

# Meccanica quantistica ed equazioni d'onda relativistiche

(Appunti per il corso di Fisica Nucleare e Subnucleare 2010/11)

Fiorenzo Bastianelli

In queste note introduciamo equazioni d'onda libere associate alla propagazione di particelle quantistiche.

## 1 Equazione di Schrödinger

Dopo l'introduzione del quanto d'azione  $h$  da parte di Planck e l'uso che ne fece Einstein nello spiegare l'effetto fotoelettrico (fotoni con energia  $E = h\nu$ ), e dopo Bohr con il suo modello atomico con livelli di energia quantizzati, rimaneva ancora da capire quali leggi fondamentali potessero organizzare e sistematizzare quanto andava emergendo, cioè quali fossero le vere leggi della meccanica quantistica. Un contributo importante venne da de Broglie, che nel 1923 suggerì un'estensione dell'idea di Einstein congetturando un comportamento ondulatorio per le particelle di materia, assegnando una lunghezza d'onda  $\lambda = \frac{h}{p}$  a particelle con momento  $p$ . Questa visione rese interpretabile l'assunzione di Bohr di livelli energetici atomici quantizzati per l'elettrone come i soli possibili, perché corrispondono a traiettorie contenenti un numero intero di lunghezze d'onda dell'elettrone, quindi stabili per interferenza costruttiva. de Broglie si ispirò per questa sua idea alla meccanica relativistica: un campo d'onda con frequenza  $\nu = \frac{1}{T}$  (dove  $T$  è il periodo) e con numero d'onda  $\vec{k}$  (con  $|\vec{k}| = \frac{1}{\lambda}$ , dove  $\lambda$  è la lunghezza d'onda) ha la forma

$$\psi(\vec{x}, t) \sim e^{2\pi i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \nu t)}. \quad (1)$$

Assumendo che la fase  $2\pi(\vec{k} \cdot \vec{x} - \nu t)$  fosse un invariante di Lorentz, e sapendo che le coordinate spazio-temporali  $(\vec{x}, t)$  formano un quadrivettore, de Broglie dedusse che anche  $(\vec{k}, \nu)$  doveva essere un quadrivettore, e quindi trasformarsi per cambio di sistema di riferimento inerziale come  $(\vec{x}, t)$  o  $(\vec{p}, E)$ . Poiché nel caso dei fotoni valeva  $E = h\nu$ , risultò naturale assumere una proporzionalità tra i quadrivettori  $(\vec{k}, \nu)$  e  $(\vec{p}, E)$  per particelle materiali con la stessa costante di proporzionalità  $h$  valida per i fotoni

$$\vec{p} = h\vec{k}, \quad E = h\nu \quad (2)$$

e cioè  $\lambda = \frac{h}{|\vec{p}|}$  quale lunghezza d'onda per particelle di materia con momento  $\vec{p}$ . Quindi l'onda associata a particelle materiali assume la forma

$$\psi(\vec{x}, t) \sim e^{2\pi i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \nu t)} = e^{\frac{2\pi i}{h}(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)} = e^{\frac{i}{h}(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)}. \quad (3)$$

A questo punto Schrödinger si chiese: che tipo di equazione soddisfa tale funzione? Iniziò in effetti direttamente con il caso relativistico, ma siccome non gli fu possibile riprodurre alcuni risultati sperimentali per l'atomo d'idrogeno, si accontentò del limite non-relativistico che sembrava funzionare meglio (infatti oggi sappiamo che alcune correzioni relativistiche sono parzialmente compensate da effetti dovuti allo spin dell'elettrone, di cui non si teneva conto). Per una particella libera non-relativistica vale  $E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$ , quindi la funzione d'onda (3) soddisfa

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = E\psi(\vec{x}, t) = \frac{\vec{p}^2}{2m} \psi(\vec{x}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{x}, t) \quad (4)$$

e quindi

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{x}, t) \quad (5)$$

che è detta equazione libera di Schrödinger. Dunque il trucco per ottenere una equazione d'onda da un modello classico di particella è questo:

- considerare la relazione classica tra energia ed impulso  $E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$
- sostituire  $E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$  e  $\vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}$
- interpretare questi operatori differenziali come agenti su una funzione d'onda  $\psi$ :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{x}, t) .$$

Naturalmente Schrödinger estese queste sue considerazioni ad una particella immersa nel campo coulombiano di un nucleo per dedurre analiticamente le conseguenze della meccanica quantistica ondulatoria e riprodurre alcuni risultati sperimentali ed il modello atomico di Bohr, ottenendo un certo successo.

