Richiami di meccanica classica

(Appunti per il corso di Fisica Teorica 1 - a.a. 2012/13)

Fiorenzo Bastianelli

1 Principio di minima azione

1.1 Formalismo lagrangiano

Consideriamo una particella non-relativistica di massa m che si muove in una sola dimensione con coordinata q, soggetta ad una forza conservativa $F = -\frac{\partial}{\partial q}V(q)$. L'equazione del moto di Newton è

$$m\ddot{q} = F \ .$$

Questa equazione può essere derivata da un principio d'azione. L'azione è un funzionale della traiettoria della particella $q(t)$ (cioè delle variabili dinamiche del sistema) ed associa un numero reale ad ogni funzione $q(t)$. In genere i sistemi fisici sono descritti da un'azione del tipo

$$S[q] = \int_{t_i}^{t_f} dt\, L(q,\dot{q}) \ , \qquad L(q,\dot{q}) = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q) \tag{1}$$

dove $L(q,\dot{q})$ è la lagrangiana. Il principio d'azione stabilisce che: *la traiettoria classica che congiunge due punti dello spazio delle configurazioni è quella che minimizza l'azione S*. Per dimostrare questa affermazione studiamo le condizioni di minimo. Variando la traiettoria $q(t)$ (con condizioni al bordo $q(t_i) = q_i$ e $q(t_f) = q_f$) in $q(t) + \delta q(t)$, dove $\delta q(t)$ è una variazione infinitesima arbitraria (con $\delta q(t_i) = \delta q(t_f) = 0$) ed imponendo che l'azione sia minimizzata dalla traiettoria $q(t)$ si ottiene

$$\begin{aligned}
0 &= \delta S[q] = S[q+\delta q] - S[q] \\
&= \int_{t_i}^{t_f} dt \left[m\dot{q}\delta\dot{q} - \frac{\partial V(q)}{\partial q}\delta q \right] = m\dot{q}\delta q\Big|_{t_i}^{t_f} - \int_{t_i}^{t_f} dt \left[m\ddot{q} + \frac{\partial V(q)}{\partial q} \right]\delta q \\
&= -\int_{t_i}^{t_f} dt \left[m\ddot{q} + \frac{\partial V(q)}{\partial q} \right]\delta q \ .
\end{aligned}$$

Poichè le variazioni $\delta q(t)$ sono funzioni arbitrarie, il minimo è raggiunto proprio quando la funzione $q(t)$ soddisfa le equazioni del moto classiche

$$m\ddot{q} + \frac{\partial V(q)}{\partial q} = 0 \ . \tag{2}$$

In generale, si ottengono le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\begin{aligned}
0 &= \delta S[q] = \delta \int_{t_i}^{t_f} dt\, L(q,\dot{q}) = \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} + \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial q}\delta q \right] \\
&= \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}}\delta q\Big|_{t_i}^{t_f} - \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial q} \right]\delta q \\
&= -\int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial q} \right]\delta q
\end{aligned}$$

da cui

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial q} = 0 \ . \tag{3}$$

Osservazioni:
1. Dimensioni dell'azione: $[S] = [\hbar] = [\text{energia} \times \text{tempo}] = ML^2T$.
2. Le equazioni lagrangiane del moto sono tipicamente del secondo ordine nel tempo, quindi ci si aspetta che in tali casi si possano imporre due "condizioni iniziali" (o condizioni al bordo), convenientemente scelte fissando la posizione al tempo iniziale e al tempo finale.
3. L'equazione del moto è esprimibile come la derivata funzionale dell'azione

$$\frac{\delta S[q]}{\delta q(t)} = 0 \tag{4}$$

dove la derivata funzionale è definita dalla variazione

$$\delta S[q] = \int dt \frac{\delta S[q]}{\delta q(t)} \delta q(t) \ .$$

4. Le equazioni del moto non cambiano se si aggiunge alla lagrangiana L una derivata totale, $L \to L' = L + \frac{d}{dt}\Lambda$.
5. Il formalismo lagrangiano si estende facilmente a sistemi con più gradi di libertà e, con un po' più di attenzione, a teorie di campo.

1.2 Formalismo hamiltoniano

L'idea di base del formalismo hamiltoniano è quella di avere equazioni del moto del primo ordine nel tempo. Introduciamo questo formalismo seguendo un esempio semplice. Per una particella non-relativistica di coordinate q^i la lagrangiana nello spazio delle configurazioni è data da

$$L(q,\dot{q}) = \frac{m}{2}\dot{q}^i\dot{q}_i - V(q) \tag{5}$$

dove gli indici delle coordinate sono abbassati con la metrica δ_{ij} e gli indici ripetuti sono automaticamente sommati su tutti i possibili valori (nel moto che avviene in uno spazio euclideo piatto, descritto in coordinate cartesiane, indici in alto ed indici in basso sono equivalenti, ma questa distinzione sarà utile in contesti più generali). Il passaggio alla formulazione hamiltoniana avviene nel seguente modo:
1) Si raddoppiano le variabili dinamiche, introducendo per ogni coordinata il corrispondente momento coniugato

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = m\dot{q}_i \ . \tag{6}$$

2) Si definisce l'hamiltoniana H come trasformata di Legendre della lagrangiana L

$$H(q^i, p_i) \equiv p_i\dot{q}^i - L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2m}p^ip_i + V(q) \ . \tag{7}$$

3) Si definiscono le parentesi di Poisson. Per due funzioni A e B definite sullo spazio delle fasi le parentesi di Poisson assumono la forma

$$\{A,B\} = \frac{\partial A}{\partial q^i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial q^i}\frac{\partial A}{\partial p_i} \tag{8}$$

dove abbiamo usato la convenzione di sommatoria per indici ripetuti. Si noti in particolare che

$$\{q^i, p_j\} = \delta^i_j \ , \quad \{q^i, q^j\} = 0 \ , \quad \{p_i, p_j\} = 0 \ . \tag{9}$$

4) Le equazioni del moto hamiltoniane sono scrivibili nella forma

$$\dot{q}^i = \{q^i, H\} \ , \qquad \dot{p}_i = \{p_i, H\} \tag{10}$$

e sono del primo ordine nel tempo. Nel nostro esempio queste equazioni diventano

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p^i}{m} \ , \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} = -\frac{\partial V}{\partial q^i} \tag{11}$$

e sono equivalenti alle equazioni del moto lagrangiane $m\ddot{q}^i = -\frac{\partial V}{\partial q^i}$. La hamiltoniana è tipicamente interpretata come generatore delle traslazioni temporali (e dunque come generatore del moto): sposta le condizioni iniziali (un punto nello spazio delle fasi) nel tempo di una quantità infinitesima dt. Il generatore di queste trasformazioni canoniche è quindi dato da Hdt, che agisce tramite le parentesi di Poisson ($\delta q = \{q, Hdt\}$, $\delta p = \{p, Hdt\}$).

Anche queste equazioni possono essere dedotte dal principio d'azione. Nello spazio delle fasi l'azione prende la forma

$$S[q,p] = \int_{t_i}^{t_f} dt \left(p_i \dot{q}^i - H(q,p) \right) \tag{12}$$

per cui

$$\begin{aligned} 0 \ = \ \delta S &= \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\delta p_i \dot{q}^i + p_i \delta \dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q^i} \delta q^i \right) \\ &= p_i \delta q^i \Big|_{t_i}^{t_f} + \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\delta p_i \Big(\dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \Big) - \delta q^i \Big(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q^i} \Big) \right] \end{aligned}$$

e da qui si riconoscono le equazioni del moto di Hamilton. Si noti che in questa formulazione occorrono $2n$ costanti di integrazione, scelte come le $2n$ condizioni imposte sulle coordinate q^i al tempo iniziale e finale.

1.3 Esempi

1.3.1 Particella in potenziale scalare

Consideriamo il moto di una particella nello spazio euclideo piatto, descritto con coordinate cartesiane x^i, in presenza di un potenziale scalare $V(x)$ (in coordinate cartesiane $ds^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j = dx^i dx_i = dx^i dx^i$, per cui indici in alto ed indici in basso sono equivalenti).

Formalismo lagrangiano

La lagrangiana prende la forma

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2} \dot{x}^i \dot{x}_i - V(x) \tag{13}$$

e dalla variazione dell'azione $S[x(t)] = \int dt \ L(x, \dot{x})$ si ottengono le equazioni del moto

$$m \ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x^i} \ . \tag{14}$$

Formalismo hamiltoniano

Ricaviamo i momenti coniugati

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = m\dot{x}_i \tag{15}$$

l'hamiltoniana

$$H(x,p) = p_i\dot{x}^i - L(x,\dot{x}) = \frac{1}{2m}p_ip^i + V(x) \tag{16}$$

e le equazioni del moto

$$\begin{aligned} \dot{x}^i &= \{x^i, H\} = \frac{p^i}{m} \\ \dot{p}_i &= \{p_i, H\} = -\frac{\partial V}{\partial x^i} \ . \end{aligned} \tag{17}$$

Queste sono equazioni differenziali del primo ordine nel tempo, equivalenti a quelle lagrangiane in (14).

