1 Spin 0: il campo scalare di Klein Gordon

L'equazione di Klein-Gordon può essere ottenuta dalla prima quantizzazione di una particella relativistica. Però il campo di Klein-Gordon non ammette una interpretazione probabilistica come nel caso della funzione d'onda dell'equazione di Schroedinger. La consistenza con la meccanica quantistica è recuperata trattando il campo di Klein-Gordon come campo classico descrivente un numero infinito di gradi di libertà (che succesivamente dovrà essere quantizzato, esattamente come nel caso del campo elettromagnetico che storicamente fu il primo esempio di campo quantizzato) e non come una funzione d'onda quantistica. Spesso ci si riferisce alla quantizzazione del campo come alla seconda quantizzazione.

Azione

L'equazione di Klein-Gordon per un campo scalare complesso $\phi(x)$ è data da

$$(\Box - m^2)\phi(x) = 0 \tag{1}$$

dove $\Box \equiv \partial^\mu \partial_\mu$ è l'operatore differenziale di d'Alambert. Questa equazione può essere convenientemente ottenuta da un principio d'azione

$$S[\phi, \phi^*] = \int d^4x \Big(- \partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \Big) \ . \tag{2}$$

Variando indipendentemente ϕ e ϕ^* ed imponendo il principio di minima azione si ottengono le equazioni del moto:

$$\frac{\delta S[\phi, \phi^*]}{\delta \phi^*(x)} = (\Box - m^2)\phi(x) = 0 \ , \qquad \frac{\delta S[\phi, \phi^*]}{\delta \phi(x)} = (\Box - m^2)\phi^*(x) = 0 \ . \tag{3}$$

Per un campo scalare reale $\phi^* = \phi$, l'azione è data da

$$S[\phi] = \int d^4x \Big(- \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi \phi \Big) \tag{4}$$

da cui

$$\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(x)} = (\Box - m^2)\phi(x) = 0 \ . \tag{5}$$

Soluzioni

Si possono cercare soluzioni di onda piana del tipo

$$\phi(x) \sim e^{ip_\nu x^\nu} \tag{6}$$

che inserita in (1) produce

$$-(p^\mu p_\mu + m^2)\, e^{ip_\nu x^\nu} = 0 \tag{7}$$

L'onda piana è una soluzione se il quadrimomento p_μ soddisfa la condizione di mass-shell

$$p^\mu p_\mu = -m^2 \tag{8}$$

che è risolta da

$$(p^0)^2 = \vec{p}^{\,2} + m^2 \qquad \Longrightarrow \qquad p^0 = \pm \underbrace{\sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}}_{E_p} = \pm E_p \tag{9}$$

(se si cerca di interpretare $\phi(x)$ come una funzione d'onda, oltre alle soluzioni con energia positiva $p^0 = E_p$ sono presenti anche soluzioni con energia negativa $p^0 = -E_p$, che saranno poi reintepretate come dovute alle antiparticelle). Una soluzione generale si può scrivere come combinazione lineare di onde piane

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \Big(a(\vec{p})\, e^{-iE_pt + i\vec{p}\cdot\vec{x}} + b^*(\vec{p})\, e^{iE_pt - i\vec{p}\cdot\vec{x}} \Big) \tag{10}$$

e relativo complesso coniugato

$$\phi^*(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \Big(b(\vec{p})\, e^{-iE_pt + i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a^*(\vec{p})\, e^{iE_pt - i\vec{p}\cdot\vec{x}} \Big) \tag{11}$$

Per campi reali ($\phi^* = \phi$) i coefficienti di Fourier $a(\vec{p})$ e $b(\vec{p})$ coincidono, $a(\vec{p}) = b(\vec{p})$.

Simmetrie

Il campo complesso di Klein-Gordon libero (cioè senza interazioni) possiede simmetrie rigide generate dal gruppo di Poincaré (simmetrie di spazio-tempo) e simmetrie rigide per trasformazioni di fase generate dal gruppo $U(1)$ (simmetrie interne).