Seppur dedotta originariamente dal limite non-relativistico di una particella puntiforme, scritta nella forma

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = H\psi \quad (6)$$

dove  $H$  è l'operatore hamiltoniano, l'equazione di Schrödinger acquista una validità universale per la descrizione di sistemi quantistici.

Principio di indeterminazione. Un' onda perfettamente sinusoidale  $\psi(\vec{x}, t) = e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x} - Et)}$  è estesa su tutto lo spazio tempo ( $|\psi(\vec{x}, t)|^2 = 1$ ) e non è normalizzabile ( $\int d^3x |\psi(\vec{x}, t)|^2 = \infty$ ): infatti per tale onda il momento è noto esattamente ad ogni istante di tempo (vale  $\vec{p}$ ), ma non lo è la posizione della particella, che infatti potrebbe trovarsi ovunque (dall'analogia con le onde luminose, dove l'intensità è proporzionale al modulo quadro dell'ampiezza, si intuì presto che la densità di probabilità di trovare la particella in un punto doveva essere collegata al modulo quadro della funzione d'onda).

Per localizzare la particella si possono sommare varie frequenze, o meglio vari numeri d'onda  $\vec{k}$ . In termini del momento  $\vec{p}$  questo si traduce in un integrale della forma

$$\psi(\vec{x}, t) = \int d^3p \phi(\vec{p}) e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x} - Et)} \quad (7)$$

con  $\phi(\vec{p})$  opportuni coefficienti di Fourier. Come conseguenza matematica della trasformata di Fourier si può dedurre che l'incertezza sulla posizione  $\Delta\vec{x}$ , codificata in  $|\psi(\vec{x}, t)|^2$ , moltiplicata per l'incertezza sul valore del momento  $\Delta\vec{p}$ , codificata in  $|\phi(\vec{p})|^2$ , deve essere necessariamente maggiore di una quantità minima proporzionale ad  $\hbar$ :

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \text{etc.} \quad (8)$$

Strettamente collegate al principio di indeterminazione sono le regole di commutazione che emergono tra le variabili dinamiche: ad esempio se  $p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$  è da considerarsi come un operatore differenziale, si ha

$$[x, p_x] = i\hbar \quad (9)$$

etc. per le altre coordinate.

Conservazione della probabilità. Se una particella non-relativistica è descritta dalla funzione d'onda normalizzabile  $\psi(\vec{x}, t)$  (N.B. l'onda piana non è normalizzabile, per cui occorre considerare pacchetti d'onda, come descritto sopra), allora si può interpretare la grandezza  $\rho(\vec{x}, t) = |\psi(\vec{x}, t)|^2$  come densità di probabilità di trovare la particella nel punto  $\vec{x}$  al tempo  $t$ . In particolare, si può provare che  $\rho$  soddisfa una equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (10)$$

con una opportuna corrente  $\vec{J}$ . Questo equivale alla conservazione della probabilità di trovare la particella da qualche parte ad ogni istante di tempo. In particolare la particella non-relativistica non può essere creata né distrutta. Questo è comprensibile pensando al limite non-relativistico di una particella, limite formalmente ottenuto mandando  $c \rightarrow \infty$  (velocità limite di propagazione delle interazioni molto grande, tendente all'infinito come limite matematico): infatti dalla formula relativistica dell'energia

$$E = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4} = mc^2 \sqrt{1 + \frac{\vec{p}^2}{m^2 c^2}} \implies mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m^2} + \dots \quad (11)$$

da cui si vede che per  $c \rightarrow \infty$  occorrerebbe un'energia infinita per creare una particella di massa  $m$ .