1.3.2 Particella in potenziale vettore

Consideriamo ora una particella in interazione con un potenziale vettore $A_i(x)$, come avviene ad esempio studiando il moto di una particella di massa m e carica q in un campo magnetico $B^i = \epsilon^{ijk}\partial_j A_k$ (ovvero $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$).

Formalismo lagrangiano

La lagrangiana appropriata è data da

$$L(x,\dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^i\dot{x}_i + qA_i(x)\dot{x}^i \ . \tag{18}$$

Dalla variazione dell'azione $S[x(t)] = \int dt\ L(x,\dot{x})$ si ottengono le equazioni del moto

$$m\ddot{x}_i = q(\partial_i A_j - \partial_j A_i)\dot{x}^j \tag{19}$$

riscrivibili in funzione del campo magnetico come

$$m\ddot{x}_i = q\epsilon_{ijk}\dot{x}^jB^k \qquad (m\ddot{\vec{x}} = q\ \dot{\vec{x}} \times \vec{B}) \ . \tag{20}$$

Infatti possiamo invertire la relazione $B^i = \epsilon^{ijk}\partial_j A_k$ per ottenere $(\partial_i A_j - \partial_j A_i) = \epsilon_{ijk}B^k$.

Formalismo hamiltoniano

Ricaviamo i momenti coniugati

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = m\dot{x}_i + qA_i(x) \tag{21}$$

l'hamiltoniana

$$H(x,p) = p_i\dot{x}^i - L(x,\dot{x}) = \frac{1}{2m}\big(p_i - qA_i(x)\big)^2 \tag{22}$$

e le equazioni del moto

$$\begin{aligned} \dot{x}^i &= \{x^i, H\} = \frac{1}{m}(p^i - qA^i) \\ \dot{p}_i &= \{p_i, H\} = \frac{q}{m}(\partial_i A_j)(p^j - qA^j) \ . \end{aligned} \tag{23}$$

Queste sono equazioni differenziali del primo ordine nel tempo, equivalenti a quelle lagrangiane.

È spesso utile introdurre la definizione di momento covariante π_i

$$\pi_i = p_i - qA_i(x)$$

che soddisfa alle parentesi di Poisson

$$\{\pi_i, \pi_j\} = qF_{ij}$$

dove $F_{ij} \equiv \partial_i A_j - \partial_j A_i = \epsilon_{ijk} B^k$ descrive il campo magnetico. Con la quantizzazione questo momento diventa una derivata (gauge) covariante. In termini del momento covariante le equazioni del moto prendono la forma

$$\dot{x}^i = \frac{1}{m}\pi^i \qquad \dot{\pi}_i = \frac{q}{m} F_{ij}\pi^j \ . \tag{24}$$

Invarianza di gauge

Lo stesso campo magnetico può essere descritto da potenziali vettori diversi, collegati da una trasformazione di gauge. Infatti, potenziali collagati dalla trasformazione

$$A_i(x) \ \to \ A'_i(x) = A_i(x) + \partial_i \Lambda(x) \ , \tag{25}$$

caratterizzata da una funzione arbitraria della posizione $\Lambda(x)$, identificano le stesso campo magnetico ($B'^i = B^i$). Le equazioni del moto (20), che dipendono solo dal campo magnetico, sono dunque invarianti. Questo è anche visibile direttamente dalla lagrangiana: per una trasformazione di gauge la lagrangiana cambia solo per una derivata totale, che in effetti non modifica le equazioni del moto

$$L(x, \dot{x}; A') = L(x, \dot{x}; A) + q\ \dot{x}^i \partial_i \Lambda = L(x, \dot{x}; A) + q\frac{d\Lambda}{dt}$$

dove la notazione $L(x, \dot{x}; A)$ indica la lagrangiana (18) che dipende dal potenziale A_i.

Nel formalismo hamiltoniano una trasformazione di gauge agisce sui momenti coniugati

$$p_i \ \to \ p'_i = p_i + q\partial_i \Lambda$$

ma lascia invariati i momenti covarianti π_i.

1.3.3 Particella in potenziale tensoriale: particella in spazio curvo

Consideriamo ora il moto di una particella in uno spazio curvo con metrica descritta in coordinate arbitrarie da

$$ds^2 = g_{ij}(x) dx^i dx^j \ .$$

Formalismo lagrangiano

La lagrangiana contiene solo il termine di energia cinetica e prende la forma

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2} g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j \tag{26}$$

e dalla variazione dell'azione $S[x(t)] = \int dt\ L(x, \dot{x})$ si ottengono le equazioni del moto

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i_{jk} \dot{x}^j \dot{x}^k = 0 \tag{27}$$

dove i simboli di Christoffel (le componenti della connessione metrica), definiti da

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{im} (\partial_j g_{km} + \partial_k g_{jm} - \partial_m g_{jk}) \tag{28}$$

con g^{ij} il tensore inverso della metrica ($g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k$), emergono automaticamente dal principio variazionale. Queste equazioni descrivono le geodetiche dello spazio curvo (a volte indicate con $\frac{D\dot{x}^i}{dt} = 0$).

Formalismo hamiltoniano

Ricaviamo i momenti coniugati

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = m g_{ij}(x) \dot{x}^j \tag{29}$$

l'hamiltoniana

$$H(x,p) = p_i \dot{x}^i - L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2m} g^{ij}(x) p_i p_j \tag{30}$$

e le equazioni del moto

$$\begin{aligned} \dot{x}^i &= \{x^i, H\} = \frac{1}{m} g^{ij} p_j \\ \dot{p}_i &= \{p_i, H\} = -\frac{1}{2m} (\partial_i g^{kl}) p_k p_l \, . \end{aligned} \tag{31}$$

Invarianza per cambio di coordinate

Il moto della particella non dipende dalle coordinate scelte per la descrizione dello spazio curvo. Infatti per cambio di coordinate il tensore metrico si trasforma in modo tale da lasciare invariato l'elemento di lunghezza, $ds^2 = g_{ij}(x) dx^i dx^j = g'_{ij}(x') dx'^i dx'^j$. In particolare si trasforma come

$$\begin{aligned} x^i &\to x'^i = x'^i(x) \\ g_{ij}(x) &\to g'_{ij}(x') = g_{kl}(x) \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} \, . \end{aligned} \tag{32}$$

Vediamo esplicitamente l'invarianza per un cambio di coordinate infinitesimo definito da

$$x^i \to x'^i = x^i - \xi^i(x) \tag{33}$$

con $\xi^i(x)$ campo vettoriale infinitesimo (per cui $\delta x^i \equiv x^{i\prime} - x^i = -\xi^i$).

Dalla eq. (32) vediamo che la metrica subisce la seguente trasformazione funzionale

$$\delta g_{ij} \equiv g'_{ij}(x) - g_{ij}(x) = \xi^k \partial_k g_{ij} + \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} g_{kj} + \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} g_{ik} \tag{34}$$

dove abbiamo calcolato la differenza tra la nuova funzione g'_{ij} e la vecchia funzione g_{ij} calcolate nello stesso punto x (quindi compare anche un termine di trasporto dal punto x' al punto x). È facile vedere che sotto queste trasformazioni infinitesime la lagrangiana rimane invariante

$$\delta L(x, \dot{x}) = m g_{ij} \delta \dot{x}^i \dot{x}^j + \frac{m}{2} (\delta x^k \partial_k g_{ij}) \dot{x}^i \dot{x}^j + \frac{m}{2} \delta g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j = 0 \, . \tag{35}$$

Questa simmetria è tecnicamente denominata simmetria di "background" in quanto non si trasformano solo le variabili dinamiche $x^i(t)$, ma anche le funzioni $g_{ij}(x)$ che descrivono i potenziali delle forze esterne (background).

2 Simmetrie e teorema di Noether

L'analisi delle simmetrie di un sistema fisico è molto utile per identificare le equazioni del moto che lo descrivono. Si può definire il concetto di simmetria nel modo seguente:
Una simmetria è una trasformazione delle variabili dinamiche $q(t)$, indotta eventualmente da una trasformazione del parametro temporale t,

$$\begin{aligned} t &\longrightarrow \quad t' = f(t) \\ q(t) &\longrightarrow \quad q'(t') = F(q(t), t) \end{aligned} \tag{36}$$

che lascia invarianti in forma le equazioni del moto.
Poichè le equazioni del moto sono invarianti in forma, esse ammettono lo stesso tipo di soluzioni e non si può stabilire se siamo nel "vecchio sistema di riferimento" o nel "nuovo sistema di riferimento". Questi sistemi di riferimento sono quindi da trattare sullo stesso piano, senza che uno di essi possa essere identificato come privilegiato. Un test per verificare se una trasformazione è una simmetria fa uso dell'azione. Se l'azione è invariante sotto la trasformazione (36) a meno di termini di bordo, che possono emergere come integrali di derivate totali e che quindi non modificano le equazioni del moto lagrangiane (vedi osservazione n.4 a pagina 2),

$$S[q'] = S[q] \ + \ \text{termini di bordo} \tag{37}$$

allora la trasformazione è una simmetria; infatti le equazioni dedotte dal principio di minima azione sono le stesse in forma, essendo ottenibili da azioni identiche.

