1 Teoria di gauge abeliana: l'elettrodinamica

Consideriamo la lagrangiana per un campo di Dirac libero di massa m

$$\mathcal{L}_{Dirac} = -\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\,\overline{\psi}\psi. \tag{1}$$

Essa è invariante sotto le trasformazioni di simmetria rigide appartenenti al gruppo $U(1)$

$$\psi(x) \quad\to\quad \psi'(x) = \mathrm{e}^{i\alpha}\psi(x). \tag{2}$$

Queste trasformazioni sono dette rigide (o globali) perché il parametro arbitrario α che compare nella trasformazione ($\mathrm{e}^{i\alpha} \in U(1)$) è costante.

Supponiamo ora di voler richiedere l'invarianza sotto la simmetria locale (simmetria di gauge)

$$\psi(x) \quad\to\quad \psi'(x) = \mathrm{e}^{i\alpha(x)}\psi(x) \tag{3}$$

che implica la seguente trasformazione per il campo coniugato di Dirac

$$\overline{\psi}(x) \quad\to\quad \overline{\psi'}(x) = \mathrm{e}^{-i\alpha(x)}\overline{\psi}(x). \tag{4}$$

Queste sono di nuovo trasformazioni di fase appartenenti al gruppo $U(1)$, ma sono scelte in modo indipendente al variare del punto dello spazio-tempo. Il termine di massa nella lagrangiana (1) è invariante

$$m\,\overline{\psi}\psi \quad\to\quad m\,\overline{\psi'}\psi' = m\,\overline{\psi}\,\mathrm{e}^{-i\alpha(x)}\mathrm{e}^{i\alpha(x)}\psi = m\,\overline{\psi}\psi, \tag{5}$$

ma il termine contenente una derivata non lo è

$$\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi \quad\to\quad \overline{\psi'}\gamma^\mu\partial_\mu\psi' = \overline{\psi}\,\mathrm{e}^{-i\alpha(x)}\gamma^\mu\partial_\mu(\mathrm{e}^{i\alpha(x)}\psi) = \overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + i\,\overline{\psi}\gamma^\mu\psi\,\partial_\mu\alpha(x). \tag{6}$$

Compare infatti il termine aggiuntivo $i\,\overline{\psi}\gamma^\mu\psi\,\partial_\mu\alpha(x)$ che si annulla solamente quando $\alpha(x)$ è costante, ma noi vogliamo l'invarianza per funzioni $\alpha(x)$ arbitrarie. Occorrerà dunque estendere l'azione in modo opportuno per ottenere l'invarianza di gauge.

Allo scopo di costruire azioni gauge invarianti è utile introdurre un formalismo basato sulla definizione di tensori e derivate covarianti. La derivata covariante è definita da

$$D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu(x) \tag{7}$$

e si richede che $A_\mu(x)$ si trasformi sotto trasformazioni di gauge in modo tale che valga la seguente semplice legge di trasformazione "tensoriale"

$$D_\mu\psi(x) \to D'_\mu\psi'(x) = \mathrm{e}^{i\alpha(x)}D_\mu\psi(x) \tag{8}$$

dove $D'_\mu = \partial_\mu - iA'_\mu(x)$. Un breve calcolo mostra che questo avviene se il campo di gauge A_μ si trasforma nel modo seguente

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x). \tag{9}$$

Con l'utilizzo della derivata covariante è facile ottenere l'estensione gauge invariante della lagrangiana in eq. (1):

$$\mathcal{L} = -\overline{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\overline{\psi}\psi. \tag{10}$$

Commento: in generale possiamo denominare "tensore" (per il gruppo di gauge $U(1)$) ogni quantità $\psi_q(x)$ che si trasforma nel modo seguente

$$\psi_q(x) \to \psi_q(x)' = \mathrm{e}^{iq\alpha(x)}\psi_q(x) \tag{11}$$

dove q rappresenta la carica del campo (è cioè un tensore di carica q: in termini matematici q identifica una rappresentazione irriducibile del gruppo $U(1)$). In generale la derivata covariante può essere definita come

$$D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu(x)Q \tag{12}$$

dove Q è un operatore che misura la carica del tensore su cui agisce. La derivata covariante ha la proprietà di non distruggere il carattere tensoriale dell'oggetto su cui agisce: trasforma tensori in tensori. Infatti è facile verificare che

$$D_\mu\psi_q(x) = \partial_\mu\psi_q(x) - iqA_\mu(x)\psi_q(x) \tag{13}$$

è di nuovo un tensore (vedi eq. 8). Una conseguenza di queste definizioni è la validità della regola di Leibnitz per le derivate covarianti

$$D_\mu(\psi_{q_1}\psi_{q_2}) = (D_\mu\psi_{q_1})\psi_{q_2} + \psi_{q_1}(D_\mu\psi_{q_2}). \tag{14}$$

Dunque si può ottenere l'invarianza locale se si introduce il nuovo campo $A_\mu(x)$ che verrà interpretato come il potenziale vettore del campo elettromagnetico. Avendo introdotto un nuovo campo occorrerà aggiungere alla lagrangiana un termine che ne descriva la dinamica. Questo termine dovrà essere gauge invariante perchè il resto della lagrangiana già lo è: la simmetria di gauge è il principio guida per la costruzione dell'azione! È utile procedere usando dei tensori. Possiamo calcolare il commutatore

$$[D_\mu, D_\nu]\psi = -iF_{\mu\nu}\psi \tag{15}$$

che definisce la grandezza $F_{\mu\nu}$. Poichè la derivata covariante agente su tensori genera tensori, il lato sinistro è manifestamente un tensore. Dunque lo deve essere anche il lato destro. Da ciò si deduce facilmente che $F_{\mu\nu}$ è un tensore con carica $q = 0$, è cioè invariante per trasformazioni di gauge (per vederlo basta porre $q = 0$ nella (11)). Calcolando esplicitamente il lato sinistro della (15) si ottiene la seguente espressione

