Meccanica quantistica supersimmetrica

(Appunti per il corso di Fisica Teorica 2011/12)

Fiorenzo Bastianelli

Scopo di queste note è quello di introdurre un modello di meccanica quantistica che possiede una particolare simmetria, detta supersimmetria, che trasforma bosoni in fermioni e viceversa. La supersimmetria è una simmetria usata soprattutto per descrivere possibili estensioni del modello standard delle particelle elementari (permette di controllare il problema della "gerarchia", dando una spiegazione del perchè la massa dell'Higgs è sufficientemente piccola rispetto alla massa di Planck m_{Pl} o ad altri cut-off tipo la scala GUT m_{GUT}). L'esistenza della supersimmetria in natura è comunque una questione sperimentale e la supersimmetria non è stata ancora scoperta. In ogni caso rappresenta un utile strumento teorico che ha molte altre applicazioni. Ad esempio modelli meccanici con supersimmetria (locale) sono utili per descrivere in prima quantizzazione particelle relativistiche con spin. La supersimmetria trova inoltre una bellissima applicazione in fisica matematica, dove offre una semplice prova del teorema dell'indice di Atiyah-Singer, teorema che collega proprietà topologiche di alcune varietà differenziali a proprietà locali.

In queste note cercheremo di: *(i)* studiare alcuni aspetti generali derivanti dalla supersimmetria partendo da un semplice modello meccanico, *(ii)* definire e calcolare l'indice di Witten, *(iii)* presentare la quantizzazione alternativa tramite l'integrale funzionale.

1 Azione classica

L'azione classica di un modello meccanico invariante sotto supersimmetria è data da

$$S[x,\psi,\bar\psi] = \int dt \Big[\frac{1}{2}\dot x^2 + i\bar\psi\dot\psi - \frac{1}{2}\Big(W'(x)\Big)^2 - W''(x)\bar\psi\psi\Big] \tag{1}$$

dove: $x(t)$ denota la coordinata di una particella in una dimensione, $\psi(t)$ e $\bar\psi(t)$ sono variabili di Grassmann complesse ($\bar\psi$ è la complesso coniugata di ψ) che descrivono gradi di libertà addizionali collegati allo spin. Alternativamente si posso usare le variabili di Grassman reali ψ_1 e ψ_2 che rappresentano la parte reale e la parte immaginaria di ψ, $\psi = (\psi_1 + i\psi_2)/\sqrt{2}$.

Il modello dipende da una funzione $W(x)$, detta prepotenziale, che soddisfa ad opportune condizioni asintotiche per garantire nella teoria quantistica livelli energetici discreti e autostati normalizzabili. Queste condizioni sono del tipo (gli apici indicano derivate rispetto ad x)

$$|W'(x)| \stackrel{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \infty$$

che potremo esplicitare meglio più avanti. Il caso semplice di $W(x) = \frac{1}{2}\omega x^2$ corrisponde all'oscillatore armonico supersimmetrico.

Le equazioni del moto sono facilmente ottenute minimizzando l'azione

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S}{\delta x(t)} = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad \ddot x + W'(x)W''(x) + W'''(x)\bar\psi\psi = 0 \\
\frac{\delta S}{\delta \bar\psi(t)} = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad i\dot\psi - W''(x)\psi = 0 \\
\frac{\delta S}{\delta \psi(t)} = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad i\dot{\bar\psi} + W''(x)\bar\psi = 0\ .
\end{aligned} \tag{2}$$

L'azione è invariante sotte trasformazioni infinitesime di supersimmetria (con ϵ ed $\bar{\epsilon}$ variabili di Grassmann costanti)

$$\begin{aligned} \delta x &= i\epsilon\bar{\psi} + i\bar{\epsilon}\psi \\ \delta\psi &= -\epsilon(\dot{x} - iW'(x)) \\ \delta\bar{\psi} &= -\bar{\epsilon}(\dot{x} + iW'(x)) \; . \end{aligned} \tag{3}$$

Inoltre è invariante sotto trasformazioni di fase (trasformazioni $U(1)$) con parametro infinitesimo α

$$\begin{aligned} \delta x &= 0 \\ \delta\psi &= i\alpha\psi \\ \delta\bar{\psi} &= -i\alpha\bar{\psi} \; . \end{aligned} \tag{4}$$

Le cariche di Noether conservate sono facilmente calcolabili e sono date da

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\Big(W'(x)\Big)^2 + W''(x)\bar{\psi}\psi \\ Q &= (\dot{x} + iW'(x))\psi \\ \bar{Q} &= (\dot{x} - iW'(x))\bar{\psi} \\ J &= \bar{\psi}\psi \end{aligned} \tag{5}$$

dove abbiamo aggiunto anche l'energia H, conservata come conseguenza dell'invarianza per traslazioni temporali.

Si noti come il commutatore di due trasformazioni di supersimmetria generi una traslazione. Infatti calcolando il commutatore di due supersimmetrie sulla variabile dinamica x si ottiene

$$[\delta(\epsilon_1), \delta(\epsilon_2)]x = -a\dot{x} \tag{6}$$

con $a = 2i(\epsilon_1\bar{\epsilon}_2 - \epsilon_2\bar{\epsilon}_1)$. Questa è la proprietà caratterizzante le trasformazioni di supersimmetria: la composizione di due supersimmetrie genera una traslazione nel tempo (o nello spazio-tempo in teorie di campo supersimmetriche). La stessa proprietà può essere verificata sulle variabili dinamiche ψ e $\bar{\psi}$ (in questo caso nel lato destro compaiono anche termini proporzionali alle equazioni del moto).