## 2 Equazioni d'onda relativistiche

### 2.1 Equazione di Klein-Gordon

Come ottenere una equazione d'onda relativistica? Un'idea semplice è quella di usare la corretta relazione relativistica tra energia ed impulso. Infatti sappiamo che

$$p_\mu p^\mu = -m^2 c^2 \implies -\frac{E^2}{c^2} + \vec{p}^2 = -m^2 c^2 \implies E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (12)$$

Quindi si potrebbe usare  $E = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$ , ma l'equazione che emerge con le sostituzioni  $E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$  e  $\vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}$  produce un'equazione complicatissima di difficile interpretazione, contenente una radice quadrata di operatori differenziali

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{x}, t) = \sqrt{-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4} \phi(\vec{x}, t). \quad (13)$$

Klein e Gordon proposero una equazione più semplice considerando la relazione quadratica tra energia ed impulso, che ha il pregio di non contenere nessuna radice quadrata. Partendo da  $E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$ , ed usando  $E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$  e  $\vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}$ , ottennero l'equazione

$$\left( -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi(\vec{x}, t) = 0 \quad (14)$$

conosciuta oggi come equazione di Klein-Gordon. In notazioni relativistiche si può scrivere come

$$(\partial_\mu \partial^\mu - \mu^2) \phi(x) = 0, \quad \mu \equiv \frac{mc}{\hbar} \quad (15)$$

ed anche come

$$(\square - \mu^2) \phi(x) = 0 \quad (16)$$

dove  $\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2$  indica l'operatore di d'Alembert (il d'alembertiano). Secondo Dirac, Schrödinger considerò questa equazione ancor prima di dedurre la sua equazione, ma insoddisfatto dei risultati che sembrava produrre per l'atomo d'idrogeno, si accontentò del suo limite non relativistico. Quando più tardi si decise a pubblicarla, era già stato preceduto da Klein e Gordon.

Soluzioni dell'eq. di Klein-Gordon. Naturalmente, ovvie soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon sono le soluzioni di onda piana

$$\phi(x) = e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x} - Et)}, \quad \text{con} \quad E = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}, \quad (17)$$

che possono essere collegate a particelle scalari (cioè con spin  $s = 0$ ) di massa  $m$ . Ma esiste anche un'altra classe di soluzioni, quelle con energie negative  $E = -\sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$ . Come interpretarle fisicamente? Queste segnalano l'esistenza di "antiparticelle", particelle con stessa massa e spin, ma con tutte le possibili cariche interne come la carica elettrica di segno opposto. Questa interpretazione, originariamente proposta da Dirac per le soluzioni della sua equazione (l'equazione di Dirac che descrive particelle relativistiche di massa  $m$  e spin  $s = \frac{1}{2}$ ), è necessaria per tutte le equazioni d'onda relativistiche, ed è giustificabile rigorosamente all'interno della teoria quantistica dei campi (conosciuta anche come seconda quantizzazione: in tale formalismo le equazioni d'onda come quella sopra descritta, sono dapprima considerate come equazioni di campo classiche e poi quantizzate opportunamente; in tale modo il campo d'onda quantizzato permette di descrivere un numero arbitrario di particelle identiche e corrispondenti antiparticelle, e trattare processi in cui il numero di particelle totali varia a causa di processi di creazione o annichilazione di particelle).

Una soluzione generale del campo di Klein-Gordon libero può essere visto come una combinazione lineare (nel senso di Fourier) di soluzioni di onda piana con energie sia positive che negative. Ad esempio, se il campo di Klein Gordon è considerato reale (campo scarico), la soluzione generale assume la forma (in unità dove vale  $\hbar = c = 1$ )

$$\phi(x) \sim \int d^3p \left( a(\vec{p}) e^{-iE_p t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a^*(\vec{p}) e^{iE_p t - i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right), \quad E_p \equiv \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} > 0 \quad (18)$$

dove i coefficienti di Fourier  $a(\vec{p})$  ed  $a^*(\vec{p})$  sono associati (nell'interpretazione della teoria dei campi quantistici) alla distruzione ed alla creazione di particelle. In tal caso particelle ed antiparticelle coincidono, non ci sono cariche come la carica elettrica che possano differenziarle. Nel caso di un campo di Klein-Gordon complesso (campo carico), la soluzione generale assume la forma

