1 Spin 1: equazioni di Maxwell e Proca

<u>**Proca**</u>

Particelle di spin 1 possono essere descritte da un campo vettoriale $A_\mu(x)$. Nel caso di particelle massive di massa m le equazioni libere sono conosciute come equazioni di Proca e sono derivabili dalla seguente azione

$$S_{Pro}[A_\mu] = \int d^4x \Big(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu \Big) \tag{1}$$

dove si è usata la definizione

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \ . \tag{2}$$

Un'integrazione per parti permette di ottenere una forma alternativa dell'azione

$$S_{Pro}[A_\mu] = \int d^4x \Big(-\frac{1}{2} \partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu + \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 - \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu \Big) \tag{3}$$

simile all'azione di quattro campi di Klein Gordon (primo e terzo termine) ma con l'aggiunta cruciale del termine $(\partial_\mu A^\mu)^2$. Variando A_μ si ottengono le equazioni del moto

$$\frac{\delta S_{Pro}[A]}{\delta A^\nu(x)} \equiv \partial^\mu F_{\mu\nu} - m^2 A_\nu(x) = 0 \ . \tag{4}$$

Queste sono le equazioni di Proca. Possono essere scritte in una forma equivalente notando l'indentità $\partial^\mu \partial^\nu F_{\mu\nu} = 0$ che implica

$$\partial^\mu \partial^\nu F_{\mu\nu} = m^2 \partial^\nu A_\nu(x) = 0 \ . \tag{5}$$

Quindi per $m \neq 0$ si ha il vincolo

$$\partial^\mu A_\mu = 0 \ . \tag{6}$$

Utilizzando questa relazione si possono scrivere le equazioni di Proca come quattro equazioni di Klein-Gordon con in più un vincolo

$$\begin{aligned} (\Box - m^2) A_\mu &= 0 \\ \partial^\mu A_\mu &= 0 \ . \end{aligned} \tag{7}$$

Questo ci dice che dei quattro campi A_μ solo tre di essi sono indipendenti, e descrivono in modo covariante le tre polarizzazioni associate ad una particella di spin 1. L'invarianza dell'azione e delle equazioni del moto per trasformazioni di Lorentz

$$\begin{aligned} x^\mu \quad &\longrightarrow \quad x^{\mu\prime} = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \\ A_\mu(x) \quad &\longrightarrow \quad A_\mu{}'(x') = (D(\Lambda))_\mu{}^\nu A_\nu(x) = \Lambda_\mu{}^\nu A_\nu(x) \end{aligned} \tag{8}$$

è manifesta: basta trasformare il campo A_μ nella rappresentazione quadrivettoriale come indicato dal suo indice.

Soluzioni

È facile trovare soluzioni di onda piana dell'equazione di Proca. Inserendo in (7) l'ansatz

$$A_\mu = \varepsilon_\mu(p) e^{ip\cdot x} \tag{9}$$

si trova che: *(i)* il momento p_μ deve soddisfare alla condizione di "mass shell" $p_\mu p^\mu = -m^2$ (prima equazione in (7)), *(ii)* una combinazione lineare della quattro possibili polarizzazioni deve essere nulla, $p^\mu \varepsilon_\mu(p) = 0$ (seconda equazione in (7)). Le tre rimanenti polarizzazioni descrivono i tre gradi di libertà di una particella con spin 1. Soluzioni reali possono facilmente essere ottenute sommando con opportuni coefficienti di Fourier queste onde piane.

Propagatore

La quantizzazione per la teoria libera procede in modo semplice. Infatti la definizione dell'integrale funzionale non presenta problemi particolari. È quindi facile ottenere il propagatore

$$\langle A_\mu(x) A_\nu(y)\rangle \;=\; -iG_{\mu\nu}(x-y) = -i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, e^{ip\cdot(x-y)} \Big(\underbrace{\frac{\eta_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m^2}}{p^2+m^2-i\epsilon}}_{\tilde G_{\mu\nu}(p)} \Big) \tag{10}$$

dove si è fatto uso della funzione di Green $G_{\mu\nu}(x-y)$ dell'operatore differenziale $K^{\mu\nu}(\partial) \equiv (-\Box + m^2)\eta^{\mu\nu} + \partial^\mu\partial^\nu$ che soddisfa

$$K^{\mu\nu}(\partial_x) G_{\nu\lambda}(x-y) = \delta^\mu_\lambda \delta^4(x-y)\ . \tag{11}$$

Tale funzione di Green è facilmente ottenibile in trasformata di Fourier, poichè per simmetria la funzione $\tilde G(p)$ in (10) deve avere una struttura della forma

$$\tilde G_{\mu\nu}(p) = A(p)\eta_{\mu\nu} + B(p) p_\mu p_\nu \tag{12}$$

ed imponendo la (11) si ottiene facilmente

$$A(p) = \frac{1}{p^2+m^2}\ , \qquad B(p) = \frac{1}{m^2} A(p)\ . \tag{13}$$

Tale propagatore descrive la propagazione di particelle (ed antiparticelle) reali e virtuali, come nel caso delle particelle di spin 0. Si noti che la polarizzazione longitudinale $\epsilon_\mu(p) \sim p_\mu$ non si propaga ma genera solo effetti di contatto (cioè proporzionali ad una delta di Dirac).