La simmetria $U(1)$ è data da

$$\begin{array}{ccc} \phi(x) & \longrightarrow & \phi'(x) = e^{i\alpha}\phi(x) \\ \phi^*(x) & \longrightarrow & \phi^{*\prime}(x) = e^{-i\alpha}\phi^*(x) \end{array} \tag{12}$$

ed è facile vedere che l'azione (2) è invariante. Per trasformazioni infinitesime

$$\begin{array}{rcl} \delta\phi(x) & = & i\alpha\phi(x) \\ \delta\phi^*(x) & = & -i\alpha\phi^*(x) \end{array} \tag{13}$$

e considerando il parametro locale, $\alpha \to \alpha(x)$, si calcola

$$\delta S[\phi, \phi^*] = \int d^4x\, \partial_\mu\alpha \underbrace{\Big(i\phi^*\partial^\mu\phi - i(\partial^\mu\phi^*)\phi \Big)}_{J^\mu} \tag{14}$$

da cui verifichiamo di nuovo la simmetria $U(1)$ (per α costante), ottenendo allo stesso tempo la relativa corrente di Noether

$$J^\mu = i\phi^*\partial^\mu\phi - i(\partial^\mu\phi^*)\phi \equiv i\phi^* \overleftrightarrow{\partial^\mu}\, \phi \tag{15}$$

che soddisfa un'equazione di continuità, $\partial_\mu J^\mu = 0$. La corrispondente carica conservata

$$Q \equiv \int d^3x\, J_0 = \int d^3x\, i\phi^* \overleftrightarrow{\partial_0}\, \phi \tag{16}$$

non è definita positiva e non può essere interpretata come una probabilità come nel caso delle soluzioni dell'equzione di Schroedinger. Più in generale si può definire un prodotto scalare tra due soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon χ e ϕ come

$$\langle \chi | \phi \rangle \equiv \int d^3x \, i \chi^* \overleftrightarrow{\partial_0} \phi \; . \tag{17}$$

Questo prodotto scalare è conservato grazie alle equazioni del moto, ma non è interpretabile come ampiezza di probabilità.

Le trasformazioni generate dal gruppo di Poincaré

$$\begin{aligned} x^\mu \quad &\longrightarrow \quad x^{\mu\prime} = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \\ \phi(x) \quad &\longrightarrow \quad \phi'(x') = \phi(x) \\ \phi^*(x) \quad &\longrightarrow \quad \phi^{*\prime}(x') = \phi^*(x) \end{aligned} \tag{18}$$

trattano il campo di Klein-Gordon come uno scalare. È di nuovo facile verificare l'invarianza dell'azione sotto queste trasformazioni finite. Consideriamo in particolare il caso di traslazioni spazio-temporali infinitesime, che possiamo scrivere come

$$\delta\phi(x) = \phi'(x) - \phi'(x) = -a^\mu \partial_\mu \phi(x) \tag{19}$$

con relativo complesso coniugato (ora a^μ è da considerare infinitesimo). Considerando il parametro infinitesimo a^μ come funzione arbitraria dello spazio-tempo otteniamo dalla variazione dell'azione le corrispondenti correnti di Noether conservate (il tensore energia-impulso)

$$\delta S[\phi, \phi^*] = \int d^4x \, (\partial_\mu a_\nu) \Big(\underbrace{\partial^\mu \phi^* \partial^\nu \phi + \partial^\nu \phi^* \partial^\mu \phi + \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}}_{T^{\mu\nu}} \Big) \tag{20}$$

dove abbiamo trascurato derivate totali e dove $\mathcal{L}$ indica la densità di lagrangiana (l'integrando della (2)). Il tensore $T^{\mu\nu}$ è chiamato tensore energia-impulso ed è conservato (più precisamente soddisfa ad un'equazione di continuità, $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$). In particolare sono conservate le cariche

$$P^\mu = \int d^3x \, T^{0\mu} \tag{21}$$

corrispondenti al quadrimomento totale portato del campo. Ad esempio, la densità di energia trasportata del campo è

$$\mathcal{E}(x) = T^{00} = \partial_0 \phi^* \partial_0 \phi + \vec{\nabla} \phi^* \cdot \vec{\nabla} \phi + m^2 \phi^* \phi \tag{22}$$

e l'energia totale conservata è data da $P^0 \equiv E = \int d^3x \, \mathcal{E}(x)$ che è manifestamente definita positiva.