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int d^3p \left( a(\vec{p}) e^{-iE_p t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} + b^*(\vec{p}) e^{iE_p t - i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) \\ \phi^*(x) &= \int d^3p \left( b(\vec{p}) e^{-iE_p t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a^*(\vec{p}) e^{iE_p t - i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

dove ora i coefficienti di Fourier  $a(\vec{p})$  ed  $a^*(\vec{p})$  sono associati alla distruzione ed alla creazione di particelle, mentre i coefficienti di Fourier  $b(\vec{p})$  ed  $b^*(\vec{p})$  alla distruzione ed alla creazione di antiparticelle (sempre in una interpretazione di seconda quantizzazione).

Potenziale di Yukawa. Consideriamo l'equazione con sorgente esterna

$$(\square - \mu^2)\phi(x) = J(x) \quad (20)$$

con  $J(x) = g\delta^{(3)}(\vec{x})$  che descrive una sorgente statica puntiforme localizzata nell'origine delle coordinate spaziali (con  $\delta^{(3)}(\vec{x})$  si indica la funzione delta di Dirac). Se consideriamo una soluzione statica, indipendente dal tempo, allora l'equazione si semplifica e diventa

$$(\nabla^2 - \mu^2)\phi(\vec{x}) = g\delta^{(3)}(\vec{x}) \quad (21)$$

Per  $\mu = 0$  riconosciamo l'equazione di Poisson dell'elettrostatica, con soluzione il potenziale coulombiano

$$\phi(\vec{x}) = -\frac{g}{4\pi} \frac{1}{r}. \quad (22)$$

Per  $\mu \neq 0$  la soluzione può essere calcolata usando la trasformata di Fourier che genera il potenziale di Yukawa

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{(-g)}{p^2 + \mu^2} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} = -\frac{g}{4\pi} \frac{e^{-\mu r}}{r}. \quad (23)$$

È facile controllare che queste soluzioni soddisfano le rispettive equazioni per  $r \neq 0$  se si usa il laplaciano scritto in coordinate sferiche ( $\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \partial_r + \text{derivate sugli angoli}$ ), mentre il comportamento singolare ad  $r = 0$  è collegato all'intensità della carica puntiforme.

Azione libera e propagatore. L'equazione di Klein-Gordon può essere derivata da un semplice principio d'azione. Per un campo scalare reale  $\phi^* = \phi$ , l'azione è data da

$$S[\phi] = \int d^4x \left( -\frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{\mu^2}{2} \phi^2 \right) \quad (24)$$

e richiedendo la condizione di minimo  $\delta S = 0$  sotto variazioni  $\delta\phi(x)$  si ottiene l'equazione di Klein-Gordon

$$\frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi(x)} = (\square - \mu^2)\phi(x) = 0. \quad (25)$$

Equazioni del moto libere e relativa azione descrivono la propagazione libera del campo d'onda o, equivalentemente, delle particelle associate, i quanti del campo.

Nella teoria quantistica è utile considerare il “propagatore libero”, che essenzialmente corrisponde alla funzione di Green  $G(x, y)$  associata all'equazione di Klein-Gordon, e descrive matematicamente la propagazione di una particella dal punto dello spazio-tempo  $x$  al punto dello spazio-tempo  $y$ , o viceversa, ed indicato dal diagramma di Feynman



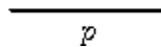
La funzione di Green ell'equazione di Klein-Gordon corrisponde alla soluzione dell'equazione di Klein-Gordon in presenza di una sorgente puntiforme istantanea di intensità unitaria. In formule

$$(-\square_x + \mu^2)G(x, y) = \delta^4(x - y). \quad (26)$$

In trasformata di Fourier la soluzione si scrive come

$$G(x, y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip_\mu(x^\mu - y^\mu)}}{p^2 + \mu^2 - i\epsilon} \quad (27)$$

dove  $\epsilon \rightarrow 0^+$  è un parametro infinitesimo positivo che implementa opportune condizioni al contorno (prescrizione causale di Feynman). In una interpretazione particellare descrive sia la propagazione di “particelle reali” che gli effetti di “particelle virtuali”. Il propagatore è spesso descritto con la sua trasformata di Fourier,  $\frac{1}{p^2 + \mu^2}$ , ed indicato con il seguente diagramma di Feynman



dove  $p$  indica il quadrimomento trasportato della particella che scorre lungo la linea.