Un sistema fisico può presentare diversi tipi di simmetria: simmetrie discrete, simmetrie continue (associate quindi ad un gruppo di Lie), simmetrie locali (dette anche simmetrie di gauge). Un concetto ancor più generale è quello di "simmetria di background": sono descritte da trasformazioni generalizzate in cui si trasformano anche i parametri della teoria e/o eventuali potenziali esterni (per cui non sono simmetrie vere e proprie nel senso definito sopra, ma collegano soluzioni di una teoria con certi parametri alle soluzioni della teoria con parametri trasformati).

Per simmetrie di Lie, cioè simmetrie che dipendono in modo continuo da alcuni parametri, si può dimostrare il teorema di Noether, che afferma che:
Per ogni parametro continuo del gruppo di simmetria esiste una carica conservata. In teorie di campo, questa conservazione è espressa tramite una equazione di continuità.
Dimostriamo questo teorema per una teoria di campo arbitraria, che include come sottocaso anche sistemi con un numero finito di gradi di libertà. Indichiamo con x^μ le coordinate spaziotemporali e collettivamente con $\phi(x)$ le variabili dinamiche. Una trasformazione di simmetria che dipende da un parametro α può essere descritta in modo generale da

$$\begin{aligned} x'^\mu &\longrightarrow \quad x'^\mu = f^\mu(x, \alpha) \\ \phi(x) &\longrightarrow \quad \phi'(x') = F(\phi(x), x, \alpha) \end{aligned} \tag{38}$$

dove per definizione si ottiene la trasformazione identità per $\alpha = 0$. Le trasformazioni infinitesime (con parametro $\alpha \ll 1$) si possono scrivere nel seguente modo

$$\delta_\alpha \phi(x) \equiv \phi'(x) - \phi(x) = \alpha G(\phi(x), x) \tag{39}$$

con un'opportuna funzione G ottenibile dalla F in (38). Ora per provare che esiste una grandezza conservata associata a questa simmetria, estendiamo la trasformazione di simmetria ad una trasformazione più generale con parametro $\alpha(x)$ non più costante ma funzione arbitraria dipendente dal tempo e dallo spazio

$$\delta_{\alpha(x)}\phi(x) = \alpha(x)G(\phi(x), x) \ . \tag{40}$$

In generale questa trasformazione non sarà una simmetria, ma possiamo certamente affermare che l'azione si trasforma nel seguente modo

$$\delta_{\alpha(x)}S[\phi] = \int d^n x \ \partial_\mu \alpha(x) J^\mu \tag{41}$$

a meno di termini di bordo (integrali di derivate totali). Infatti, se prendiamo il caso di α costante sappiamo che l'azione deve essere invariante perchè per ipotesi abbiamo una simmetria. Quindi, per una funzione α arbitraria, la variazione non può dipendere direttamente da α, ma solo dalle sue derivate. Ora la corrente J^μ che compare in (41) è la corrente che soddisfa l'equazione di continuità (associata alla conservazione di una carica corrispondente). Per vederlo usiamo le equazioni del moto, che rendono nulla la variazione dell'azione sotto qualunque trasformazione (principio di minima azione) e in particolare sotto le trasformazioni con parametro locale descritte in (40)

$$0 = \delta_{\alpha(x)}S[\phi]\bigg|_{\phi_0} = \int d^n x \ \partial_\mu \alpha(x) J^\mu \bigg|_{\phi_0} = -\int d^n x \ \alpha(x) \partial_\mu J^\mu \bigg|_{\phi_0} \qquad \Longrightarrow \qquad \partial_\mu J^\mu(\phi_0) = 0$$

dove abbiamo integrato per parti ed usato l'arbitrarietà della funzione $\alpha(x)$ per dedurre l'equazione di continuità. Si noti che dobbiamo valutare la variazione dell'azione nel punto di minimo, indicato con ϕ_0, che sappiamo risolvere le equazioni del moto di Eulero-Lagrange. Conseguentemente la corrente conservata J_μ deve essere valutata sulla soluzione delle equazioni del moto (qui indicato con $J^\mu(\phi_0)$). Questo tipo di simmetrie di Lie sono dette <u>simmetrie rigide</u> o <u>simmetrie globali</u> ed ad ogni parametro del gruppo di Lie è associata una carica conservata Q

$$Q = \int d^3x \, J^0 \ . \tag{42}$$

Questa carica è conservata perchè possiamo calcolare

$$\frac{d}{dt}Q = \int d^3x \, \partial_0 J^0 = -\int d^3x \, \partial_i J^i = 0 \tag{43}$$

dove si è assunto che le componenti spaziali della corrente vadano a zero in modo sufficientemente veloce da annullare il termine di bordo.

Le simmetrie di Lie in cui il parametro è una funzione arbitraria del tempo (e dello spazio) sono dette <u>simmetrie locali</u> o <u>simmetrie di gauge</u>. Il metodo precedente non permette di ottenere nessuna equazione di continuità perchè ora la variazione dell'azione è sempre zero, per qualunque parametro locale e senza usare le equazioni del moto. La presenza di simmetrie locali ci dice che le variabili dinamiche che stiamo usando sono ridondanti, perchè con una trasformazione di gauge possiamo modificare arbitrariamente l'evoluzione temporale di una opportuna combinazione delle variabili dinamiche, combinazione la cui evoluzione non è evidentemente fissata dalle equazioni del moto.

Questi due tipi di simmetria sono esemplificati negli esempi seguenti.

2.1 Particella non relativistica

Consideriamo il caso di una particella non relativistica libera. Ci proponiamo di studiarne l'invarianza per trasformazioni generate dal gruppo di Galileo, ottenendo le corrispondenti cariche conservate, come garantito dal teorema di Noether.

Prendiamo le coordinate cartesiane della particella $x^i(t) \in R^3$ come variabili dinamiche. Poichè la metrica euclidea è data da δ_{ij}, la posizione degli indici in alto o in basso è ininfluente. L'azione è data dall' integrale temporale della lagrangiana, che per una particella libera coincide con la sua energia cinetica

$$S[x^i(t)] = \int dt \, \frac{m}{2} \dot{x}^i \dot{x}^i \tag{44}$$

e le equazioni del moto sono ottenute minimizzando l'azione

$$\frac{\delta S[x]}{\delta x^i(t)} \equiv -m\ddot{x}^i = 0 \ . \tag{45}$$

Traslazioni spaziali: La trasformazione delle variabili dinamiche per traslazioni spaziali è data da

$$\delta x^i(t) = a^i \tag{46}$$

con a^i vettore infinitesimo costante; abbiamo usato la definizione $\delta x^i(t) \equiv x'^i(t) - x^i(t)$ che collega le variabili dinamiche trasformate con le vecchie variabili dinamiche. Si verifica immediatamente che sotto (46) l'azione è invariante

$$\delta S[x] = 0 \tag{47}$$

quindi la trasformazione (46) è una simmetria: poichè l'azione è invariante le equazioni del moto sono invarianti in forma, come facilmente verificabile.

Usiamo ora il metodo di Noether per trovare le cariche conservate. Estendiamo le trasformazioni in (46) alle trasformazioni più generali dipendenti da un vettore $a^i(t)$ dipendente dal tempo

$$\delta x^i(t) = a^i(t) \ . \tag{48}$$

L'azione non sarà più invariante ed infatti un calcolo esplicito produce

$$\delta S[x] = \int dt \, \underbrace{m\dot{x}^i}_{p^i} \dot{a}^i \ . \tag{49}$$

Il termine che moltiplica $\dot{a}^i$ identifica la carica conservata: il momento lineare p^i. Per provarne la conservazione dobbiamo usare le equazioni del moto, che implicano che $\delta S = 0$ per ogni variazione ed in particolare per una variazione della forma (48). Indichiamo ora con $x^i(t)$ la soluzione delle equazioni del moto: integrando per parti ed usando l'arbitrarietà delle funzioni $a^i(t)$ si deduce che $p^i = m\dot{x}^i$ è conservato

$$0 = \delta S[x^i(t)] = \int dt \, p^i(t)\dot{a}^i(t) = -\int dt \, \dot{p}^i(t) a^i(t) \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{p}^i(t) = 0 \ . \tag{50}$$

Dunque il momento lineare $p^i = m\dot{x}^i$ è conservato durante l'evoluzione del sistema come conseguenza dell'invarianza traslazionale nello spazio.

