1 Brevi Appunti sulla Teoria dei Gruppi di Lie

Consideriamo un gruppo $G = \{g\}$ visto come insieme di elementi g che soddisfano alle seguenti proprietà:
1) esiste una legge di composizione: presi $g_1, g_2 \in G$ allora $g_1 g_2 = g_3 \in G$,
2) esite l'elemento identità: $\exists e \in G$ tale che $ge = eg = g$,
3) esiste l'elemento inverso: se $g \in G$ allora $\exists g^{-1} \in G$ tale che $gg^{-1} = g^{-1}g = e$,
4) associatività: $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$.

1.1 Esempi

Facciamo alcuni esempi di gruppi di Lie, cioè gruppi i cui elementi dipendono in modo continuo da alcuni parametri:
$U(1) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\} = \{e^{i\alpha} \mid \alpha \in \mathbf{R}\}$, gruppo delle fasi
$O(n)$ gruppo delle matrici reali ortogonali $n \times n$
$SO(n)$ gruppo delle matrici reali ortogonali $n \times n$ con $\det g = 1$
$U(n)$ gruppo delle matrici unitarie $n \times n$
$SU(n)$ gruppo delle matrici unitarie $n \times n$ con $\det g = 1$
$SO(n, m)$, $SL(n, R)$, $SL(n, C)$, etc.

2 Rapresentazioni

Introduciamo ora il concetto di rappresentazioni del gruppo. Una rappresentazione di un gruppo astratto G è una "realizzazione" delle relazioni moltiplicative del gruppo G in un corrispondente gruppo di matrici quadrate. Queste matrici possono essere pensate come operatori che agiscono su uno spazio vettoriale V la cui dimensione è detta dimensione della rappresentazione. Esplicitamente in formule

$$\begin{aligned} r: G &\longmapsto \text{Matrici} \\ g &\longmapsto r(g) \end{aligned} \tag{1}$$

tali che
1) $r(g_1) r(g_2) = r(g_1 g_2)$
2) $r(e) = I$ con I matrice identità.

Da questo segue anche che $r(g^{-1}) r(g) = r(e) = I$. Inoltre l'associatività è automatica perchè il prodotto tra matrici è associativo. Quindi tutte le proprietà del gruppo sono realizzate esplicitamente dalle matrici della rappresentazione. In effetti, negli esempi descritti sopra abbiamo usato direttamente una particolare rappresentazione per definire i vari gruppi, per cui questa rappresentazione privilegiata è detta rappresentazione definente (o rappresentazione fondamentale).

Un esempio tipico, probabilmente già familiare, è costituito dalle reppresentazioni del gruppo delle rotazioni in uno spazio tridimensionale, gruppo indicato con $SO(3)$. Una rappresentazione del gruppo delle rotazioni è costituita dalle matrici che mescolano le armoniche sferiche Y_{lm}. Le Y_{lm}, pensate come vettori di uno spazio lineare, costituiscono ad l fissato uno spazio vettoriale di dimensione $2l+1$ (tante dimensioni quanti sono i possibili valori di m) e ciascuna rotazione è rappresentata in tale spazio da una matrice $(2l+1) \times (2l+1)$. Queste sono appunto le rappresentazioni irriducibili di $SO(3)$: sono identificate dal valore (intero) di l e sono $2l+1$ dimensionali. In formule

$$Y_{lm} \quad \stackrel{g \in G}{\longrightarrow} \quad Y'_{lm} = [R^{(l)}(g)]_m{}^n Y'_{ln} \tag{2}$$

Come discuteremo tra breve, irriducibile significa che non c'è modo di "ridurre" le dimensioni della rappresentazione in questione (non c'è modo di ridurre con trasformazioni di similitudine $r(g) \longmapsto \tilde{r}(g) = A\, r(g)\, A^{-1}$ tutte le matrici della rappresentazione in una forma diagonale a blocchi).

In generale si definiscono equivalenti rappresentazioni che sono collegate da trasformazioni di similitudine: $r(g)$ ed $\tilde{r}(g)$ sono rappresentazioni equivalenti se

$$\tilde{r}(g) = A\, r(g)\, A^{-1} \qquad\qquad \forall g \in G \tag{3}$$

Questa relazione di equivalenza permette di considerare rappresentazioni equivalenti come la stessa rappresentazione. Infatti la trasformazione di similitudine rappresenta semplicemente un cambio di base nello spazio vettoriale V: le matrici delle diverse rappresentazioni equivalenti identificano lo stesso operatore lineare espresso nelle rispettive basi.

Una rappresentazione riducibile è una rappresentazione equivalente ad una rappresentazione le cui matrici sono diagonali a blocchi, ad esempio $r(g)$ è riducibile se vale

$$\tilde{r}(g) = A\, r(g)\, A^{-1} = \left(\begin{array}{c|c|c} r_1(g) & 0 & 0 \\ \hline 0 & r_2(g) & 0 \\ \hline 0 & 0 & r_3(g) \end{array}\right) \qquad\qquad \forall g \in G \tag{4}$$

ed in questo caso si dice che $r(g)$ è riducibile alle tre rappresentazioni $r_1(g)$, $r_2(g)$, $r_3(g)$. In questo esempio lo spazio vettoriale V su cui agisce la rappresentazione riducibile $r(g)$ è naturalmente decomposto come somma diretta dei tre spazi vettoriali su cui agiscono le rappresentazioni $r_1(g)$, $r_2(g)$, $r_3(g)$, i.e. $V = V_1 \oplus V_2 + \oplus V_3$.