Si noti che conoscendo la funzione di Green  $G(x, y)$ , si può ottenere una soluzione dell'equazione non omogenea

$$(-\square + \mu^2)\phi(x) = J(x) \quad (28)$$

con  $J(x)$  sorgente arbitraria come

$$\phi(x) = \int d^4y G(x, y)J(y) . \quad (29)$$

Questo si verifica facilmente inserendo (29) in (28) ed usando la proprietà (26).

Le interazioni in generale sono descritte aggiungendo opportune sorgenti, come sopra, e/o termini non lineari del campo d'onda (autointerazioni) alle equazioni del moto. Equivalentemente questo è descritto da opportuni potenziali di interazione che devono essere aggiunti all'azione.

Altre equazioni d'onda. L'equazione di Klein-Gordon è un'equazione relativistica che descrive particelle scalari, cioè con spin  $s = 0$ , ma poiché tiene conto della corretta relazione relativistica tra energia ed impulso contiene l'essenza di tutte le equazioni relativistiche (come l'apparente presenza di soluzioni con energie negative, da reinterpretare come antiparticelle con energia positiva). Le equazioni d'onda corrette per descrivere particelle con spin  $s$  dipende dal valore dello spin e sono conosciute come segue:

- spin 0 → equazione di Klein-Gordon
- spin  $\frac{1}{2}$  → equazione di Dirac
- spin 1 senza massa → equazioni (libere) di Maxwell
- spin 1 massiva → equazioni di Proca
- spin  $\frac{3}{2}$  → equazione di Rarita-Schwinger
- spin 2 → equazioni di Pauli-Fierz (equazioni di Einstein linearizzate).

In generale particelle relativistiche sono classificate da massa  $m$  e spin  $s$ , dove il valore dello spin indica che ci sono in generale  $2s + 1$  componenti fisiche indipendenti della funzione d'onda, a meno che  $m = 0$ , nel qual caso esistono solo due componenti fisiche (collegate all'elicità, definita come proiezione dello spin lungo la direzione del moto).

## 2.2 Equazioni libere di Maxwell

Le equazioni libere di Maxwell possono essere interpretate come equazioni per la propagazione di particelle di spin 1 senza massa (come il fotone)

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= 0 \\ \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

La seconda di queste equazioni può essere risolta facilmente introducendo il quadripotenziale  $A_\mu$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu . \quad (31)$$

Questa posizione risolve l'equazione, ma contiene una ambiguità nota come "simmetria di gauge": la ridefinizione

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda , \quad (32)$$

con  $\Lambda$  funzione arbitraria del punto dello spazio-tempo determina gli stessi campi elettrici e magnetici in quanto  $F_{\mu\nu}$  rimane invariante. Si può usare questa invarianza per scegliere un "gauge", cioè una condizione supplementare su  $A_\mu$ . Scegliendo il gauge di Lorenz  $\partial^\mu A_\mu = 0$ , la prima equazione in (30) assume la forma

$$\square A_\mu = 0 \quad (33)$$

che mostra come le quattro componenti del campo  $A_\mu$  soddisfino equazioni massless di Klein-Gordon. A questo punto potrebbe sembrare che ci siano 4 polarizzazioni indipendenti per il fotone descritto da  $A_\mu$ . In realtà ci sono solo due componenti fisiche (un campo di spin 1 e massa zero ha solo due componenti indipendenti) a causa del vincolo  $\partial^\mu A_\mu = 0$  e della residua invarianza di gauge. Le due componenti fisiche corrispondono ai due possibili valori dell'elicità del fotone (elicità = proiezione dello spin lungo la direzione di moto della particella) o, equivalentemente, alle due possibili polarizzazioni circolari delle onde elettromagnetiche.