2 Formalismo hamiltoniano

Per procedere alla quantizzazione canonica occorre prima passare al formalismo hamiltoniano e riconoscere le parentesi di Poisson tra le variabili dinamiche fondamentali. Si introduce quindi il momento coniugato alla variabile x

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} \tag{7}$$

e lo si considera come variabile indipendente. Per quanto riguarda le variabili di Grassmann, abbiamo già una formulazione hamiltoniana (cioè equazioni con derivate del primo ordine nel tempo) ed infatti il momento coniugato a ψ è proporzionale a $\bar{\psi}$

$$\pi = \frac{\partial_L L}{\partial\dot{\psi}} = -i\psi \tag{8}$$

dove ∂_L denota la derivata sinistra (si rimuove l'incremento differenziale a sinistra, cioè si sposta la variabile che si differenzia a sinistra e poi la si elimina). Perciò si può considerare $\bar\psi$ essenzialmente come momento coniugato a ψ. La corrispondente hamiltoniana è data dalla trasformata di Legendre della lagrangiana

$$\begin{aligned} H &= \dot x p + \dot\psi\pi - L \\ &= \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\Big(W'(x)\Big)^2 + W''(x)\bar\psi\psi \ . \end{aligned} \tag{9}$$

L'azione nello spazio delle fasi è dunque data da

$$S[x,p,\psi,\bar\psi] = \int dt(\dot x p + i\bar\psi\dot\psi - H) \ . \tag{10}$$

Le parentesi di Poisson fondamentali sono

$$\{p,x\}_{PB} = -1 \ , \quad \{\pi,\psi\}_{PB} = -1 \tag{11}$$

o, equivalentemente, ricordando che le parentesi di Poisson sono antisimmetriche per le variabili commutanti e simmetriche per le variabili anticommutanti,

$$\{x,p\}_{PB} = 1 \ , \quad \{\psi,\bar\psi\}_{PB} = -i \ . \tag{12}$$

In generale, per funzioni arbitrarie A e B dello spazio delle fasi con parità di Grassmann ϵ_A ed ϵ_B ($\epsilon = 0$ per funzioni commutanti ed $\epsilon = 1$ per funzioni anticommutanti, cioè a valori in un'algebra di Grassmann) le parentesi di Poisson sono definite come

$$\{A,B\}_{PB} \ = \ \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p}\frac{\partial B}{\partial x} - i\frac{\partial_R A}{\partial\psi}\frac{\partial_L B}{\partial\bar\psi} - i\frac{\partial_R A}{\partial\bar\psi}\frac{\partial_L B}{\partial\psi} \tag{13}$$

dove ∂_R e ∂_L denotano derivate destre e sinistre rispettivamente. Si noti che queste parentesi soddisfano le proprietà

$$\begin{aligned} \{A,B\}_{PB} &= (-1)^{\epsilon_A\epsilon_B+1}\{B,A\}_{PB} \\ \{A,BC\}_{PB} &= \{A,B\}_{PB}C + (-1)^{\epsilon_A\epsilon_B}B\{A,C\}_{PB} \end{aligned} \tag{14}$$

utili per calcolare le parentesi di Poisson di funzioni definite nello spazio delle fasi riducendole alle parentesi di Poisson delle variabili dinamiche elementari (12).

Le cariche di Nother precedentemente trovate possono essere trascritte nelle spazio delle fasi come

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\Big(W'(x)\Big)^2 + W''(x)\bar\psi\psi \\ Q &= (p + iW'(x))\psi \\ \bar Q &= (p - iW'(x))\bar\psi \\ J &= \bar\psi\psi \end{aligned} \tag{15}$$

e se ne può calcolare l'algebra tramite parentesi di Poisson. Le uniche parentesi non nulle risultano essere le seguenti

$$\{Q,\bar Q\}_{PB} = -2iH \ , \quad \{J,Q\}_{PB} = iQ \ , \quad \{J,\bar Q\}_{PB} = -i\bar Q \ . \tag{16}$$

La prima parentesi di Poisson può essere interpretata come dovuta al fatto che la composizione di due trasformazioni di superisimmetria (generate appunto da queste cariche tramite le parentesi di Poisson) produce una traslazione temporale (generata dall'hamiltoniana), come già notato in (6).

3 Quantizzazione

La quantizzazione canonica è ora immediata. Le variabili dinamiche dello spazio delle fasi sono elevate al ruolo di operatori lineari agenti su uno spazio di Hilbert opportuno. A questi operatori si assegnano regole di commutazione o anticommutazione uguali ad $i\hbar$ volte il valore delle parentesi di Poisson classiche. Le variabili commutanti diventano operatori che soddisfano regole di commutazione mentre le variabili anticommutanti (di Grassmann) soddisfano regole di anticommutazione, dunque (usando $\hbar = 1$)

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i \ , \qquad \{\hat{\psi}, \hat{\psi}^\dagger\} = 1 \ . \tag{17}$$

La realizzazione esplicita di questi operatori è immediata: lo spazio di Hilbert risulta essere il prodotto diretto dello spazio lineare L_2 delle funzioni a quadrato sommabili (su cui si realizzano gli operatori $\hat{x}$ e $\hat{p}$ nel modo usuale della meccanica quantistica) con uno spazio di Fock bidimensionale che realizza l'algebra degli operatori di creazione e distruzione fermionici $\hat{\psi}^\dagger$ e $\hat{\psi}$. Quest'ultimo ha come base gli stati $|0\rangle$ e $|1\rangle$ definiti da

$$\begin{array}{ll} \hat{\psi}|0\rangle = 0, & \langle 0|0\rangle = 1 \qquad \text{(vuoto di Fock)} \\ |1\rangle = \hat{\psi}^\dagger|0\rangle & \text{(stato con una eccitazione fermionica).} \end{array} \tag{18}$$

Quindi una opportuna realizzazione del nostro sistema quanto meccanico ha operatori che agiscono su funzioni d'onda a due componenti

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix} \tag{19}$$

con

$$\begin{aligned} \hat{x} &\longrightarrow x \\ \hat{p} &\longrightarrow -i\frac{\partial}{\partial x} \\ \hat{\psi} &\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hat{\psi}^\dagger &\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ . \end{aligned} \tag{20}$$

Per estendere le cariche di Noether conservate ad operatori occorre risolvere alcune ambiguità di ordinamento (presenti in H e J). Con una scelta opportuna si ottiene