<u>Maxwell</u>

Per $m \to 0$ l'azione di Proca si riduce all'azione di Maxwell che descrive particelle di massa nulla e spin 1 (elicità 1)

$$S_{Max}[A_\mu] = \int d^4x \Big(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \Big) \tag{14}$$

le equazioni del moto ora sono

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0 \tag{15}$$

e corrispondono a metà delle equazioni di Maxwell nel vuoto. L'altra metà delle equazioni di Maxwell sono automaticamente soddifatte dalla relazione

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{16}$$

che infatti soddisfa alle identità di Bianchi

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \tag{17}$$

corrispondenti alle equazioni di Maxwell mancanti. Infatti sostituendo (16) in (17) si vede che tutti i termini ci cancellano due a due. Questa equazione può essere scritta anche in una forma equivalente usando il tensore completamente antisimmetrico $\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\partial_\nu F_{\lambda\rho} = 0 \ . \tag{18}$$

La novità di questa formulazione di particelle massless di spin 1 è la presenza di una simmetria di gauge

$$\delta A_\mu(x) = \partial_\mu \lambda(x) \tag{19}$$

che implica che l'azione descriva non tre ma solo due gradi di libertà: gli stati di spin massimo e minimo lungo la direzione del moto (elicità).

Equazioni di Maxwell

Accoppiando il campo A_μ ad una sorgente di carica conservata J^μ ($\partial_\mu J^\mu = 0$) si ha l'azione

$$S_{Max}[A_\mu] = \int d^4x \Big(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + A_\mu J^\mu \Big) \tag{20}$$

da cui si ottengono le equazioni di Maxwell con sorgente

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = -J_\nu \tag{21}$$

La conservazione della corrente è necessaria per la consistenza delle equazioni di Maxwell. Infatti

$$\partial^\mu \partial^\nu F_{\mu\nu} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \partial^\nu J_\nu = 0 \ . \tag{22}$$

Esplicitiamo queste equazioni separando gli indici in parti spaziali e parti temporali. Ponendo

$$\begin{aligned}
&A^\mu = (A^0, \vec{A}) = (\phi, \vec{A}) \ , \qquad A_\mu = (-\phi, \vec{A}) \\
&J^\mu = (\rho, \vec{J}) \ , \qquad \partial_\mu J^\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \\
&F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = \partial_t A_i + \partial_i \phi = -E_i \\
&F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i = \epsilon_{ijk} B_k
\end{aligned} \tag{23}$$

per cui il tensore campo elettromegnetico si può scrivere (in unità di Heaviside-Lorentz) come

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{24}$$

Inoltre

$$\begin{array}{ccccc} \partial^\mu F_{\mu 0} = -J_0 & \longrightarrow & \partial^i F_{i0} = \rho & \longrightarrow & \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \\ \partial^\mu F_{\mu i} = -J_i & \longrightarrow & \partial^j F_{ji} + \partial^0 F_{0i} = -J_i & \longrightarrow & \vec{\nabla} \times \vec{B} - \partial_t \vec{E} = \vec{J} \end{array} \tag{25}$$

che riconosciamo come le equazioni di Maxwell con sorgenti. Le altre equazioni di Maxwell (quelle senza sorgenti)

$$\begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0 \end{array} \tag{26}$$

sono similmente contenute in (17).

Soluzioni

Le equazioni del moto non hanno una soluzione univoca (anche fissando opportune condizioni iniziali) a causa della simmetria di gauge. Si può utilizzare l'invarianza di gauge per fissare delle condizioni (condizioni di gauge fixing) che permettono di trovare soluzioni inequivalenti per trasformazioni di gauge.

Scegliamo di fissare il gauge imponendo la condizione di Lorenz

$$\partial^\mu A_\mu = 0 \tag{27}$$

che può essere sempre imposta. Con questo vincolo le equazioni del moto libere si semplificano e diventano

$$\Box A_\mu = 0 \tag{28}$$

le cui soluzioni di onda piana sono

$$A_\mu(x) = \varepsilon_\mu(p) e^{ip\cdot x} \ , \quad p_\mu p^\mu = 0 \ , \quad p_\mu \varepsilon^\mu(p) = 0 \tag{29}$$

e contiene 3 polarizzazioni indipendenti. Di queste tre polarizzazioni, quella longitudinale ($\varepsilon_\mu(p) = p_\mu$) può essere rimossa usando le trasformazioni di gauge residue, cioè quelle trasformazioni di gauge che lasciano invariata la condizione di Lorenz (27). Rimangono quindi solo due polarizzazioni fisiche indipendenti che corrispondono alle due possibili elicità del fotone (elicità = proiezione dello spin lungo la direzione del moto).