2.1 Indici in "alto" ed in "basso", ed indici puntati

Dato un gruppo G ed una sua rappresentazione n dimensionale $R = \{r(g),\ \text{matrici } n \times n\ \forall g \in G\}$, allora possiamo pensare a queste matrici come operatori agenti su uno spazio vettoriale di dimensioni n. I vettori di questo spazio vettoriale v^a (dove $a = 1, 2, \ldots, n$ è l'indice che descrive le varie componenti del vettore) sono trasformati dalle matrici $[r(g)]^a{}_b$ e diremo che il vettore v^a si trasforma in modo covariante sotto l'azione del gruppo G

$$v^a \quad \stackrel{g \in G}{\longrightarrow} \quad v^{a\prime} = [r(g)]^a{}_b\, v^b \tag{5}$$

(notare che si usa la convenzione per cui indici ripetuti sono sommati automaticamente sui loro possibili valori). Diremo che vettori che si trasformano in modo identico a quello descritto qui sopra hanno gli indici in "alto". Data una rappresentazione $r(g)$ (che come abbiamo detto corrisponde a trasformare vettori con indici in "alto") ne possiamo immediatamente costruire altre tre: rappresentazione “complesso coniugata” $r(g)^*$, rappresentazione “inverso trasposta” $r(g)^{-1\,\mathrm{T}}$ e rappresentazione “inverso hermitiana” $r(g)^{-1\,\dagger}$. Per convenzione le faremo corrispondere a trasformazioni di vettori con “indici puntati in alto”, “indici in basso” ed “indici puntati in basso”, rispettivamente. In formule

$$v^{\dot a} \quad \stackrel{g\in G}{\longrightarrow} \quad v^{\dot a\prime} = [r(g)^*]^{\dot a}{}_{\dot b}\, v^{\dot b} \tag{6}$$

$$v_a \quad \stackrel{g\in G}{\longrightarrow} \quad v_a{}' = [r(g)^{-1\,\mathrm{T}}]_a{}^b\, v_b \tag{7}$$

$$v_{\dot a} \quad \stackrel{g\in G}{\longrightarrow} \quad v_{\dot a}{}' = [r(g)^{-1\,\dagger}]_{\dot a}{}^{\dot b}\, v_{\dot b} \tag{8}$$

È immediato verificare che queste sono rappresentazionie del gruppo se $r(g)$ lo è. Si possono ottenere grandezze invarianti sotto l’azione del gruppo G prendendo il prodotto scalare tra vettori con indici in alto (a volte detti controvarianti) e quelli con indici in basso (a volte detti covarianti) entrambi puntati o non puntati:

$$v_a w^a \quad \stackrel{g\in G}{\longrightarrow} \quad v_a{}' w^{a\prime} = v^{\mathrm{T}\prime} w' = (r(g)^{-1\,T}\, v)^{\mathrm{T}} r(g) w = v^{\mathrm{T}} r(g)^{-1}\, r(g) w = v^{\mathrm{T}} w = v_a w^a \tag{9}$$

$$x_{\dot a} y^{\dot a} \quad \stackrel{g\in G}{\longrightarrow} \quad x_{\dot a}{}' y^{\dot a\prime} = x^{T\prime} y' = (r(g)^{-1\,\dagger} x)^T r(g)^* y = x^T r(g)^{-1\,*}\, r(g)^* y = x^T y = x_{\dot a} y^{\dot a} \tag{10}$$

(in questi calcoli il tipo di notazione usata è ovvia dal contesto). In generale non ha senso da un punto di vista gruppale contrarre in altro modo gli indici dei vettori sopra descritti. Si noti che i tensori delta di Kroneker $\delta^a{}_b$ e $\delta^{\dot a}{}_{\dot b}$, numericamente identici alla matrice identità, rimangono invariati per trasformazioni del gruppo se si trasformano i loro indici nel modo corrispondente alla natura degli indici descritto sopra, ed esempio

$$\delta^a{}_b \quad \stackrel{g\in G}{\longrightarrow} \quad (\delta')^a{}_b = [r(g)]^a{}_c [r(g)^{-1\,T}]_b{}^d \delta^c{}_d = [r(g)]^a{}_c [r(g)^{-1\,T}]_b{}^c = [r(g) r(g)^{-1}]^a{}_b = \delta^a{}_b \tag{11}$$