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= (\hat{p} + iW'(\hat{x}))\hat{\psi} \\ \hat{Q}^\dagger &= (\hat{p} - iW'(\hat{x}))\psi^\dagger \\ \hat{H} &= \frac{1}{2}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}\Big(W'(\hat{x})\Big)^2 + \frac{1}{2}W''(\hat{x})(\hat{\psi}^\dagger\hat{\psi} - \hat{\psi}\hat{\psi}^\dagger) \\ \hat{J} &= \hat{\psi}^\dagger\hat{\psi} \end{aligned} \tag{21}$$

e quindi nella rappresentazione esplicita descritta sopra

$$\hat{Q} = -i\Big(\frac{\partial}{\partial x} - W'(x)\Big)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\hat{Q}^\dagger &= -i\Big(\frac{\partial}{\partial x} + W'(x)\Big)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\hat{H} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\Big(W'(x)\Big)^2 - \frac{1}{2}W''(x)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
\hat{J} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ .
\end{aligned} \tag{22}
$$

In modo ancor più esplicito possiamo scrivere

$$
\begin{aligned}
\hat{Q} &= \begin{pmatrix} 0 & -i\partial_x + iW'(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\hat{Q}^\dagger &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -i\partial_x - iW'(x) & 0 \end{pmatrix} \\
\hat{H} &= \begin{pmatrix} H_- & 0 \\ 0 & H_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\partial_x^2 + \frac{1}{2}(W'(x))^2 - \frac{1}{2}W''(x) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\partial_x^2 + \frac{1}{2}(W'(x))^2 + \frac{1}{2}W''(x) \end{pmatrix} \\
\hat{J} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .
\end{aligned} \tag{23}
$$

In questa forma esplicita possiamo identificare i potenziali $V_\mp = \frac{1}{2}(W'(x))^2 \mp \frac{1}{2}W''(x)$ che vorremmo garantiscano stati legati e corrispondenti funzioni d'onda normalizzabili. Questo naturalmente avviene se i potenziali $V_\mp$ hanno un opportuno comportamento asintotico.

Un semplice calcolo mostra che questi operatori soddisfano l'algebra della supersimmetria

$$
\{\hat{Q}, \hat{Q}^\dagger\} = 2\hat{H} \ , \quad [\hat{J}, \hat{Q}] = -\hat{Q} \ , \quad [\hat{J}, \hat{Q}^\dagger] = \hat{Q}^\dagger \ . \tag{24}
$$

Altri commutatori/anticommutatori (a seconda del caso) sono nulli. Si noti che questo risultato riproduce la quantizzazione delle relazioni classiche in (16). La proprietà fondamentale che ne consegue è che l'operatore hamiltoniano è un operatore definito positivo.

Gli operatori (23) definiscono un modello di meccanica quantistica con $N = 2$ supersimmetrie. Le due supersimmetrie corrispondono a $\hat{Q}$ e $\hat{Q}^\dagger$, o se si vuole agli operatori hermitani $\hat{Q}_1$ e $\hat{Q}_2$, parte reale e parte immaginaria di $\hat{Q}$, $\hat{Q} = (\hat{Q}_1 + i\hat{Q}_2)/\sqrt{2}$. Questi ultimi come conseguenza della (24) soddisfano

$$
\{\hat{Q}_1, \hat{Q}_1\} = 2\hat{H} \ , \quad \{\hat{Q}_2, \hat{Q}_2\} = 2\hat{H} \ , \quad \{\hat{Q}_1, \hat{Q}_2\} = 0 \ . \tag{25}
$$

Riassumendo, gli operatori in (22) o in (23) definiscono il modello quanto-meccanico che volgliamo studiare in queste note. Naturalmente l'equazione di Schrödinger associata assume la forma standard

$$
i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \hat{H}\Psi \ . \tag{26}
$$

Nel seguito cercheremo di caratterizzare le proprietà degli autostati e degli autovalori di $\hat{H}$, sfruttando la presenza della supersimmetria.

4 Proprietà generali della supersimmetria

Analizziamo alcune proprietà generali che emergono in modelli supersimmetrici. Consideriamo teorie definite da una hamiltoniana $\hat{H}$, possedenti carche di supersimmetria $\hat{Q}$ e $\hat{Q}^\dagger$ (o equivalentemente due cariche di supersimmetria hermitiane $\hat{Q}_1$ e $\hat{Q}_2$) ed infine un operatore di numero fermionico $\hat{F}$ con cui costruirsi la parità fermionica $(-1)^{\hat{F}}$. Il modello precedente è un esempio di questa struttura, basta identificare $\hat{F} = \hat{J}$. Tutto quello che diremo in seguito è in realtà solamente conseguenza dell'avere almeno una carica di superimmetria (ad esempio $\hat{Q}_1$) e l'operatore $(-1)^{\hat{F}}$, senza necessariamente avere l'operatore $\hat{F}$. Naturalmente se si ha a disposizione l'operatore $\hat{F}$ che genera trasformazioni di fase, si può costruire l'operatore di rotazione $e^{i\alpha\hat{F}}$ che ruota gli stati di un angolo α, e per $\alpha = \pi$ si ottiene $(-1)^{\hat{F}}$.

Riassumendo, le caratteristiche generali dei modelli supersimmetrici che utilizzeremo in seguito sono che

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2}(\hat{Q}\hat{Q}^\dagger + \hat{Q}^\dagger\hat{Q}) = \hat{Q}_1^2 = \hat{Q}_2^2 \\ (-1)^{\hat{F}}\hat{Q} &= -\hat{Q}(-1)^{\hat{F}} \qquad (\text{similmente per } \hat{\mathrm{Q}}^\dagger, \hat{\mathrm{Q}}_1, \hat{\mathrm{Q}}_2) \end{aligned} \tag{27}$$

e queste proprietà emergono ovviamente da (24).

Assumiamo di avere uno spettro discreto e quindi autostati dell'hamiltoniana normalizzabili, e naturalmente uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ con metrica definita positiva. Possiamo provare le seguenti proprietà.

