale quando si hanno un numero n pari di variabili di Grassmann reali

$$\int d^n\theta \, e^{-\frac{1}{2}\theta_i A^{ij}\theta_j} = \mathrm{Pfaff}(A)$$

dove $d^n\theta = d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_n$.

Il determinante di una matrice $A_i{}^j$ è invece ottenuto con un'integrazione gaussiana su variabili di Grassmann complesse $(\eta_i, \bar{\eta}^i)$

$$\int d^n\bar{\eta} d^n\eta \, e^{-\bar{\eta}^i A_i{}^j \eta_j} = \det(A)$$

dove abbiamo definito $d^n\bar{\eta} d^n\eta = d\bar{\eta}^1 d\eta_1 d\bar{\eta}^2 d\eta_2 \dots d\bar{\eta}^n d\eta_n$.

Per applicazioni a modelli di meccanica pseudoclassica e successiva quantizzazione con l'integrale funzionale avremo bisogno di un'algebra di Grassmann infinita, cioè con $n \to \infty$

$$\eta_i \;\rightsquigarrow\; \eta(t)\ .$$