Quantizzazione

La quantizzazione del campo scalare libero (usando unità di misura con $\hbar = c = 1$) è facilmente ottenibile con l'integrale funzionale, che per teorie libere è puramente gaussiano.

Introducendo le sorgenti $J^*(x)$ e $J(x)$ per il campo ed il suo complesso coniugato, possiamo ottenere direttamente il funzionale generatore di tutte le funzioni di correlazione

$$\begin{aligned} Z[J, J^*] &= \int \mathcal{D}\phi\mathcal{D}\phi^* \, e^{iS[\phi,\phi^*]+i\int d^4x\,(J^*(x)\phi(x)+J(x)\phi^*(x))} \\ &= N e^{i\int d^4x d^4y\, J^*(x)G(x-y)J(y)} \end{aligned} \tag{23}$$

dove N è una costante di normalizzazione indipendente da J e J^*, mentre $G(x-y)$ è l'inverso dell'operatore cinetico $K(x,y) = (-\Box_x + m^2)\delta^4(x-y)$, i.e. la funzione di Green dell'operatore differenziale $(-\Box_x + m^2)$

$$\int d^4z\, K(x,z)G(z,y) = (-\Box_x + m^2)G(x,y) = \delta^4(x-y) \ . \tag{24}$$

Scrivendo $G(x,y)$ come trasformata di Fourier si trova

$$G(x,y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip_\mu(x^\mu - y^\mu)}}{p^2 + m^2 - i\epsilon} \tag{25}$$

dove $\epsilon \to 0$ è una quantità infinitesima positiva che ci ricorda come spostare i poli nella valutazione dell'integrale (è nota come prescrizione causale di Feynman per distinguerla da altre prescrizioni che conducono a funzioni di Green diverse: è la prescrizione naturale che viene dalla continuazione analitica degli integrali gaussiani reali descritta precedentemente).

Dal funzionale generatore calcolato in (23) si possono ottenere le funzioni di correlazione a due punti normalizzate. L'unica funzione a due punti non nulla, il propagatore, è dato da

$$\begin{aligned} \langle\phi(x)\phi^*(y)\rangle &= \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^*(x)}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)} Z[J,J^*]\Big|_{J=J^*=0} = -iG(x-y) \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-i}{p^2+m^2-i\epsilon}\, e^{ip\cdot(x-y)} \ . \end{aligned} \tag{26}$$

Questo propagatore descrive la propagazione dei quanti del campo scalare complesso che sono identificate con particelle ed antiparticelle di massa m e spin 0. Queste particelle possono propagarsi a distanze mascroscopiche solo se vale la relazione $p^2 = -m^2$ (il polo che compare nell'integrando compensa gli effetti di interferenza distruttiva dell'integrale di Fourier sulle onde piane) e sono dette "particelle reali". Gli effetti quantististici dovuti alle fluttuazioni con $p^2 \neq -m^2$ sono invece considerati come dovuti a "particelle virtuali" che non sono visibili some stati asintotici (cioè su distanze macroscopiche e sono "nascoste" dal principio di indeterminazione). La prescrizione $i\epsilon$ per spostare i poli dell'integrando (prescrizione di Feynman-Stuckelberg) corrisponde ad una scelta ben precisa delle condizioni al contorno da dare alla funzione di Green: corrisponde a propapagare in avanti nel tempo le onde piane con energia positiva ($p^0 = E_p$), mentre propaga indietro nel tempo le fluttuazioni con energia negativa ($p^0 = -E_p$). Questa prescrizione è anche detta causale, perchè non permette la propagazione nel futuro di stati ad energia negativa. Tali particelle con energia negativa che si propagano indietro nel tempo sono interpretate come antiparticelle con energia positiva che si propagano avanti nel tempo. Vediamo esplicitamente come questo emerge matematicamente dal calcolo dell'integrale in p^0 del propagatore, che mostra anche come il campo libero si possa interpretare come una collezione di oscillatori armonici:

$$\begin{aligned}
\langle\phi(x)\phi^*(y)\rangle &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{-i}{p^2+m^2-i\epsilon}e^{ip\cdot(x-y)} \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\int\frac{dp^0}{2\pi}\,e^{-ip^0(x^0-y^0)}\frac{i}{(p^0-E_p+i\epsilon')(p^0+E_p-i\epsilon')} \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\left[\theta(x^0-y^0)\,\frac{e^{-iE_p(x^0-y^0)}}{2E_p}+\theta(y^0-x^0)\,\frac{e^{-iE_p(y^0-x^0)}}{2E_p}\right] \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\,\frac{e^{-iE_p|x^0-y^0|}}{2E_p} \qquad (27)
\end{aligned}$$

dove $E_p=\sqrt{\vec{p}^{\,2}+m^2}$ ed $\epsilon\sim\epsilon'\to 0^+$. Gli integrali sono stati fatti usando l'integrazione su un circuito del piano complesso p^0, scegliendo di chiudere il circuito sul semicerchio di raggio infinito che dà un contributo nullo e valutando l'integrale col teorema dei residui). Ricordando la forma del propagatore dell'oscillatore armonico si vede come il campo possa essere interpretato come una collezione infinita di oscillatori armonici con frequenza E_p.

Potenziale di Yukawa

Consideriamo per comodità il caso di un campo scalare reale, dove particelle ed antiparticelle sono indistinguibili. Usando l'azione corrispondente già riportata in (5), calcoliamo il path integral in modo del tutto simile a quanto fatto sopra

$$Z[J]=\int\mathcal{D}\phi\,e^{iS[\phi]+i\int d^4x\,J(x)\phi(x)}=N\,e^{\frac{i}{2}\int d^4x\,d^4y\,J(x)G(x-y)J(y)} \qquad (28)$$

da cui

$$W[J]=-i\log Z[J]=\frac{1}{2}\int d^4x\,d^4y\,J(x)G(x-y)J(y)-i\log N\ . \qquad (29)$$

Il funzionale $W[J]$ che si può interpretare come un'azione efficace di interazione delle sorgenti $J(x)$ dovute agli effetti del campo ϕ. Scegliamo la sorgente esterna $J(x)$ come data dalla somma di due "cariche" statiche, di carica g_1 e g_2 poste nei punti $\vec{x}=\vec{r}$ e $\vec{x}=0$

$$J(x)=g_1\delta^3(\vec{x}-\vec{r})+g_2\delta^3(\vec{x})\ . \qquad (30)$$

L'azione efficace che descrive l'interazione tra la carica g_1 e la carica g_2 mediata dal campo scalare ϕ corrisponde al seguente termine contenuto in (29)

$$\begin{aligned}
W[g_1,g_2] &= \int d^4x\,d^4y\,g_1\delta^3(\vec{x}-\vec{r})G(x-y)g_2\delta^3(\vec{y}) \\
&= \int dx^0\,dy^0\,g_1g_2G(x^0-y^0;\vec{r}) \\
&= \int dx^0\,g_1g_2\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}}{\vec{p}^{\,2}+m^2} \\
&= \int dt\,g_1g_2\frac{e^{-mr}}{4\pi r} \qquad (31)
\end{aligned}$$

che corrisponde ad un potenziale d'interazione V tra le due cariche $(L = T - V)$ detto potenziale di Yukawa

$$V(r) = -\frac{g_1 g_2}{4\pi}\frac{e^{-mr}}{r} \tag{32}$$

Questo è un potenziale attrattivo tra cariche dello stesso segno, con raggio d'azione $\lambda = \frac{1}{m}$ corrispondente alla lunghezza d'onda Compton di una particella di massa m. Nel 1935 Yukawa introdusse una simile particella per descrivere le forze nucleari e la chiamò mesone. Con una stima dell'ordine di $\lambda \sim \frac{1}{3}$ fm si ottiene una massa $m \sim 150$ MeV, ed infatti il mesone π^0 (detto anche pione) che fù successivamente scoperto studiando le interazioni dei raggi cosmici ha una massa di questo ordine di grandezza $m_{\pi^0} \sim 135$ MeV.