Proprietà 1: *L'hamiltoniana $\hat{H}$ è un operatore definito positivo.*

Questo significa che per ogni vettore $|\Psi\rangle$ dello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$

$$\langle\Psi|\hat{H}|\Psi\rangle \geq 0 \, . \tag{28}$$

Infatti

$$\langle\Psi|\hat{H}|\Psi\rangle = \langle\Psi|\frac{1}{2}(\hat{Q}\hat{Q}^\dagger + \hat{Q}^\dagger\hat{Q})|\Psi\rangle = \frac{1}{2}||\hat{Q}^\dagger|\Psi\rangle|^2 + \frac{1}{2}||\hat{Q}|\Psi\rangle|^2 \geq 0 \tag{29}$$

poichè si ha una somma di termini positivi, essendo dati da moduli quadri di vettori dello spazio di Hilbert. Inoltre da quest'ultima relazione si deduce che $\langle\Psi|\hat{H}|\Psi\rangle = 0$ se e solo se

$$\hat{Q}^\dagger|\Psi\rangle = 0 \qquad \text{e} \qquad \hat{Q}|\Psi\rangle = 0 \tag{30}$$

da cui si deduce anche $\hat{H}|\Psi\rangle = 0$.

Proprietà 2: *Uno stato $|\Psi_0\rangle$ con $E = 0$ è necessariamente uno stato di vuoto.*

Infatti se esiste un autostato dell'hamiltoniana con $E = 0$, che denotiamo $|\Psi_0\rangle$, dalla proprietà precedente segue che questo stato è senz'altro uno stato con l'energia più bassa. Questo stato inoltre soddisfa

$$\hat{Q}^\dagger|\Psi_0\rangle = \hat{Q}|\Psi_0\rangle = 0 \tag{31}$$

ed è quindi supersimmetrico, cioè invariante per trasformazioni di supersimmetria generate da $\hat{Q}$ e $\hat{Q}^\dagger$.

Proprietà 3: *Livelli energetici con $E \neq 0$ sono necessariamente degeneri.*

Infatti per ogni stato "bosonico" ($F = 0$) con $E \neq 0$ esiste uno stato fermionico ($F = 1$) con la stessa energia, e viceversa. Per provare questa affermazione è sufficente considerare una sola carica di supersimmetria, diciamo $\hat{Q}_1$. Supponiamo che esista uno stato bosonico $|b\rangle$ normalizzabile, con energia $E \neq 0$

$$\begin{aligned} \hat{H}|b\rangle &= E|b\rangle \, , \quad E \neq 0 \, , \quad \langle b|b\rangle = ||b\rangle|^2 = 1 \\ (-1)^{\hat{F}}|b\rangle &= |b\rangle \, . \end{aligned} \tag{32}$$

Allora possiamo costruire

$$|f'\rangle = \hat{Q}_1|b\rangle \tag{33}$$

che soddisfa

$$\begin{aligned} \hat{H}|f'\rangle &= E|f'\rangle \\ (-1)^{\hat{F}}|f'\rangle &= -|f'\rangle \, . \end{aligned} \tag{34}$$

Infatti possiamo calcolare (usando $[\hat{H}, \hat{Q}_1] = 0$)

$$\hat{H}|f'\rangle = \hat{H}\hat{Q}_1|b\rangle = \hat{Q}_1\hat{H}|b\rangle = \hat{Q}_1 E|b\rangle = E|f'\rangle \tag{35}$$

e (usando ora $\{(-1)^{\hat{F}}, \hat{Q}_1\} = 0$)

$$(-1)^{\hat{F}}|f'\rangle \;=\; (-1)^{\hat{F}}\hat{Q}_1|b\rangle = -\hat{Q}_1(-1)^{\hat{F}}|b\rangle = -\hat{Q}_1|b\rangle = -|f'\rangle \, . \tag{36}$$

Inoltre, poichè $E \neq 0$, possiamo tranquillamente normalizzare lo stato $|f'\rangle$

$$|f\rangle = \frac{1}{\sqrt{E}}|f'\rangle \tag{37}$$

che soddisfa (ricordando che $\hat{Q}_1^2 = \hat{H}$ e che $\hat{Q}_1^\dagger = \hat{Q}_1$)

$$\langle f|f\rangle = \frac{1}{\sqrt{E}}\langle b|\hat{Q}_1 \frac{1}{\sqrt{E}}\hat{Q}_1|b\rangle = \frac{1}{E}\langle b|\hat{H}|b\rangle = \langle b|b\rangle = 1 \, . \tag{38}$$

Quindi gli stati $|b\rangle$ ed $|f\rangle$ sono degeneri in energia ed hanno parità fermionica opposta: formano un doppietto di supersimmetria, cioè una rappresentazione bidimensionale dell'algebra della superimmetria. La stessa procedura può essere ripetuta per costruire un autostato dell'energia bosonico partendo da un autostato fermionico con $E \neq 0$.

Se ne deduce che tutti i livelli energetici con $E \neq 0$ sono degeneri con ugual numero di stati fermionici e bosonici, mentre solo gli stati con $E = 0$ sono supersimmetrici. Questa proprietà permette di introdurre l'indice di Witten definito come $\mathrm{Tr}(-1)^{\hat{F}}$ dove la traccia è estesa su tutto lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. Tale indice risulta essere uguale al numero di stati bosonici con energia $E = 0$ meno il numero di stati fermionici con $E = 0$

$$\mathrm{Tr}(-1)^{\hat{F}} = n_b^{(E=0)} - n_f^{(E=0)} \, . \tag{39}$$

Infatti gli stati con $E \neq 0$ danno contributi alla somma che si cancellano in coppie: tutti gli stati con $E \neq 0$ si organizzano in doppietti contenenti uno stato bosonico (con $(-1)^F = 1$) ed uno stato fermionico (con $(-1)^F = -1$) che la supersimmetria trasforma tra loro e ciascun doppietto dà un contributo nullo all'indice.