Traslazione temporale: Anche una traslazione temporale è un'invarianza del sistema. Se trasliamo il tempo di una grandezza infinitesima ϵ

$$t \to t' = t - \epsilon \tag{51}$$

e se richiediamo che la funzioni $x^i(t)$ siano funzioni scalari

$$x^i(t) \quad \to \quad x'^i(t') = x^i(t) \tag{52}$$

allora l'azione è invariante. Esprimiamo questa trasformazione delle variabili dinamiche in termini della variazione $\delta x^i(t) \equiv x'^i(t) - x^i(t)$, con funzioni valutate in termini della stessa variabile t,

$$\begin{aligned} \delta x^i(t) &= x'^i(t) - x^i(t) \ = \ x'^i(t) - x^i(t) + x'^i(t') - x'^i(t') \\ &= x'^i(t) - x'^i(t') + \underbrace{x'^i(t') - x^i(t)}_{=0} \ = \ (t-t')\dot{x}'^i(t') \ = \ \epsilon\, \dot{x}^i(t) \end{aligned}$$

relazione valida a meno di termini di ordine ϵ^2. Usando ora una funzione arbitraria $\epsilon(t)$

$$\delta x^i(t) = \epsilon(t)\dot{x}^i(t) \tag{53}$$

possiamo verificare l'invarianza ed ottenere direttamente la carica conservata. Infatti variando l'azione sotto le trasformazioni (53) otteniamo

$$\delta S[x] = \int dt\ m\dot{x}^i\partial_t(\epsilon\dot{x}^i) = \int dt\ \Big[\partial_t\Big(\frac{\epsilon m}{2}\dot{x}^i\dot{x}^i\Big) + \dot{\epsilon}\frac{m}{2}\dot{x}^i\dot{x}^i\Big] = \int dt\ \dot{\epsilon}\ \underbrace{\Big(\frac{m}{2}\dot{x}^i\dot{x}^i\Big)}_{E} \tag{54}$$

dove abbiamo trascurato termini di bordo (le derivate totali). Da questo calcolo possiamo dedurre immediatamente due cose:
(i) se ϵ è costante allora $\dot{\epsilon} = 0$ e quindi $\delta S[x] = 0$, per cui la trasformazione corrispondente è una simmetria;
(ii) usando le equazioni del moto ($\delta S[x]|_{x(t)=x_{cl}(t)} = 0$ per qualunque variazione) ed integrando per parti deduciamo che $\dot{E} = 0$, quindi l'energia cinetica $E = \frac{m}{2}\dot{x}^i\dot{x}^i$ è conservata sulle soluzioni delle equazioni del moto come conseguenza dell'invarianza per traslazioni temporali.
Rotazioni spaziali: Per rotazioni spaziali le coordinate si trasformano nel seguente modo

$$\delta x^i = \epsilon^{ijk}\omega^j x^k \tag{55}$$

dove il vettore ω^i descrive una rotazione infinitesima. Considerando subito ω^i come funzione arbitraria del tempo otteniamo

$$\delta S[x] = \int dt\ \dot{\omega}^i\ \underbrace{\epsilon^{ijk}x^j m\dot{x}^k}_{(\vec{r}\times\vec{p})^i\equiv L^i}\ . \tag{56}$$

Di nuovo, per ω^i costante si ha una simmetria. Le corrispondenti cariche conservate sono le tre componenti del vettore momento angolare L^i.
Trasformazioni galileiane proprie: Indichiamo con trasformazioni galileiane proprie le trasformazioni tra due sistemi di riferimento inerziali in moto relativo con velocità relativa costante v^i. La trasformazione sulle variabili dinamiche è data quindi da

$$\delta x^i = v^i t \tag{57}$$

e procedendo come in precedenza, cioè estendendo i parametri della trasformazione a funzioni arbitrarie del tempo, si calcola a meno di termini di bordo

$$\delta S[x] = \int dt \ \dot{v}^i \underbrace{\left(m\dot{x}^i t - mx^i\right)}_{G^i} \tag{58}$$

da cui si deduce che per v^i costanti si ha una simmetria a cui corrisponde la conservazione del vettore $G^i = m\dot{x}^i t - mx^i$, come si può facilmente verificare usando le equazioni del moto.

Per concludere, abbiamo visto come all'invarianza della particella libera non relativistica sotto le trasformazioni del gruppo di Galileo, un gruppo di Lie a 10 parametri, corrispondono 10 grandezze conservate.

2.2 Particella relativistica

Studiamo ora il principio d'azione che descrive la propagazione di una particella relativistica, che per definizione deve essere consistente con l'invarianza per trasformazioni di Lorentz e, più in generale, di Poincaré. Studieremo quattro descrizioni equivalenti in alcune delle quali, si farà uso anche di simmetrie di gauge.

(I) Consideriamo la descrizione del moto della particella come visto da un sistema di riferimento inerziale con coordiante cartesiane $x^\mu = (x^0, x^i) = (t, x^i)$. Per semplicità abbiamo posto $c = 1$. Consideriamo come variabili dinamiche le funzioni posizione $x^i(t)$. Imponendo l'invarianza dell'azione per trasformazioni di Lorentz garantisce l'invarianza relativistica. Questa richiesta si può realizzare facilmente utilizzando il tempo proprio θ, che per un moto infinitesimo è dato da $d\theta = \sqrt{-ds^2} = \sqrt{-dx^\mu dx_\mu} = \sqrt{dt^2 - dx^i dx^i} = dt\sqrt{1 - \dot{x}^i\dot{x}^i}$. Da nozioni elementari di relatività ristretta sappiamo che il tempo proprio è un invariante relativistico. Quindi la seguente azione, proporzionale al tempo proprio,

$$S_I[x^i(t)] = -m \int d\theta = -m \int dt \ \sqrt{1 - \dot{x}^i(t)\dot{x}^i(t)} \tag{59}$$

con m massa della particella, è automaticamente invariante per trasformazioni di Lorentz (e di Poincarè). Inoltre nel limite non relativistico $(\dot{x}^i)^2 \ll 1$ questa azione riproduce l'azione della particella non relativistica. Le equazioni del moto sono ottenute dal principio di minima azione

$$\delta S_I[x^i] = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}^i}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}\dot{\vec{x}}}}\right) = 0 \ . \tag{60}$$

Le simmetrie rigide sono quelle generate dal gruppo di Poincarè. Non ci sono simmetrie di gauge e le tre variabili dinamiche sono tutte "fisiche". Si noti il significato geometrico dell'azione: l'azione è proporzionale alla lunghezza della linea di mondo percorsa dalla particella, lunghezza di tipo tempo equivalente al tempo proprio (sono infatti la stessa cosa).

(II) La formulazione precedente è corretta, ma sarebbe preferibile trattare le coordinate spaziali x^i e la coordinata temporale $x^0 \equiv t$ in un modo più simmetrico allo scopo di tenere più facilmente sotto controllo l'nvarianza relativistica. Sarebbe quindi preferibile usare quattro variabili dinamiche, le x^μ, ma una di loro, o più in generale una loro combinazione, dovrà essere ridondante affinchè si possa avere l'equivalenza con l'azione precedente: questo è possibile se ci sono simmetrie locali (dette anche simmetrie di "gauge"). Questo si ottiene nel modo seguente: indichiamo con $x^\mu(\tau)$ le variabili dinamiche che descrivono la linea di mondo percorsa dalla

particella. Il parametro τ è semplicemente un parametro temporale arbitrario che parametrizza la linea di mondo della particella. L'azione che cerchiamo è geometricamente sempre la stessa, proporzionale al tempo proprio, e prende la forma

$$S_{II}[x^\mu(\tau)] = -m \int d\tau \ \sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu} \tag{61}$$

dove ora $\dot{x}^\mu \equiv \frac{d}{d\tau} x^\mu$. Le equazioni del moto sono

$$\delta S_{II}[x^\mu] = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{d}{d\tau}\left(\frac{m\dot{x}^\mu}{\sqrt{-\dot{x}^\nu \dot{x}_\nu}}\right) = 0 \ . \tag{62}$$

Le simmetrie rigide sono quelle generate dal gruppo di Poincarè

$$\delta x^\mu(\tau) = \omega^\mu{}_\nu x^\nu(\tau) + a^\mu \tag{63}$$

dove $\delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu{}_\nu$ identifica una trasformazione di Lorentz infinitesima: questo garantisce che il modello sia relativistico. In aggiunta c'è anche una simmetria di gauge

$$\delta x^\mu = \xi(\tau)\dot{x}^\mu(\tau) \tag{64}$$

dove il parametro infinitesimo $\xi(\tau)$ che genera la simmetria è locale, cioè dipende arbitrariamente dal parametro temporale τ. Sotto le trasformazioni generate dalla (64) l'azione è invariante a meno di termini di bordo

$$\delta S_{II}[x^\mu] = \int d\tau \ \frac{d}{d\tau}\Big(\xi L_{II}\Big) \sim 0 \tag{65}$$

dove L_{II} è la lagrangiana (l'integrando in (61)). Questa simmetria locale corrisponde geometricamente ad una riparametrizzazione della linea d'universo

$$\begin{aligned} \tau \ &\longrightarrow \ \tau' = f(\tau) \\ x^\mu(\tau) \ &\longrightarrow \ x'^\mu(\tau') = x^\mu(\tau) \end{aligned} \tag{66}$$

che per trasformazioni infinitesime $\tau' = \tau - \xi(\tau)$ si riduce alla (64) (i matematici chiamano questa simmetria un diffeomorfismo della linea di mondo). Questa simmetria di gauge è necessaria per mostrare l'equivalenza con la formulazione I. L'equivalenza è ottenibile operando una trasformazione di gauge (una riparametrizzazione della linea d'universo) per fissare una delle variabili dinamiche, cioè per "fissare il gauge". Infatti si può imporre la condizione ("scelta del gauge")

$$x^0(\tau) = \tau \tag{67}$$

cosicchè la variabile $x^0(\tau)$ non è piu dinamica: la sua evoluzione temporale è stata fissata dalla scelta del gauge, che corrisponde all'uso di x^0 come parametro per indicare i vari punti della linea di mondo della particella. Questo riproduce l'azione I.