### 2.3 Equazione di Proca

Le equazioni di Proca per un campo d'onda  $A_\mu$  si possono scrivere nel modo seguente

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} - m^2 A_\nu = 0 \quad (34)$$

dove  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . Possono essere scritte in una forma equivalente notando l'identità  $\partial^\mu \partial^\nu F_{\mu\nu} = 0$  che implica

$$\partial^\mu \partial^\nu F_{\mu\nu} = m^2 \partial^\nu A_\nu(x) = 0 . \quad (35)$$

Quindi per  $m \neq 0$  si ha il vincolo

$$\partial^\mu A_\mu = 0 . \quad (36)$$

Utilizzando questa relazione si possono scrivere le equazioni di Proca come quattro equazioni di Klein-Gordon con in più un vincolo

$$\begin{aligned} (\square - m^2)A_\mu &= 0 \\ \partial^\mu A_\mu &= 0 . \end{aligned} \quad (37)$$

Queste equazioni corrispondono a 3 polarizzazioni fisiche, possedute appunto dalle particelle di spin 1 massive.

### 2.4 Equazione di Dirac

Storicamente Dirac trovò la corretta equazione per descrivere particelle di spin  $\frac{1}{2}$  cercando un'equazione relativistica che potesse avere un'interpretazione probabilistica ed essere consistente con i principi interpretativi della meccanica quantistica, a differenza dell'equazione di Klein-Gordon che non ammette questa interpretazione. Sebbene un'interpretazione probabilistica non sarà tenibile in presenza di interazioni (paradosso di Klein), e la funzione d'onda di Dirac dovrà essere trattata come un campo classico da quantizzare (seconda quantizzazione), può essere utile ripercorrere la deduzione che portò Dirac alla formulazione di un'equazione del primo ordine nel tempo, l'equazione di Dirac

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi(x) = 0 \quad (38)$$

dove la funzione d'onda  $\psi(x)$  ha quattro componenti (spinore di Dirac) e le  $\gamma^\mu$  sono 4 matrici  $4 \times 4$ . Poichè le quattro componenti del campo di Dirac  $\psi(x)$  non sono componenti di un quadrivettore, ma sono di natura spinoriale e si trasformano in modo differente per trasformazioni di Lorentz, occorre usare indici diversi per indicarne le componenti senza ambiguità. In questo contesto usiamo indici  $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$  per indicare le componenti di un quadrivettore ed indici  $\alpha, \beta, \dots = 1, 2, 3, 4$  per indicare le componenti di uno spinore di Dirac. L'equazione (38) si scrive in modo più esplicito come

$$\left( (\gamma^\mu)_{\alpha}^{\beta} \partial_\mu + m \delta_{\alpha}^{\beta} \right) \psi_\beta(x) = 0 . \quad (39)$$

e contiene quattro equazioni distinte ( $\alpha = 1, \dots, 4$ ).

Matrici gamma. La relazione relativistica tra energia ed impulso di una particella libera

$$p^\mu p_\mu = -m^2 c^2 \quad \Longleftrightarrow \quad E^2 = c^2 \vec{p}^2 + m^2 c^4 \quad (40)$$

con le sostituzioni

$$p^0 = \frac{E}{c} \rightsquigarrow i \frac{\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \rightsquigarrow -i \hbar \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \quad \Longleftrightarrow \quad p_\mu \rightsquigarrow -i \hbar \partial_\mu \quad (41)$$

porta all'equazione di Klein Gordon che è del secondo ordine nelle derivate temporali: come conseguenza la corrente conservata  $U(1)$  associata non ha una densità di carica definita positiva che possa essere interpretata come densità di probabilità. Dirac allora propose una relazione lineare della forma

$$E = c \vec{p} \cdot \vec{\alpha} + m c^2 \beta \quad (42)$$

assumendo che  $\vec{\alpha}, \beta$  siano matrici unitarie tali che questa relazione lineare possa essere consistente con la (40). Elevandola al quadrato si ottiene

$$\begin{aligned} E^2 &= (c p^i \alpha^i + m c^2 \beta)(c p^j \alpha^j + m c^2 \beta) \\ &= c^2 p^i p^j \alpha^i \alpha^j + m^2 c^4 \beta^2 + m c^3 p^i (\alpha^i \beta + \beta \alpha^i) \\ &= \frac{1}{2} c^2 p^i p^j (\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i) + m^2 c^4 \beta^2 + m c^3 p^i (\alpha^i \beta + \beta \alpha^i) \end{aligned} \quad (43)$$

e la consistenza con (40) per momenti arbitrari  $p^i$  produce le relazioni

$$\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i = 2 \delta^{ij}, \quad \beta^2 = 1, \quad \alpha^i \beta + \beta \alpha^i = 0 \quad (44)$$

dove, come di consuetudine, la matrice identità è sottintesa nel lato destro di queste equazioni. Dirac ottenne una soluzione minimale con matrici  $4 \times 4$ . Una soluzione esplicita in termini di blocchi  $2 \times 2$  è data da