Si potrebbero discutere anche le soluzioni in presenza di sorgenti esterne prefissate J_μ. Anche qui c'è la complicazione dovuta alla simmetria di gauge. In assenza di simmetrie di gauge la soluzione formale può essere ottenuta usando la corrispondente funzione di Green (ritardata, anticipata o con le condizione causali di Feynman, scelta dipendente delle condizioni al contorno imposte al problema): infatti la funzione di Green rappresenta la soluzione elementare corrispondente ad una sorgente puntiforme localizzata nel tempo e nello spazio (delta di Dirac):

$$\begin{array}{rcll} D(\partial_x)\phi(x) & = & J(x) & (eq.\ del\ moto) \\ D(\partial_x)G(x-y) & = & \delta^4(x-y) & (funz.\ di\ Green) \\ \phi(x) & = & \displaystyle\int d^4y\, G(x-y)J(y) & (soluzione\ formale) \end{array}$$

La complicazione dovuta alle simmetrie di gauge è associata la fatto che la funzione di Green non è univoca, infatti le equazioni del moto anche in presenza di condizioni al contorno non sono univocamente risolte (infatti si possono fare trasformazioni di gauge dipendenti dal tempo che non modificano gli osservabili fisici). Abbiamo già visto che la simmetria di gauge implica un vincolo sulle correnti esterne J_μ (devono necessariamente essere conservate $\partial^\mu J_\mu = 0$). In genere occorre fissare un gauge, cioè imporre delle condizioni aggiuntive sulle variabili dinamiche, in modo tale che la soluzione sia unica una volta fissate le condizioni al contorno. Qui sopra abbiamo brevemente discusso il gauge di Lorenz $\partial^\mu A_\mu = 0$ che ha la proprietá di essere manifestamente Lorentz invariante, però non fissa completamente il gauge. Una condizione piú restrittiva è il gauge di Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ che fissa completamente il gauge ma non è invariante di Lorentz (in altri sistemi inerziali i potenziali di gauge soddifano relazioni di gauge fixing diverse, anche se il campo elettromagnetico $F_{\mu\nu}$ rimane sempre come un tensore di rango due). Ricordiamo brevemente alcune conseguenze del gauge di Coulomb ($\partial_i A^i = 0$):

$$\Box A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) = -J^\mu \;\; \rightarrow \;\; \begin{cases} \Box A^0 - \partial^0(\partial_0 A^0) = -J^0 \\ \Box A^i - \partial^i(\partial_0 A^0) = -J^i \end{cases} \;\; \rightarrow \;\; \begin{cases} \nabla^2 A^0 = -\rho \\ \Box A^i = -J^i + \partial^i \partial_0 A^0 \end{cases} \tag{30}$$

da cui

$$\begin{cases} A^0(t,\vec{x}) = \int \frac{d^3y}{4\pi} \frac{\rho(t,y)}{|\vec{x}-\vec{y}|} \\ \Box A^i(t,\vec{x}) = -J^i(t,\vec{x}) + \partial^i_{(x)} \int \frac{d^3y}{4\pi} \frac{\partial_t \rho(t,y)}{|\vec{x}-\vec{y}|} \end{cases} \tag{31}$$

(si noti che abbiamo usato la relazione $\nabla^2_{(x)} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} = -4\pi\delta^3(\vec{x}-\vec{y})$).

Potenziale dovuto allo scambio di una particella di spin 1

Generalizziamo il potenziale di Yukawa al caso in cui la particella scambiata che genera il potenziale abbia spin 1 e sia massiva. Consideriamo sorgenti statiche con $J^\mu = (J^0, 0, 0, 0)$ e

$$J^0(x) = e_1 \delta^3(\vec{x} - \vec{r}) + e_2 \delta^3(\vec{x}) \; . \tag{32}$$

Calcolando l'azione efficace che descrive l'interazione tra la carica e_1 e la carica e_2 mediata dal campo massivo di spin 1 A_μ otteniamo

$$\begin{aligned} W[e_1, e_2] &= \int d^4x \, d^4y \, e_1 \delta^3(\vec{x} - \vec{r}) G_{00}(x-y) e_2 \delta^3(\vec{y}) \\ &= -\int dt \, e_1 e_2 \frac{e^{-mr}}{4\pi r} \end{aligned} \tag{33}$$

dove abbiamo usato la funzione di Green in (10). Si noti la differenza di segno rispetto al caso scalare che è dovuta ad $\eta_{00} = -1$. Il risultato finale corrisponde al seguente potenziale d'interazione tra le due cariche ($L = T - V$)

$$V(r) = \frac{e_1 e_2}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r} \tag{34}$$

Questo è un potenziale repulsivo tra cariche dello stesso segno. Il limite $m \rightarrow 0$ corrisponde al potenziale di Coulomb.