(III) Una terza formulazione è tramite l'uso di un "campo di gauge", cioè di una variabile dinamica la cui trasformazione di gauge contiene la derivata del parametro di simmetria locale (detto anche parametro di gauge). Nel caso specifico si usa il campo di gauge $e(\tau)$ detto einbein (dal tedesco "una gamba") e l'azione è data da

$$S_{III}[x^\mu(\tau), e(\tau)] = \int d\tau \ \frac{1}{2}(e^{-1}\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu - em^2) \ . \tag{68}$$

La simmetria locale prende la forma

$$\begin{aligned}\delta x^\mu &= \xi \dot{x}^\mu \\ \delta e &= \frac{d}{d\tau}(\xi e)\end{aligned} \tag{69}$$

che difatti comporta $\delta S_{III} = \int d\tau \, \frac{d}{d\tau}(\xi L_{III}) \sim 0$. Si noti che il campo di gauge e contiene la derivata del parametro locale ξ. Le simmetrie globali sono le ovvie trasformazioni di Poincarè

$$\begin{aligned}\delta x^\mu(\tau) &= \omega^\mu{}_\nu x^\nu(\tau) + a^\mu \\ \delta e(\tau) &= 0\ .\end{aligned}$$

Le equazioni del moto sono

$$\frac{\delta S[x,e]}{\delta e(\tau)} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad e^{-2}\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu + m^2 = 0 \tag{70}$$

$$\frac{\delta S[x,e]}{\delta x^\mu(\tau)} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \frac{d}{d\tau}(e^{-1}\dot{x}^\mu) = 0\ . \tag{71}$$

Per mostrare l'equivalenza con la formulazione II, risolviamo l'equazione algebrica (70) assumendo che l'einbein e sia diverso da zero e quindi invertibile

$$e = \pm\frac{1}{m}\sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}\ . \tag{72}$$

Sostituendo questa relazione in S_{III} si ottiene

$$S_{III}\left[x^\mu(\tau), e(\tau) = \pm\frac{1}{m}\sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}\right] = \mp m \int d\tau\ \sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}\ . \tag{73}$$

Scegliendo la soluzione con $e > 0$ si riottiene la formulazione II. La presenza dell'altra soluzione è un segnale dell'esistenza delle antiparticelle. Inoltre l'azione III è superiore alle precedenti in quanto include anche il caso di particella senza massa, basta porre $m = 0$ nell'azione.

Si può utilizzare l'invarianza di gauge per fissare una condizione (condizione di gauge-fixing). Scegliendo di fissare questa condizione sull'einbein, ad esempio con la scelta $e = 1$ (condizione possibile solo se si ignorano complicazioni topologiche), l'azione (68) si semplifica,

$$S[x^\mu(\tau)] = \int d\tau\ \frac{1}{2}\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu\ .$$

Ma occorre ricordarsi dell'equazione del moto di e, che con la condizione di gauge imposta diventa $\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu + m^2 = 0$. Questa azione semplificata con il vincolo associato è dunque essenzialmente equivalente all' azione gauge invariante.

(IV) Infine passiamo ad una quarta formulazione, equivalente alle precedenti ma utile per la quantizzazione canonica. È la formulazione hamiltoniana

$$S_{IV}[x^\mu(\tau), p_\mu(\tau), e(\tau)] = \int d\tau \left(p_\mu \dot{x}^\mu - \frac{e}{2}(p^\mu p_\mu + m^2)\right) \tag{74}$$

dove x^μ sono le coordinate della particella nello spazio-tempo, p_μ i momenti coniugati ed e l'einbein. La simmetria di gauge può essere scritta nella forma

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= \zeta p^\mu \\ \delta p_\mu &= 0 \\ \delta e &= \dot{\zeta} \end{aligned} \tag{75}$$

sotto cui $\delta S_{IV} = \int d\tau \, \frac{d}{d\tau}[\frac{\zeta}{2}(p^2 - m^2)] \sim 0$. Eliminando i momenti p_μ tramite le loro equazioni del moto algebriche

$$\frac{\delta S_{IV}}{\delta p_\mu} = \dot{x}^\mu - e p^\mu = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad p^\mu = e^{-1} \dot{x}^\mu \tag{76}$$

si ottiene la formulazione III (anche la simmetria di gauge è riprodotta con la seguente relazione tra i parametri di gauge $\zeta = e\xi$).

Si noti la struttura dell'azione S_{IV} che dipende dalle coordinate delle spazio delle fasi (x^μ, p_μ) e dal campo di gauge e che funge da moltiplicatore di Lagrange: le sue equazioni del moto impongono un vincolo nello spazio delle fasi (meccanica hamiltoniana vincolata)

$$G \equiv \frac{1}{2}(p^\mu p_\mu + m^2) = 0 \; . \tag{77}$$

Questo vincolo funge anche da generatore delle trasformazioni di gauge sulle coordinate dello spazio delle fasi tramite le parentesi di Poisson: usando il parametro infinitesimo arbitrario locale $\zeta(\tau)$ queste trasformazioni sono generate da

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= \{x^\mu, \zeta G\} = \zeta p^\mu \\ \delta p_\mu &= \{p_\mu, \zeta G\} = 0 \end{aligned} \tag{78}$$

che difatti coincidono con quelle riportate in (75).

Quantizzazione

Per quantizzare la particella relativistica conviene scegliere la formulazione IV e sfruttare la simmetria di gauge per fissare il gauge $e = 1$ (condizione possibile a meno di ostruzioni topologiche, trascurabili nel presente contesto). La quantizzazione è ottenuta elevando le variabili dinamiche classiche (x^μ, p_μ) ad operatori lineari $(\hat{x}^\mu, \hat{p}_\mu)$ agenti su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ e con regole di commutazione dedotte dalle parentesi di Poisson classiche

$$\{x^\mu, p_\nu\}_{PP} = \delta^\mu_\nu \qquad \longrightarrow \qquad [\hat{x}^\mu, \hat{p}_\nu] = i\hbar \delta^\mu_\nu \; . \tag{79}$$

Uno vettore arbitrario dello spazio di Hilbert $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$ non descrive in generale uno stato fisico perchè occorre ricordarsi della equazione del moto del campo di gauge, $p^\mu p_\mu + m^2 = 0$. Questa equazione è usata come vincolo che seleziona gli stati fisici del sistema

$$(\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu + m^2)|\phi\rangle = 0 \; . \tag{80}$$

Nel gauge $e = 1$ l'hamiltoniana è proporzionale al vincolo $H = \frac{1}{2}(p^2 + m^2)$ (evidente dalla (74)) e la corrispondente equazione di Schroedinger su stati fisici (che soddisfano la (80)) diventa

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial \tau} |\phi\rangle = \hat{H} |\phi\rangle = 0 \tag{81}$$

e dice che lo stato fisico $|\phi\rangle$ è indipendente da τ. La corrispondente funzione d'onda $\phi(x) = \langle x^\mu|\phi\rangle$ che descrive lo stato fisico è dunque indipendente dal parametro temporale τ e soddisfa la (80) che riconosciamo come l'equazione di Klein Gordon

$$\big(- \hbar^2 \partial_\mu \partial^\mu + m^2 \big) \phi(x) = 0 \ . \tag{82}$$

Dunque l'equazione di Klein Gordon è stata ottenuta quantizzando la particella relativistica. Ci si riferisce a questa quantizzazione come alla "prima quantizzazione", perchè questa equazione è poi reinterpretata come una teoria classica di un campo scalare relativistico che viene infine quantizzato (per cui si parla della quantizzazione di teorie di campo classiche come di "seconda quantizzazione"). Reintroducendo la velocità della luce c con considerazioni dimensionali l'equazione di Klein Gordon si scrive nel modo

$$\big(\partial_\mu \partial^\mu - \mu^2 \big) \phi(x) = 0 \tag{83}$$

dove $\mu = \frac{mc}{\hbar}$ è l'inverso della lunghezza d'onda Compton $\lambda = \frac{\hbar}{mc}$ associata alla particella relativistica.