Si può definire anche un indice di Witten regolarizzato come

$$\mathrm{Tr}[(-1)^F e^{-\beta\hat{H}}] \tag{40}$$

che produce lo stesso risultato. Infatti, valutandolo sulla base completa degli autostati dell'hamiltoniana

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}[(-1)^{\hat{F}} e^{-\beta\hat{H}}] &= \sum_k \langle k|(-1)^{\hat{F}} e^{-\beta E_k}|k\rangle \\ &= n_b^{(E=0)} - n_f^{(E=0)} + e^{-\beta E_1} - e^{-\beta E_1} + e^{-\beta E_2} - e^{-\beta E_2} + \ldots \\ &= n_b^{(E=0)} - n_f^{(E=0)} \\ &= \mathrm{Tr}(-1)^{\hat{F}} \, . \end{aligned} \tag{41}$$

L'indice di Witten appena introdotto ha proprietà topologiche, nel senso che è invariante per deformazioni non troppo drastiche dei parametri della teoria (ed esempio le costanti d'accoppiamento): solo coppie di stati possono lasciare il livello $E = 0$ perchè ad $E \neq 0$ devono necessariamente formare un doppietto di supersimmetria, ma un doppietto di supersimmetria non modifica l'indice di Witten. Viceversa, solo un doppietto con $E = 0$ può acquisire $E \neq 0$ a causa della variazione dei parametri della teoria, ma non può modificare il valore dell'indice.

5 Indice di Witten dall'analisi degli stati di vuoto

Ricordiamo la forma degli operatori (23) nel nostro modello. Uno stato di vuoto $|\Psi_0\rangle$ con $E = 0$ soddisfa per definizione $\hat{H}|\Psi_0\rangle = 0$. Ora dato che si può rappresentare $\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{Q}\hat{Q}^\dagger + \hat{Q}^\dagger\hat{Q})$ se ne deduce che questo stato soddifa necessariamente anche alle seguenti equazioni

$$\hat{Q}|\Psi_0\rangle = 0 \,, \qquad \hat{Q}^\dagger|\Psi_0\rangle = 0 \,. \tag{42}$$

Soluzioni generali di queste ultime equazioni hanno la seguente forma generale

$$\Psi_0(x) = \begin{pmatrix} c_- e^{-W(x)} \\ c_+ e^{+W(x)} \end{pmatrix} \tag{43}$$

dove come al solito indichiamo con $\Psi_0(x)$ l'ampiezza $\Psi_0(x) = \langle x|\Psi_0\rangle$. Infatti,

$$\begin{aligned} \hat{Q}\Psi_0(x) &= \begin{pmatrix} 0 & -i\partial_x + iW'(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \star \\ c_+ e^{W(x)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -ic_+(W' - W')e^{W(x)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \,. \end{aligned} \tag{44}$$

Similmente $\hat{Q}^\dagger\Psi_0(x) = 0$, infatti

$$\begin{aligned} \hat{Q}^\dagger\Psi_0(x) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -i\partial_x - iW'(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_- e^{-W(x)} \\ \star \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -ic_-(-W' + W')e^{-W(x)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \,. \end{aligned} \tag{45}$$

Occorre ora richiedere che la funzione d'onda sia normalizzabile fissando le costanti c_- e c_+. Ci sono tre casi distinti.

1. Caso $W(x) \stackrel{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \infty$.

In questo caso la soluzione in (43) deve necessariamente avere $c_+ = 0$, altrimenti la soluzione non sarebbe normalizzabile. Ora nel nostro modello abbiamo identificato il numero fermionico F con la carica J, per cui lo stato di vuoto ha numero fermionico nullo e parità $(-1)^F = 1$,

$$\hat{F}\Psi_0(x) = \hat{J}\Psi_0(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_- e^{-W(x)} \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \,. \tag{46}$$

Dunque l'indice di Witten vale 1,

$$\mathrm{Tr}(-1)^{\hat{F}} = 1 \,. \tag{47}$$

Naturalmente anche nella forma regolarizzata

$$\mathrm{Tr}[(-1)^{\hat{F}} e^{-\beta\hat{H}}] = 1 \tag{48}$$

poichè i contributi degli stati con energia strettamente positiva si cancellano in coppie.

2. Caso $W(x) \overset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} -\infty$

Ora la soluzione in (43) deve necessariamente avere $c_- = 0$ per garantire la normalizzabilità della soluzione. In questo caso tale soluzione ha numero fermionico $F = 1$ e parità $(-1)^F = -1$,

$$\hat{F}\Psi_0(x) = \hat{J}\Psi_0(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ c_+ e^{W(x)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c_+ e^{W(x)} \end{pmatrix} . \tag{49}$$

Dunque l'indice di Witten vale -1,

$$\mathrm{Tr}(-1)^{\hat{F}} = \mathrm{Tr}[(-1)^{\hat{F}} e^{-\beta \hat{H}}] = -1 \; . \tag{50}$$

3. Caso $W(x) \overset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$ oppure $W(x) \overset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \mp\infty$

In questo caso sia $c_- = 0$ che $c_+ = 0$ e non esistono soluzioni normalizzabili con $E = 0$. Dunque l'indice di Witten si annulla

$$\mathrm{Tr}(-1)^{\hat{F}} = \mathrm{Tr}[(-1)^{\hat{F}} e^{-\beta \hat{H}}] = 0 \tag{51}$$

e la supersimmetria è spontaneamente rotta (cioè lo stato di vuoto non è invariante per trasformazioni di supersimmetria).

Possiamo notare come l'indice di Witten abbia proprietà topologiche: si può modificare a piacere il prepotenziale $W(x)$, senza alterarne il comportamento all'infinito, ma queste deformazioni non modificano il valore di $\mathrm{Tr}(-1)^{\hat{F}}$. In generale in teoria dei campi possono emergere più stati di vuoto, e l'annullarsi dell'indice di Witten non garantisce la rottura spontanea della supersimmetria (ad esempio, potrebbero esistere due possibili stati di vuoto con $E = 0$, uno bosonico ed uno fermionico, e l'indice di Witten si annullerebbe, ma la supersimmetria non sarebbe rotta perchè la teoria sceglierebbe uno dei due possibili stati con $E = 0$ come vero stato di vuoto). Però si può affermare in generale che se l'indice di Witten non si annulla, allora la superismmetria non si può rompere spontaneamente: esistono stati di vuoto invarianti per supersimmetria!