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (45)$$

dove le matrici  $\sigma^i$  sono le matrici di Pauli. Quantizzando la relazione (42) con le (41) si ottiene l'equazione di Dirac nella forma "hamiltoniana"

$$i \hbar \partial_t \psi = \underbrace{(-i \hbar c \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + m c^2 \beta)}_{H_D} \psi \quad (46)$$

dove l'hamiltoniana  $H_D$  è una matrice  $4 \times 4$  di operatori differenziali. La hermiticità delle matrici  $\alpha^i$  e  $\beta$  garantisce la hermiticità della hamiltoniana  $H_D$  (e quindi una evoluzione temporale unitaria). Moltiplicando questa equazione con la matrice invertibile  $\frac{1}{\hbar c} \beta$  e definendo le matrici gamma

$$\gamma^0 \equiv -i \beta, \quad \gamma^i \equiv -i \beta \alpha^i \quad (47)$$

si ottiene l'equazione di Dirac nella forma "covariante"

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + \mu) \psi = 0 \quad (48)$$



con  $\mu = \frac{mc}{\hbar}$  inverso della lunghezza d'onda Compton associata alla massa  $m$ . Le relazioni fondamentali che definiscono le matrici gamma sono facilmente ottenibili dalle relazioni (44) e si possono scrivere usando gli anticommutatori ( $\{A, B\} \equiv AB + BA$ ) nella seguente forma

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} . \quad (49)$$

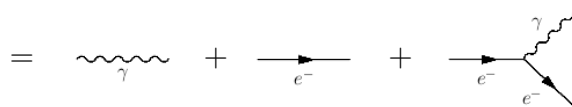
In unità di misura con  $\hbar = c = 1$ , per cui  $\mu = m$ , l'equazione di Dirac è scritta come in (38). Una notazione molto in uso impegna la definizione introdotta da Feynman  $\not{\partial} \equiv \gamma^\mu \partial_\mu$ , per cui l'equazione di Dirac si scrive come

$$(\not{\partial} + m)\psi = 0 . \quad (50)$$

### 3 Interazioni e diagrammi di Feynman

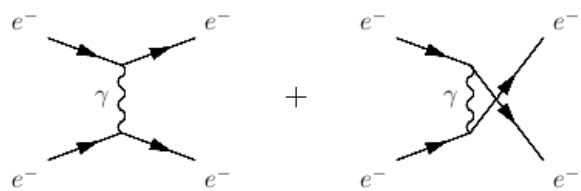
Le azioni libere dei campi d'onda associati alle varie particelle (il campo dell'elettrone  $\psi$  descrive tutti gli elettroni ed i positroni, il campo del potenziale elettromagnetico  $A_\mu$  descrive tutti i fotoni, etc.) generano le equazioni d'onda libere e descrivono la propagazione dei rispettivi quanti. Le interazioni possono essere introdotte aggiungendo dei potenziali d'interazione all'azione, che così producono termini non lineari nelle equazioni d'onda. Questi potenziali contengono i vertici elementari delle varie interazioni. A tali vertici sono associate costanti d'accoppiamento che parametrizzano l'intensità della interazione.