3 Particella scalare relativistica in potenziali esterni

Per concludere possiamo formulare il principio d'azione per una particella scalare relativistica in interazione con potenziali esterni che descrivono uno spaziotempo curvo (con metrica $g_{\mu\nu}$), un campo elettromagnetico (con quadripotrenziale A_μ e corrispondente campo elettromagnetico $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$), ed un eventuale potenziale scalare $V(x)$. Usando la formulazione III della sezione 2.2 si ha

$$S[x^\mu, e; g_{\mu\nu}, A_\mu, V] = \int d\tau \left(\frac{1}{2} e^{-1} g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\mu + q A_\mu(x) \dot{x}^\mu - e(V(x) + \frac{1}{2} m^2) \right) \tag{84}$$

che naturalmente rispetta la simmetria di gauge definente il modello (riparametrizzazione della linea di mondo).

Esercizio: provare l'invarianza per riparametrizzazioni della linea di mondo e trovare le equazioni del moto.

Una particella relativistica in interazione con un campo elettromagnetico dinamico è quindi descritta (in opportune unità di misura (Heaviside-Lorentz + unità naturali)) da

$$S[x^\mu(\tau), e(\tau), A_\mu(x)] = \int d\tau \left(\frac{e^{-1}}{2} \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu - \frac{e}{2} m^2 + q A_\mu(x) \dot{x}^\mu \right) + \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) \tag{85}$$

dove naturalmente $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Da questa azione seguono le equazioni del moto della particella e del campo elettromagnetico. Queste ultime sono date da

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -j^\nu \ , \qquad j^\nu(x) \equiv \int d\tau \ q \dot{x}^\nu(\tau) \delta^4(x - x(\tau)) \tag{86}$$

dove la quadricorrente generata dalla particella è manifestamente invariante per riparametrizzazioni del parametro τ. Scegliendo $\tau = t$, con t il tempo del sistema di riferimento in cui si osserva il moto, si ottiene l'espressione nota (reintroducendo la velocità della luce c)

$$j^\mu(x) = \int dt \ q \dot{x}^\mu \delta^4(x - x(t)) = (j^0, \vec{j}) = \left(q \ \delta^3(\vec{x} - \vec{x}(t)), \frac{q}{c} \ \dot{\vec{x}} \ \delta^3(\vec{x} - \vec{x}(t)) \right) . \tag{87}$$

Le equazioni del moto della particella contengono la forza di Lorentz: si può preliminarmente eliminare il vielbein (ottenendo come già visto $S = \int d\tau(-mc\sqrt{-\dot{x}^2} + \cdots)$ e trovare

$$mc\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}}\right) = qF^{\mu\nu}\dot{x}_\nu \ . \tag{88}$$

4 Stringa bosonica relativistica

Per descrivere la dinamica di un oggetto esteso in una dimensione (una stringa) si può cercare di individuare l'azione appropriata che catturi gli aspetti rilevanti del problema ed, in particolare, rispetti eventuali simmetrie. Sebbene sia già di notevole interesse studiare il caso non relativistico (si veda ad esempio il capitolo 4 del libro di B. Zwiebach, 'A First Course in String Theory") consideriamo brevemente il caso di una stringa relativistica, che stà alla base delle moderne teorie di stringa (modelli che cercano una possibile soluzione al problema della gravità quantistica).

Una corretta descrizione può essere ottenuta generalizzando opportunamente il caso della particella relativistica. Il moto di una stringa descrive nello spaziotempo una superficie di mondo bidimensionale. Il più semplice principio d'azione che si possa immaginare è quello che richiede la minimizzazione dalla superficie di mondo, $S \sim \int dA$, con dA l'area di un porzione infinitesima di tale superficie. Possiamo descrivere la superficie di mondo immersa nello spaziotempo con le coordinate spaziotemporali $X^\mu(\tau,\sigma)$, dove (τ,σ) parametrizzano i vari punti della superficie ($\sigma^\alpha \equiv (\sigma^0,\sigma^1) = (\tau,\sigma)$). L'area della superficie di mondo è ottenuta facilmente usando la metrica $g_{\alpha\beta}(\tau,\sigma)$ della superficie di mondo indotta dall'immersione nello spazio di Minkowski

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}dX^\mu dX^\nu \quad \to \quad ds^2 = \eta_{\mu\nu}\frac{\partial X^\mu}{\partial\sigma^\alpha}\frac{\partial X^\nu}{\partial\sigma^\beta}d\sigma^\alpha d\sigma^\beta \equiv g_{\alpha\beta}d\sigma^\alpha d\sigma^\beta$$

per cui la metrica indotta risulta essere data da

$$g_{\alpha\beta}(\sigma) = \eta_{\mu\nu}\frac{\partial X^\mu}{\partial\sigma^\alpha}\frac{\partial X^\nu}{\partial\sigma^\beta} \ .$$

Con l'ausilio di questa metrica si può scrivere un'azione della forma

$$\begin{aligned} S[X^\mu] &= -T\int dA = -T\int d^2\sigma\sqrt{-\det g_{\alpha\beta}} \\ &= -T\int d^2\sigma\sqrt{g_{01}^2 - g_{00}\, g_{11}} = -T\int d\tau d\sigma\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - \dot{X}^2X'^2} \end{aligned} \tag{89}$$

con $\dot{X} \equiv \partial_\tau X$, $X' \equiv \partial_\sigma X$. Il parametro T è detto tensione di stringa. Questa azione è invariante per trasformazioni di Poincaré dello spaziotempo e fornisce quindi un modello relativistico. Inoltre è invariante per riparametrizzazioni della superficie di mondo, come naturale per una descrizione geometrica (indipendente da come si sceglie di parametrizzare la superficie). Tipicamente il parametro τ è associato alla direzione temporale, ed il parametro σ alla direzione spaziale. Stringhe aperte hanno gli estremi distinti, e solitamente si sceglie $\sigma \in [0,\pi]$, con $\sigma = 0$ e $\sigma = \pi$ che parametrizzano i due estremi. Scegliendo condizioni periodiche si descrive invece una stringa chiusa.

Questa azione è spesso denominata "azione di Nambu-Goto". Descrive correttamente il moto classico di una stringa, ma è di difficile uso per la quantizzazione. Occorrerebbe passare alla descrizione hamiltoniana per operare la quantizzazione canonica, oppure semplificare direttamente la descrizione lagrangiana (anche in vista di una quantizzazione con l'integrale funzionale). Una possibile descrizione semplificata è data dalla seguente azione quadratica

$$S[X^\mu] \;=\; -\frac{T}{2}\int d^2\sigma\; \eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu} = \frac{T}{2}\int d^2\sigma\; (\dot{X}^2 - X'^2) \tag{90}$$

corredata dai vincoli

$$\dot{X}^2 + X'^2 = 0\;, \qquad \dot{X}\cdot X' = 0\;. \tag{91}$$

Questi ultimi sono conosciuti a livello quantistico come vincoli di Virasoro. Si osserva immediatamente che questo modello è relativistico, non contiene simmetrie di gauge, ma necessita di vincoli addizionali oltre all'azione.

Tale azione con vincoli emerge da un unico principio d'azione che contiene come campo dinamico addizionale una metrica $h_{\alpha\beta}$, intrinseca alla superficie di mondo, che funge da campo di gauge (azione di Brink-di Vecchia-Howe, o anche azione di Polyakov)

$$S[X^\mu, h_{\alpha\beta}] \;=\; -\frac{T}{2}\int d^2\sigma\; \sqrt{-h}h^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu} \tag{92}$$

dove naturalmente $h \equiv \det h_{\alpha\beta}$. Questa azione ha invarianze globali (invarianza di Poincaré dello spaziotempo) ed invarianze locali (riparametrizzazioni ed invarianza di Weyl sulla superficie di mondo). Queste ultime sono usate per mostrare l'equivalenza con la descrizione in termini dell'azione quadratica con vincoli. Inoltre si può mostrare facilmente l'equivalenza con l'azione di Nambu-Goto.

Descriviamo più esplicitamente le invarianze dell'azione in termini di trasformazioni infinitesime. Invarianze globali: gruppo di Poincaré dello spaziotempo (10 parameteri: $\omega_{\mu\nu}, a^\mu$)

$$\begin{aligned} \delta X^\mu &= \omega^\mu{}_\nu X^\mu + a^\mu \\ \delta h_{\alpha\beta} &= 0\;. \end{aligned} \tag{93}$$

Invarianza locale: riparametrizzazioni infinitesime della superficie di mondo (2 parametri infinitesimi locali: $\xi^\alpha(\sigma)$)

$$\begin{aligned} \delta X^\mu &= \xi^\alpha \partial_\alpha X^\mu \\ \delta h_{\alpha\beta} &= \xi^\gamma \partial_\gamma h_{\alpha\beta} + (\partial_\alpha \xi^\gamma) h_{\gamma\beta} + (\partial_\beta \xi^\gamma) h_{\alpha\gamma}\;. \end{aligned} \tag{94}$$

Invarianza locale: trasformazioni infinitesime di Weyl (1 parametro infinitesimo locale: $\Sigma(\sigma)$)

$$\begin{aligned} \delta X^\mu &= 0 \\ \delta h_{\alpha\beta} &= \Sigma h_{\alpha\beta}\;. \end{aligned} \tag{95}$$

Quest'ultima prende la forma $h'_{\alpha\beta} = \Lambda h_{\alpha\beta}$, dove $\Lambda = e^\Sigma$ per una funzione arbitraria Σ non infinitesima.