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{16}$$

Ora è facile costruirsi una lagrangiana gauge invariante e contente al più due derivate temporali per descrivere la dinamica del campo A_μ. Basta utilizzare come mattone elementare $F_{\mu\nu}$, che è già invariante per trasformazioni di gauge, ed in aggiunta imporre l'invarianza per le simmetrie globali del gruppo di Poincarè (cioè per traslazioni spazio-temporali e trasformazioni di Lorentz). Si ottiene in modo univoco (usando una normalizzazione standard)

$$\mathcal{L}_{Maxwell} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \tag{17}$$

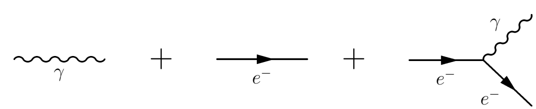
Sommando i vari pezzi (eq. (10) e (17)) si ottiene la lagrangiana della QED

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4e^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \overline{\psi}\gamma^\mu D_\mu \psi - m\overline{\psi}\psi \tag{18}$$

dove abbiamo introdotto un parametro moltiplicativo arbitrario e^{-2} per tener conto del peso relativo tra i vari pezzi della lagrangiana che sono separatamente gauge invarianti.

Esplicitiamo i vari termini nella (18) nel seguente modo: ridefiniamo $A_\mu \to eA_\mu$ (per ottenere la normalizzazzione standard del temine cinetico del campo elettromagnetico, cioè l'azione di Maxwell libera) e scriviamo esplicitamente i vari termini della derivata covariate ottenendo

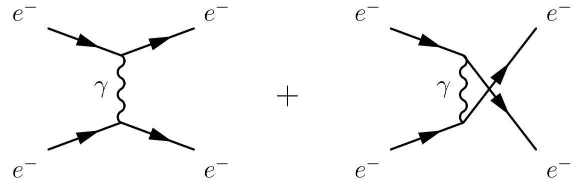
$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \overline{\psi}(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi + ieA_\mu \overline{\psi}\gamma^\mu\psi$$

$=$  (19)

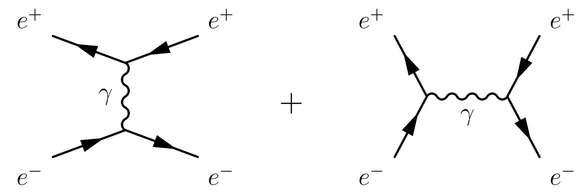
Il primo termine descrive la propagazione libera del campo A_μ (cioè dei fotoni), il secondo termine la propagazione libera del campo ψ (cioè degli elettroni e relative antiparticelle), il terzo termine descrive l'interazione elementare tra fotoni ed elettroni. Si vede che la costante e prima introdotta rappresenta la costante d'accoppiamento ed è immediatamente identificata con la carica elementare dell'elettrone: il principio di gauge ci ha permesso di derivare questa interazione tra campi di spin 1/2 ed 1. Riassumiamo le leggi di trasformazioni di gauge sotto cui la lagrangiana (19) è invariante

$$\begin{aligned} \psi &\to \psi' = \mathrm{e}^{i\alpha}\psi \\ \overline{\psi} &\to \overline{\psi'} = \mathrm{e}^{-i\alpha}\overline{\psi} \\ A_\mu &\to A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha. \end{aligned} \tag{20}$$

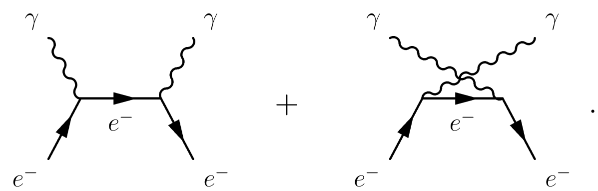
Quando la costante d'accoppiamento e può essere trattata perturbativamente, si possono calcolare le ampiezze dei vari processi fisici descritti dalla QED in termini delle ampiezze parziali corrispondenti ai diagrammi di Feynman che si possono costruire con il vertice elementare che compare nella lagrangiana (19). Ad esempio, lo scattering elettrone-elettrone (Möller scattering) all'ordine più basso è dato da (il tempo scorre lungo l'asse orizzontale)



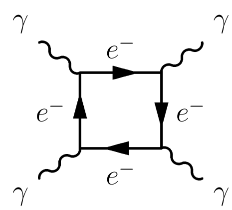
lo scattering elettrone-positrone (Bhabha scattering) da



lo scattering elettrone-fotone (Compton scattering) da



Anche lo scattering fotone-fotone è possibile: il primo termine perturbativo è dato da



insieme a grafici simili in cui le linee fotoniche esterne si attaccano ai vertici in un ordine differente. In generale le correzioni perturbative che corrispondono a grafici con dei “loop” possono essere divergenti: le divergenze devono poi essere curate con la rinormalizzazione. Nel caso dello scattering fotone-fotone il calcolo del grafico è finito (grazie alla struttura dettata dall’invarianza di gauge) e non c’è bisogno della rinormalizzazione.