6 Integrale funzionale e l'indice di Witten

Si può dare una rappresentazione dell'indice di Witten tramite l'integrale funzionale. Infatti possiamo ottenere la forma regolarizzata dell'indice $\mathrm{Tr}[(-1)^{\hat{F}} e^{-\beta \hat{H}}]$ partendo da una rotazione di Wick $t \to -i\beta$ dell'ampiezza di transizione $e^{-it\hat{H}}$, e quindi usando un integrale funzionale con azione euclidea S_E, ottenuta da (1) con una rotazione di Wick

$$iS[x, \psi, \bar{\psi}] \to -S_E[x, \psi, \bar{\psi}] \tag{52}$$

che produce

$$S_E[x, \psi, \bar{\psi}] = \int_0^\beta d\tau \Big[\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \bar{\psi}\dot{\psi} + \frac{1}{2}\Big(W'(x)\Big)^2 + W''(x)\bar{\psi}\psi\Big] \tag{53}$$

Si può mostare che la traccia è calcolata da un path integral con condizioni al contorno periodiche (PBC) per le variabili bosoniche e condizioni al contorno antiperiodiche (ABC) per le variabili fermioniche

$$\mathrm{Tr}\, e^{-\beta \hat{H}} = \int_{PCB} \mathcal{D}x \int_{PCB} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \; e^{-S_E[x,\psi,\bar{\psi}]} \tag{54}$$

Similmente si può mostare che l'inserimento dell'operatore $(-1)^{\hat{F}}$ ha il solo effetto di cambiare le condizioni al contorno dei fermioni da antiperiodiche a periodiche, per cui

$$\mathrm{Tr}\,[(-1)^{\hat{F}} e^{-\beta \hat{H}}] = \int_{PCB} \mathcal{D}x \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi}\ e^{-S_E[x,\psi,\bar{\psi}]}\ . \tag{55}$$

Possiamo ora calcolare di nuovo l'indice di Witten sfruttando quest'ultima rappresentazione con l'integrale funzionale. In generale il calcolo può essere abbastanza complesso, ma poichè l'indice è invariante per deformazioni continue dei parametri della teoria, possiamo deformare il prepotenziale come

$$W(x) \to \lambda W(x) \tag{56}$$

e poi prendere il limite $\lambda \to \infty$. Il risultato non dipende dalla deformazione, e quindi da λ, e questo permette un calcolo più semplice. Il calcolo produce il seguente risultato

$$\mathrm{Tr}\,[(-1)^{\hat{F}} e^{-\beta \hat{H}}] = \sum_{(\text{punti critici } x_0)} \frac{W''(x_0)}{|W''(x_0)|} \tag{57}$$

dove la somma è su tutti i punti critici x_0 definiti come punti di massimo o minimo locali ($W'(x_0) = 0$). Questo risultato esemplifica come l'indice colleghi proprietá topologiche a caratteristiche locali (punti critici).

<u>Traccia del calcolo</u>

Occorre sommare su tutte le traiettorie periodiche, cioè chiuse su se stesse dopo un tempo euclideo β. Indichiamo queste traiettorie con $[x(\tau), \psi(\tau), \bar{\psi}(\tau)]$. Il contributo massimo al path integral per $\lambda \to \infty$ è dato dalle traiettorie $[x_0, 0, 0]$ che sono sicuramente periodiche, e dove le costanti x_0 sono i punti critici del prepotenziale $W(x)$, definiti dall'equazione $W'(x_0) = 0$. Questo corrisponderebbe alla approssimazione classica del path integral

$$\mathrm{Tr}\,[(-1)^{\hat{F}} e^{-\beta \hat{H}}] \sim \sum_{(\text{punti critici } x_0)} e^{-S_E[x_0,0,0]} = \sum_{(\text{punti critici } x_0)} e^{-\beta \frac{\lambda^2}{2}(W'(x_0))^2} = \sum_{(\text{punti critici } x_0)} 1\ .$$

Occorre poi aggiungere le correzioni semiclassiche, date dalle fluttazioni attorno ai "vuoti classici" $[x_0 + \delta x(\tau), \psi(\tau), \bar{\psi}(\tau)]$ che sono date tenendo solo la parte quadratica in $[\delta x(\tau), \psi(\tau), \bar{\psi}(\tau)]$ dell'espansione dell'azione attorno ai vuoti classici $[x_0, 0, 0]$. Queste correzioni corrispondono al calcolo di integrali funzionali gaussiani che danno origine a determinanti funzionali. Proviamo a calcolarli. Sviluppiamo l'azione in serie di Taylor attorno alla traiettoria $[x_0, 0, 0]$ tenendo solo la parte quadratica nei campi $[\delta x(\tau), \psi(\tau), \bar{\psi}(\tau)]$. Si ottiene

$$\begin{aligned} S_E[x,\psi,\bar{\psi}] &= \int_0^\beta d\tau \Big[\frac{1}{2}\dot{\delta x}^2 + \bar{\psi}\dot{\psi} + \frac{\lambda^2}{2}\Big(W'(x_0) + W''(x_0)\delta x + \cdots\Big)^2 + \lambda W''(x_0)\bar{\psi}\psi + \cdots\Big] \\ &= \int_0^\beta d\tau \Big[\frac{1}{2}\delta x[-\partial_\tau^2 + \lambda^2 (W''(x_0))^2]\delta x + \bar{\psi}[\partial_\tau + \lambda W''(x_0)]\psi\Big] + \cdots \end{aligned} \tag{58}$$

e l'integrale funzionale gaussiano sulle traiettorie $[\delta x(\tau), \psi(\tau), \bar{\psi}(\tau)]$ produce

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\,[(-1)^{\hat{F}} e^{-\beta \hat{H}}] &= \sum_{(\text{punti critici } x_0)} \int_{PCB} \mathcal{D}\delta x \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi}\ e^{-S_E[x_0+\delta x,\psi,\bar{\psi}]} \\ &= \sum_{(\text{punti critici } x_0)} \frac{\mathrm{Det}\,[\partial_\tau + \lambda W''(x_0)]}{\mathrm{Det}^{1/2}\,[-\partial_\tau^2 + \lambda^2 (W''(x_0))^2]}\ . \end{aligned} \tag{59}$$