4.1 Equivalenze

Verifichiamo l'equivalenza delle varie descrizioni della stringa relativistica. Partiamo dall'azione di Brink–di Vecchia–Howe

$$S[X^\mu, h_{\alpha\beta}] = -\frac{T}{2}\int d^2\sigma\; \sqrt{-h}h^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu\;. \tag{96}$$

L'equivalenza con l'azione di Nambu-Goto è ottenuta risolvendo le equazioni del moto algebriche della metrica intrinseca $h_{\alpha\beta}$. Per ottenere tali equazioni utilizziamo il principio d'azione variando $h_{\alpha\beta}$, o più semplicemente il suo inverso $h^{\alpha\beta}$,

$$\delta S = -\frac{T}{2}\int d^2\sigma \, \Big[(\delta\sqrt{-h})h^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu + \sqrt{-h}\;\delta h^{\alpha\beta}\;\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu\Big] \,. \tag{97}$$

Indicando con H la matrice dei valori di $h_{\alpha\beta}$, per cui $h = \det H$, possiamo calcolare

$$\begin{aligned}\delta h &= \delta \det H = \delta \exp(\log\det H) = \delta\exp(\mathrm{Tr}\log H)\\ &= h\;\delta\;(\mathrm{Tr}\log H) = h\;\mathrm{Tr}(H^{-1}\delta H) = -h\;\mathrm{Tr}(H\delta H^{-1})\\ &= -h h_{\alpha\beta}\delta h^{\alpha\beta}\end{aligned}$$

(si noti che da $H^{-1}H = \mathbf{1}$ segue $H^{-1}\delta H = -\delta H^{-1} H$). Quindi

$$\delta\sqrt{-h} = -\frac{1}{2}\sqrt{-h}h_{\alpha\beta}\delta h^{\alpha\beta}$$

ed infine

$$\delta S = -\frac{T}{2}\int d^2\sigma\sqrt{-h}\;\delta h^{\alpha\beta}\Big[\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X_\mu - \frac{1}{2}h_{\alpha\beta}(h^{\gamma\delta}\partial_\gamma X^\mu\partial_\delta X_\mu)\Big] \,. \tag{98}$$

Questa variazione è proporzionale al tensore energia impulso $T_{\alpha\beta}$, che deve quindi annullarsi a causa delle equazioni del moto di $h^{\alpha\beta}$

$$T_{\alpha\beta} \equiv -\frac{2}{T}\frac{1}{\sqrt{-h}}\frac{\delta S}{\delta h^{\alpha\beta}} = \partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X_\mu - \frac{1}{2}h_{\alpha\beta}(\partial X)^2 = 0 \,. \tag{99}$$

Questa equazione algebrica è certamente risolta da

$$h_{\alpha\beta}(\sigma) = \partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X_\mu \tag{100}$$

e più in generale da

$$h_{\alpha\beta}(\sigma) = \Lambda(\sigma)\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X_\mu \tag{101}$$

dove $\Lambda(\sigma)$ è una funzione arbitraria (che parametrizza l'invarianza di Weyl della teoria, possiamo quindi scegliere $\Lambda = 1$). Questo ci dice che le equazioni del moto fissano la metrica intrinseca ad essere uguale alla metrica indotta (indicata precedentemente con $g_{\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X_\mu$). La sostituzione di questa soluzione nell'azione di partenza produce l'azione di Nambu-Goto

$$\begin{aligned}S[X^\mu, h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}] &= -\frac{T}{2}\int d^2\sigma\;\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta} = -T\int d^2\sigma\;\sqrt{-g}\\ &= -T\int d^2\sigma\;\sqrt{-\det\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X_\mu}\end{aligned} \tag{102}$$

Questo dimostra l'equivalenza di queste due formulazioni.

Un'altra formulazione equivalente può essere ottenuta utilizzando le invarianze locali per scegliere una condizione di gauge-fixing. Esistono tre parametri arbitrari locali che possono essere usati per imporre tre condizioni sulla metrica intrinseca, e porla uguale alla metrica di Minkowski bidimensionale (questo è possibile solo localmente, cioè trascurando alcune complicazioni topologiche)

$$h_{\alpha\beta}(\sigma) = \eta_{\alpha\beta}\,, \qquad \text{con} \quad \eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \,. \tag{103}$$

L'azione si semplifica enormemente e diventa puramente quadratica nelle variabili dinamiche

$$S[X^\mu, h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}] \;=\; -\frac{T}{2}\int d^2\sigma\; \eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu = \frac{T}{2}\int d^2\sigma\;(\dot{X}^2 - X'^2) \tag{104}$$

ma deve essere supplementata da vincoli che corrispondono alle vecchie equazioni del moto di $h_{\alpha\beta}$

$$T_{\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}(\partial X)^2 = 0$$

che si riducono alle eq. (91). Questa formulazione corrisponde alla scelta del cosiddetto "gauge conforme" per la metrica intrinseca. In tale gauge le simmetrie conformi emergono come simmetrie di gauge residue.

4.2 Trasformazioni conformi

Nel gauge conforme l'azione della stringa possiede delle simmetrie di gauge residue che corrispondono appunto alle trasformazioni conformi. Le trasformazioni di gauge residue sono quelle particolari trasformazioni di gauge che lasciano la condizione di gauge fixing invariata, vedi eq. (103). Usando (93) and (94), si ottengono le cosiddette equazioni di Killing conformi, che per la metrica $\eta_{\alpha\beta}$ prendono la forma

$$\delta\eta_{\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha \xi_\beta + \partial_\beta \xi_\alpha + \Sigma\eta_{\alpha\beta} = 0 \tag{105}$$

dove naturalmente $\xi_\alpha = \eta_{\alpha\beta}\xi^\beta$. Le soluzioni di questa equazione sono vettori infinitesimi ξ^α che per definizione generano le trasformazioni conformi infinitesime.

Per ragioni pedagogiche, visto l'uso esteso dell'invarianza conforme nella fisica teorica moderna, generalizziamo la discussione ad uno spaziotempo d dimensionale, tornando poi al caso della superficie di mondo ponendo $d = 2$. Quindi per la discussione presente consideriamo uno spaziotempo con coordinate σ^α con $\alpha = 0, 1, ..., d-1$ e metrica di Minkowski associata $\eta_{\alpha\beta}$. Prendendo la traccia delle equazioni di Killing conformi (105) si ottiene $\Sigma = -\frac{2}{d}\partial_\alpha\xi^\alpha$, per cui esse prendono la forma seguente

$$\partial_\alpha \xi_\beta + \partial_\beta \xi_\alpha = \frac{2}{d}(\partial_\gamma \xi^\gamma)\eta_{\alpha\beta} \tag{106}$$

In $d > 2$ le soluzioni sono:
1) $\xi^\alpha = a^\alpha$, con a^α costanti infinitesime: traslazioni spazio-temporali (in tal caso $\Sigma = 0$).
2) $\xi^\alpha = \omega^\alpha{}_\beta \sigma^\beta$, con $\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$ costanti infinitesime: trasformazioni di Lorentz (anche in questo caso $\Sigma = 0$).
3) $\xi^\alpha = \lambda\sigma^\alpha$, con λ costante infinitesima: dilatazioni (in tal caso $\Sigma = -2\lambda$).
4) $\xi^\alpha = b^\alpha\sigma^2 - 2\sigma^\alpha b\cdot\sigma$, con b^α costanti infinitesime: trasformazioni conformi speciali (in tal caso $\Sigma = 4b_\alpha\sigma^\alpha$).
I vettori 1) e 2) generano il gruppo di Poincaré, gruppo delle isometrie dello spaziotempo piatto. Uniti ai vettori 3) e 4) generano il gruppo conforme, gruppo che lascia invariato il cono di luce (cioè l'equazione $\sigma^\alpha\sigma_\alpha = 0$).