Ad esempio, la propagazione e l'interazione tra fotoni ed elettroni (QED) è descritta dalla (densità di) lagrangiana  $\mathcal{L}_{QED}$  (e dall'azione collegata  $S_{QED} = \int d^4x \mathcal{L}_{QED}$ )

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QED} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \bar{\psi}(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi - ieA_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \\ &= \text{~~~~~} + \text{~~~~~} + \text{~~~~~} \end{aligned} \quad (51)$$


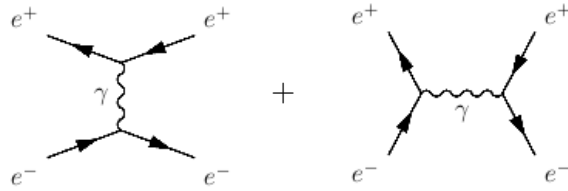
Il primo termine descrive la propagazione libera del campo  $A_\mu$  (cioè dei fotoni), il secondo termine la propagazione libera del campo  $\psi$  (cioè degli elettroni e relative antiparticelle), il terzo termine descrive l'interazione elementare tra fotoni ed elettroni. La costante  $e$  qui introdotta rappresenta la costante d'accoppiamento, ed è identificata con il valore assoluto dell'intensità della carica elementare dell'elettrone. Spesso si parameterizza l'intensità di questa interazione con  $\sqrt{\alpha_{EM}}$ , dove  $\alpha_{EM} = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \approx \frac{1}{137}$  è la costante di struttura fine (qui scritta in unità di Heaviside-Lorentz), ed infatti  $e \propto \sqrt{\alpha_{EM}}$ .

Quando la costante d'accoppiamento  $e \propto \sqrt{\alpha_{EM}}$  può essere trattata perturbativamente, si possono calcolare le ampiezze dei vari processi fisici descritti dalla QED in termini delle ampiezze parziali corrispondenti ai vari diagrammi di Feynman che si possono costruire con il vertice elementare che compare nella lagrangiana (51). Ad esempio, lo scattering elettrone-elettrone (Möller scattering) all'ordine più basso è dato da (il tempo scorre lungo l'asse orizzontale)

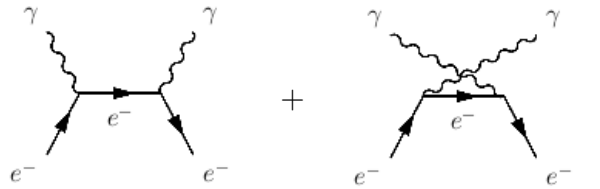


Ad ogni vertice è associata la costante d'accoppiamento  $e$ , per cui questi diagrammi definiscono un'ampiezza proporzionale ad  $e^2$ , e quindi ad  $\alpha_{EM}$ . La corrispondente probabilità è associata al modulo quadrato dell'ampiezza ed è quindi proporzionale ad  $e^4$ , o equivalentemente ad  $\alpha_{EM}^2$ .

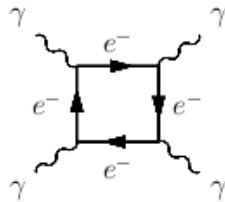
Similmente lo scattering elettrone-positrone (Bhabha scattering) è descritto da



e lo scattering elettrone-fotone (Compton scattering) da



Anche lo scattering fotone-fotone è possibile: il primo termine perturbativo è dato da



insieme a grafici simili in cui le linee fotoniche esterne si attaccano ai vertici in ordine differente. Questa è un processo con ampiezza proporzionale ad  $\alpha_{EM}^2$  (e probabilità proporzionale ad  $\alpha_{EM}^4$ ). In generale le correzioni perturbative che corrispondono a grafici con dei “loop” possono essere divergenti: le divergenze devono poi essere curate con la rinormalizzazione. Nel caso dello scattering fotone-fotone il calcolo del grafico è finito (grazie alla struttura dettata dall'invarianza di gauge) e non c'è bisogno della rinormalizzazione.

In generale, il fotone si accoppia a tutte le particelle con carica elettrica. Il vertice fotone-elettrone presente in (51) si generalizza a tutti i fermioni del modello standard, ed assume la forma

$$\mathcal{L}_{int} = ieqA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (52)$$

dove  $q$  è la carica elementare del campo  $\psi$  del fermione in esame, carica relativa a quella del protone. In particolare, per elettrone, muone e tau si ha  $q = -1$ , per quarks up, charm e top si ha invece  $q = \frac{2}{3}$ , ed infine per quarks down, strange e bottom  $q = -\frac{1}{3}$ . Per i neutrini tale termine è assente (equivalentemente per loro vale  $q = 0$ ).