Questi determinanti possono essere definiti come il prodotto degli autovalori. Una base di funzioni periodiche con periodo β è data da

$$f_n(\tau) = e^{\frac{2\pi i n \tau}{\beta}} \qquad n \in Z \tag{60}$$

che sono anche autofunzioni degli operatori che compaiono in (59)

$$\begin{aligned}
&[\partial_\tau + \lambda W''(x_0)] f_n(\tau) = \lambda_n f_n(\tau) \quad \Rightarrow \quad \lambda_n = \frac{2\pi i n}{\beta} + \lambda W''(x_0) \\
&[-\partial_\tau^2 + (\lambda W''(x_0))^2] f_n(\tau) = \Lambda_n f_n(\tau) \quad \Rightarrow \quad \Lambda_n = \Big(\frac{2\pi n}{\beta}\Big)^2 + (\lambda W''(x_0))^2
\end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{Det}\,[\partial_\tau + \lambda W''(x_0)]}{\mathrm{Det}^{1/2}\,[-\partial_\tau^2 + \lambda^2 (W''(x_0))^2]} &= \prod_{n\in Z} \frac{\lambda_n}{\Lambda_n^{1/2}} \\
&= \prod_{n\in Z} \frac{\frac{2\pi i n}{\beta} + \lambda W''(x_0)}{\Big[\Big(\frac{2\pi n}{\beta}\Big)^2 + (\lambda W''(x_0))^2\Big]^{1/2}} \\
&= \frac{\lambda W''(x_0)}{|\lambda W''(x_0)|} \prod_{n>0} \frac{[\frac{2\pi i n}{\beta} + \lambda W''(x_0)][-\frac{2\pi i n}{\beta} + \lambda W''(x_0)]}{\Big(\frac{2\pi n}{\beta}\Big)^2 + (\lambda W''(x_0))^2} \\
&= \frac{W''(x_0)}{|W''(x_0)|}\ .
\end{aligned} \tag{61}$$

Dunque abbiamo calcolato il seguente valore per l'indice di Witten

$$\mathrm{Tr}\,[(-1)^{\hat F} e^{-\beta \hat H}] = \sum_{(\text{punti critici } x_0)} \frac{W''(x_0)}{|W''(x_0)|}\ . \tag{62}$$

Questo esempio mostra come l'indice di Witten che descrive proprietà globali (cioè topologiche) della teoria sia collegato anche a proprietà locali (in questo caso i punti di massimo e minimo).

7 Superspazio

Il superspazio è una costruzione utile che permette di formulare facilmente teorie supersimmetriche. È costruito aggiungendo coordinate anticommutanti alle coordinate usuali dello spaziotempo e permette di interpretare geometricamente le trasformazioni di superisimmetria come opportune traslazioni nelle direzioni anticommutanti. Esemplifichiamo questa costruzione nel caso della meccanica, che può essere reinterpretata come una teoria di campo in (0+1) dimensioni spaziotemporali. L'estensione ad uno spaziotempo (3+1) dimensionale è concettualmente immediata e comporta solo complicazioni algebriche.

7.1 Invarianza temporale

È utile riconsiderare in modo critico gli elementi che garantiscono la costruzione di azioni invariati per traslazione temporale. Queste considerazioni possono essere estese al caso di traslazioni lungo le direzioni anticommutanti. Nel caso di un grado di libertà descritto dalla variabile dinamica $x(t)$, una trasformazione per traslazione temporale infinitesima ($t \to t + a$) contiene il solo termine di trasporto

$$\delta_{_T} x(t) \equiv x'(t) - x(t) = -a\dot{x}(t) = (iaH)x(t) \tag{63}$$

che abbiamo riscritto usando l'operatore differenziale $H \equiv i\frac{\partial}{\partial t}$. Questo operatore può essere interpretato come generatore di un gruppo di trasformazioni abeliane ad un parametro, il gruppo delle traslazioni temporali, isomorfo ad R il gruppo dei numeri reali. Si noti che una trasformazione finita è ottenuta tramite esponenziazione $x'(t) = e^{iaH}x(t) = x(t-a)$. Anche derivate temporali di $x(t)$ si trasformano nello stesso modo

$$\delta_{_T} \dot{x}(t) = \frac{\partial}{\partial t}(\delta_{_T} x(t)) = -a\ddot{x}(t) = (iaH)\dot{x}(t) \ . \tag{64}$$

Azioni invarianti possono essere ottenute come integrali temporali di una lagrangiana che dipende dal tempo solo in modo implicito attraverso le variabili dinamiche

$$S[x] = \int dt\, L(x, \dot{x}) \tag{65}$$

poiché come conseguenza di (63) e (64) segue che

$$\delta_{_T} L(x, \dot{x}) = -a\frac{\partial}{\partial t}L(x, \dot{x}) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-aL(x, \dot{x})\right) \tag{66}$$

e quindi

$$\delta_{_T} S[x] = \int dt\, \delta_{_T} L(x, \dot{x}) = \int dt\, \frac{\partial}{\partial t}\left(-aL(x, \dot{x})\right) = 0 \tag{67}$$

a meno di termini di bordo, e questo è sufficiente per provarne l'invarianza.

7.2 Superspazio

Definiamo ora il superspazio $R^{1|2}$ (superspazio $N = 2$ in $d = 1$) come definito dalle coordinate

$$(t, \theta, \bar{\theta}) \in R^{1|2} \tag{68}$$

dove $(\theta, \bar{\theta})$ sono variabili di Grassmann complesse. Il generatore delle traslazioni in t è dato come sopra dall'operatore differenziale

$$H = i\frac{\partial}{\partial t} \ . \tag{69}$$

Unito agli operatori differenziali

$$Q = \frac{\partial}{\partial \theta} + i\bar{\theta}\frac{\partial}{\partial t} \ , \qquad \bar{Q} = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} + i\theta\frac{\partial}{\partial t} \tag{70}$$

si ottiene una realizzazione dell'algebra della supersimmetria $N = 2$

$$\{Q, \bar{Q}\} = 2H \ , \qquad \{Q, Q\} = \{\bar{Q}, \bar{Q}\} = 0 \ , \quad [Q, H] = [\bar{Q}, H] = 0 \ . \tag{71}$$

Traslazioni generate da questi operatori differenziali producono trasformazioni di supersimmetria.