In $d = 2$, il caso della superficie di mondo di nostro interesse, oltre a queste soluzioni ce ne sono molte altre: infatti ce ne sono infinite. Per vederlo nel modo più semplice conviene utilizzare le coordinate cono di luce, definite da

$$\begin{aligned} \sigma^+ &= \tau + \sigma \\ \sigma^- &= \tau - \sigma\;. \end{aligned} \tag{107}$$

In tali coordinate l'elemento di lunghezza è dato da

$$ds^2 = -d\tau^2 + d\sigma^2 = -d\sigma^+ d\sigma^-$$

e quindi la metrica di Minkowski bidimensionale prende la forma

$$\eta_{+-} = \eta_{+-} = -\frac{1}{2} \; , \quad \eta_{++} = \eta_{--} = 0$$

con inverso

$$\eta^{+-} = \eta^{+-} = -2 \; , \quad \eta^{++} = \eta^{--} = 0 \; .$$

Naturalmente le derivate rispetto a $\sigma^{\pm}$ sono date da

$$\partial_+ = \frac{1}{2}(\partial_\tau + \partial_\sigma) \; , \qquad \partial_- = \frac{1}{2}(\partial_\tau - \partial_\sigma) \; .$$

In queste coordinate le equazioni di Killing conformi si riducono a

$$\partial_+ \xi_+ = 0 \; , \qquad \partial_- \xi_- = 0 \tag{108}$$

e sono risolte dalle funzioni arbitrarie

$$\xi_+ = \xi_+(\sigma^-) \; , \qquad \xi_- = \xi_-(\sigma^+) \tag{109}$$

o equivalentemente (poiché $\xi^+ = \eta^{+-}\xi_- = -2\xi_-$, etc.)

$$\xi^+ = \xi^+(\sigma^+) \; , \qquad \xi^- = \xi^-(\sigma^-) \; . \tag{110}$$

(vedere ad esempio la sezione introduttiva di P. Ginsparg, Applied Conformal Field Theory, arXiv:hep-th/9108028v1, per maggiori dettagli sul gruppo conforme).

4.3 Stringhe aperte e stringhe chiuse

Ricaviamo le equazioni del moto partendo dalla formulazione nel gauge conforme, discutendo le possibili condizioni al contorno. Minimizzando l'azione (104) si ottiene

$$\delta S[X^\mu] = -T \int d^2\sigma \; [\partial_\alpha(\partial^\alpha X^\mu \delta X_\mu) - \delta X_\mu(\partial_\alpha \partial^\alpha X^\mu)] = 0 \tag{111}$$

da cui si ricavano le equazioni del moto

$$\partial_\alpha \partial^\alpha X^\mu = 0 \tag{112}$$

(le cui soluzioni devono soddisfare gli ulteriori vincoli (91)), e le condizioni al bordo (con $\tau \in [\tau_i, \tau_f]$ e $\sigma \in [0, \pi]$)

$$0 = \int d^2\sigma \; [\partial_\alpha(\partial^\alpha X^\mu \delta X_\mu) = -\int_0^\pi d\sigma \; (\dot{X}^\mu \delta X_\mu)\Big|_{\tau_i}^{\tau_f} + \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \; (X'^\mu \delta X_\mu)\Big|_0^\pi \; . \tag{113}$$

Di queste, il primo termine si annulla in modo standard, scegliendo $\delta X^\mu(\sigma, \tau_i) = \delta X^\mu(\sigma, \tau_f) = 0$, che non modifica le condizioni "iniziali" poste al bordo temporale. Il secondo termine invece può essere annullato in vari modi:

1) Condizioni al contorno periodiche (stringhe chiuse)
In tal caso $\sigma = 0$ e $\sigma = \pi$ parametrizzano lo stesso punto della stringa, che si chiude su se stessa. Non c'è bordo. Questo naturalmente richiede condizioni al contorno periodiche

$$X^\mu(\sigma = 0, \tau) = X^\mu(\sigma = \pi, \tau) \ .$$

2) Condizioni al contorno di Neumann (stringhe aperte)
Si può annullare il temine di bordo con le condizioni:

$$X'^\mu(\sigma = 0, \tau) = 0 \ , \qquad X'^\mu(\sigma = \pi, \tau) = 0 \ .$$

Queste condizioni sono Poincaré invarianti e descrivono una stringa relativistica aperta.

3) Condizioni al contorno di Dirichelet (stringhe aperte di "Dirichelet")
Si possono imporre le condizioni di Dirichelet:

$$X^\mu(\sigma = 0, \tau) = c_1^\mu \ , \qquad X^\mu(\sigma = \pi, \tau) = c_2^\mu$$

con c_i^μ delle costanti, per cui $\delta X^\mu(\sigma = 0, \tau) = \delta X^\mu(\sigma = \pi, \tau) = 0$. Queste condizioni non sono Poincaré invarianti: gli estremi della stringa aperta sono fissati in punti prestabiliti dello spaziotempo e non possono muoversi da li. Piú in generale si può imporre un misto di condizioni di Neumann e di Dirichelet: la non-invarianza per trasformazioni di Poincaré indica la presenza di difetti topologici, le cosidette "D-brane", che a loro volta possono essere considerate come oggetti dinamici (recuperando così l'invarianza relativistica).

4.4 Soluzioni delle equazioni del moto

Descriviamo con alcuni brevi cenni la struttura delle soluzioni delle equazioni del moto nel caso della stringa chiusa. La soluzione dell'equazione delle onde in 1+1 dimensioni contiene essenzialmente onde che viaggiano verso destra e onde che viaggiano verso sinistra sul foglio di mondo della stringa, oltre che ad un termine che descrive il moto del centro di massa della stringa nello spazio tempo. In formule, la soluzione dell'eq. (112) può essere scritta come[1]

$$X^\mu(\sigma, \tau) = x_0^\mu + p_0^\mu \tau + \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{-2in(\tau - \sigma)} + \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{\tilde{\alpha}_n^\mu}{n} e^{-2in(\tau + \sigma)} \qquad (114)$$

dove i coefficienti di Fourier soddisfano le condizioni $\alpha_n^{*\mu} = \alpha_{-n}^\mu$ e $\tilde{\alpha}_n^{*\mu} = \tilde{\alpha}_{-n}^\mu$ affinché le X^μ siano reali. La somma è su tutti gli interi positivi e negativi. L'interpretazione è la seguente: x_0^μ e p_0^μ rappresentano la posizione ed il momento del centro di massa della stringa, infatti

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\sigma \, X^\mu(\sigma, \tau) = x_0^\mu + p_0^\mu \tau \ .$$

I coefficienti di Fourier, α ed $\tilde{\alpha}$, descrivono invece vibrazioni (o eccitazioni interne) della stringa. Queste eccitazioni aumentano l'energia interna della stringa, quindi la sua massa, ma non tutte le eccitazioni sono ammissibili. Infatti occorre soddisfare i vincoli (91).

Questi ultimi sono facilmente riscrivibili in coordinate cono di luce $\sigma^\pm \equiv \tau \pm \sigma$

$$T_{++} \equiv \partial_+ X \cdot \partial_+ X = 0 \ , \qquad T_{--} \equiv \partial_- X \cdot \partial_- X = 0 \qquad (115)$$

[1]Scegliendo opportune unità di misura per la tensione della stringa, i.e. $T = \frac{1}{\pi}$.

che in termini dei loro coefficienti di Fourier diventano

$$\begin{aligned} L_m &\equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi d\sigma\, e^{-2im\sigma}T_{--} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\alpha_{m-n}\cdot\alpha_n = 0 \\ \tilde{L}_m &\equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi d\sigma\, e^{2im\sigma}T_{++} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\tilde{\alpha}_{m-n}\cdot\tilde{\alpha}_n = 0 \end{aligned} \tag{116}$$

dove per semplicità di notazione si è posto $\alpha_0^\mu = \tilde{\alpha}_0^\mu = p_0^\mu$. È evidente quindi che solo alcune combinazioni dei coefficienti di Fourier descrivono soluzioni fisiche del moto relativistico della stringa nello spaziotempo di Minkowski.

Si noti in particolare che i vincoli L_0 ed $\tilde{L}_0$ contengono il termine $\alpha_0^2 = \tilde{\alpha}_0^2$, proporzionale a $(p_0)^2 = -M^2$, la massa invariante della stringa. La particolare combinazione $L_0 + \tilde{L}_0 = 0$ dei vincoli può essere scritta come

$$M^2 = \sum_{n=0}^{n=\infty}\Big(\alpha_{-n}\cdot\alpha_n + \tilde{\alpha}_{-n}\cdot\tilde{\alpha}_n\Big) \tag{117}$$

nota come condizione di mass-shell. Questa formula calcola la massa associata ad una stringa chiusa relazionandola agli stati di eccitazione interna. È l'equivalente della condizione (70) o (77) della particella relativistica, che sotto quantizzazione da origine all'equazione di Klein-Gordon. Naturalmente nel caso della stringa esistono molti altri vincoli, vedi eq. (116).

La quantizzazione del modello della stringa relativistica porta ad una situazione sorprendente: un particolare stato della stringa ha massa $M = 0$ e spin $S = 2$, numeri quantici tipici del gravitone, il presunto quanto dell'onda che media le interazioni gravitazionali. Questo risultato ha portato all'uso della teoria delle stringhe per formulare modelli di gravità quantistica.