7.3 Supercampi

I supercampi sono funzioni del superspazio e saranno utilizzati come variabili dinamiche per descrivere azioni supersimmetriche. Prendiamo l'esempio di un supercampo scalare $X(t,\theta,\bar\theta)$ che può essere sviluppato in componenti (sviluppo in serie di Taylor nelle variabili anticommutanti) come

$$X(t,\theta,\bar\theta) = x(t) + i\theta\psi(t) + i\bar\theta\bar\psi(t) + \theta\bar\theta F(t) \; . \tag{72}$$

Le trasformazioni di supersimmetria del supercampo per definizione sono generate dagli operatori differenziali Q e $\bar Q$

$$\delta X(t,\theta,\bar\theta) = (\bar\epsilon Q + \epsilon\bar Q)X(t,\theta,\bar\theta) \tag{73}$$

con ϵ ed $\bar\epsilon$ parametri di Grassmann. Infatti sviluppando in componenti si ottiene

$$\begin{aligned} \delta x &= i\epsilon\bar\psi + i\bar\epsilon\psi \\ \delta\psi &= -\epsilon(\dot x + iF) \\ \delta\bar\psi &= -\bar\epsilon(\dot x - iF) \\ \delta F &= \bar\epsilon\dot\psi - \epsilon\dot{\bar\psi} \; . \end{aligned} \tag{74}$$

7.4 Derivate covarianti ed azioni supersimmetriche

Per poter scrivere lagrangiane invarianti per supersimmetria è utile introdurre le derivate covarianti (sotto supersimmetria), date da

$$D = \frac{\partial}{\partial\theta} - i\bar\theta\frac{\partial}{\partial t} \; , \qquad \bar D = \frac{\partial}{\partial\bar\theta} - i\theta\frac{\partial}{\partial t} \tag{75}$$

e definite dalla proprietà fondamentale di anticommutare con i generatori della supersimmetria riportati in (70)

$$\{D,Q\} = \{D,\bar Q\} = \{\bar D,Q\} = \{\bar D,\bar Q\} = 0 \; . \tag{76}$$

Si noti che gli operatori D e $\bar D$ differiscono dagli operatori Q e $\bar Q$ per il segno del secondo termine e soddisfano l'algebra

$$\{D,\bar D\} = -2i\partial_t \; , \qquad \{D,D\} = \{\bar D,\bar D\} = 0 \; . \tag{77}$$

Grazie a queste proprietà, derivate covarianti di supercampi generano supercampi, cioè oggetti che si trasformano per supersimmetria come il supercampo in (73)

$$\delta(DX) = D(\delta X) = D\Big((\bar\epsilon Q + \epsilon\bar Q)X\Big) = (\bar\epsilon Q + \epsilon\bar Q)DX \tag{78}$$

e similmente per $\bar D X$. Come conseguenza una lagrangiana $L(X,DX,\bar DX)$, funzione del punto del superspazio solo attraverso i supercampi dinamici e le loro derivate covarianti (cioè senza alcuna dipendenza esplicita), si trasforma per trasformazioni di supersimmetria definite sulle variabili dinamiche da (73) come

$$\delta L(X,DX,\bar DX) = (\bar\epsilon Q + \epsilon\bar Q)L(X,DX,\bar DX) \; . \tag{79}$$

Di conseguenza l'azione definita con un'integrazione sull'intero superspazio da

$$S[X] = \int dt d\bar\theta d\theta \, L(X,DX,\bar DX) \tag{80}$$

è manifestamente invariante (si trasforma solo in termini di bordo).

In particolare, il modello descritto da

$$S[X] = \int dt d\bar{\theta} d\theta \left(\frac{1}{2} DX\bar{D}X + W(x) \right) \tag{81}$$

è manifestamente supersimmetrico. È facile vedere che riproduce il modello in eq. (1). Infatti si può procedere con un calcolo diretto, oppure in modo più elegante usando l'algebra delle derivate covarianti. Descriviamo qui di seguito questo secondo metodo, in modo piuttosto telegrafico. A meno di derivate totali si può scrivere

$$\begin{aligned}
S[X] &= \int dt d\bar{\theta} d\theta \left(\frac{1}{2} DX\bar{D}X + W(x) \right) \\
&= \int dt \bar{D}D \left(\frac{1}{2} DX\bar{D}X + W(x) \right) \Big|_{\theta,\bar{\theta}=0} \\
&= \int dt \left(-\frac{1}{2} \bar{D}DXD\bar{D}X - iDX\bar{D}\dot{X} + W''(X)\bar{D}XDX + W'(X)\bar{D}DX \right) \Big|_{\theta,\bar{\theta}=0}
\end{aligned}$$

ed usando ora le seguenti proiezioni sulla prima componente dei vari supercampi

$$\begin{aligned}
X\Big|_{\theta,\bar{\theta}=0} &= x(t) \\
DX\Big|_{\theta,\bar{\theta}=0} &= i\psi(t) \\
\bar{D}X\Big|_{\theta,\bar{\theta}=0} &= i\bar{\psi}(t) \\
D\bar{D}X\Big|_{\theta,\bar{\theta}=0} &= -(F + i\dot{x}) \\
\bar{D}DX\Big|_{\theta,\bar{\theta}=0} &= F - i\dot{x}
\end{aligned}$$

si ottiene a meno di derivate totali

$$S[X] = \int dt \left(\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}F^2 + i\bar{\psi}\dot{\psi} + W'(x)F - W''(x)\bar{\psi}\psi \right) . \tag{82}$$

Eliminado il campo ausiliario F attraverso le sue equazioni del moto algebriche ($F = -W'(x)$) si ottiene l'azione in (1).