È possibile che alcune di queste diverse rappresentazioni siano equivalenti tra loro, cioè collegate da una trasformazione di similitudine. Infatti per rappresentazioni <u>reali</u> vale $r(g)^* = r(g)$: dunque $v^{\dot a} \sim v^a$ e $v_{\dot a} \sim v_a$, dove il simbolo $\sim$ significa “si trasforma come”. Non c’è dunque bisogno in questo caso di introdurre indici puntati. Per rappresentazioni <u>unitarie</u> vale $r(g)^{-1} = r(g)^\dagger$, e quindi $r(g)^{-1\dagger} = r(g)$, dunque $v_{\dot a} \sim v^a$ e $v^{\dot a} \sim v_a$, Di nuovo non c’è bisogno di usare indici puntati. Infine per rappresentazioni unitarie e reali (cioè <u>ortogonali</u> reali) tutte e quattro le rappresentazioni descritte sopra sono equivalenti. Osservazione: le rappresentazioni spinoriali finito dimensionali del gruppo di Lorentz (le rappresentazioni spinoriali sono rappresentazioni a due valori ed il ricoprimento del gruppo di Lorentz è dato da $SL(2,C)$) non sono unitarie né reali. In questo caso tutti e quattro i diversi tipi di indici sono utili (anche se solo due di queste quattro rappresentazioni sono inequivalenti).

2.2 Altre rappresentazioni: i tensori

Altre rappresentazioni possono essere ottenute dal prodotto tensoriale delle rappresentazioni descritte precedentemente. Si ottengono cosí i “tensori”, oggetti che per definizione hanno un certo numero di indici puntati e non puntati, in alto ed in basso, con le proprietà di trasformazione definite dalla natura degli indici. Ad esempio il tensore $F^{ab}{}_c{}^{\dot d}{}_{\dot e}$ appartiene ad uno spazio vettoriale di dimensione n^5 (perché ciascun indice può assumere n valori) e si trasforma nel seguente modo

$$F^{ab}{}_c{}^{\dot d}{}_{\dot e} \quad \xrightarrow{g\in G} \quad F'^{ab}{}_c{}^{\dot d}{}_{\dot e} = [r(g)]^a{}_f\,[r(g)]^b{}_g\,[r(g)^{-1\,\mathrm{T}}]_c{}^h\,[r(g)^*]^{\dot d}{}_{\dot m}\,[r(g)^{-1\,\dagger}]_{\dot e}{}^{\dot n}\; F^{fg}{}_h{}^{\dot m}{}_{\dot n} \tag{12}$$

In generale i tensori identificano rappresentazioni riducibili. Si pone quindi il problema di decomporli in rappresentazioni irriducibili. Un modo di decomporre una rappresentazione è quello di sepapare i tensori tenendo conto delle proprietà di simmetria sotto le permutazioni degli indici della stessa natura (è quindi utile conoscere le proprietà del gruppo delle permutazioni di n oggetti, indicato con S_n e conosciuto anche come gruppo simmetrico).

Ad esempio il tensore T^{ab} puó essere separato nella sua parte simmetrica e nella sua parte antisimmetrica nel seguente modo

$$T^{ab} = \underbrace{\frac{1}{2}(T^{ab} + T^{ba})}_{S^{ab}} + \underbrace{\frac{1}{2}(T^{ab} - T^{ba})}_{A^{ab}} \tag{13}$$

ed è facile convincersi che queste parti con simmetria distinta non si mescolano tra loro sotto le trasformazioni del gruppo. Queste parti potrebbero essere ulteriormente riducibili nel caso esistano altre operazioni invarianti. Per i casi più semplici è facile studiare caso per caso una eventuale ulteriore riducibilità.

2.3 Rappresentazioni di SO(N)

Descriviamo le più semplici rappresentazioni di $SO(N)$, il gruppo speciale ortogonale di matrici $N\times N$. Questo è il gruppo che lascia invariato il prodotto scalare di vettori $\vec v, \vec w \in R^N$ definito da $\vec v \cdot \vec w = \delta_{ab} v^a w^b$, dove la metrica δ_{ab} é un tensore invariante. La rappresentazione definente (detta anche rappresentazione vettoriale) agisce sui vettori v^a, e come già descritto le quattro rappresentazioni basilari sono tutte equivalenti: $v^a \sim v_a \sim v^{\dot a} \sim v_{\dot a}$. Indichiamo tale rappresentazione con N, cioè con le sue dimensioni. Il prodotto tensoriale $N\otimes N$ indica la rappresentazione tensoriale sui tensori con due indici T^{ab} di dimensione N^2. Abbiamo visto che questi tensori si possono separare nella parte simmetrica S^{ab} (di dimensione $\frac{N(N+1)}{2}$) e nella parte antisimmetrica A^{ab} (di dimensione $\frac{N(N-1)}{2}$). La parte simmetrica è ancora riducibile, perchè si può formare uno scalare, cioè un invariante sotto le trasformazioni del gruppo, che corrisponde alla sua traccia

$$S \equiv S^{ab}\delta_{ba} = S^a{}_a \tag{14}$$

Si vede facilmente che questo è uno scalare (infatti sappiamo già che la contrazione di un indice in alto con un indice in basso produce uno scalare)

$$S \quad \xrightarrow{g\in SO(N)} \quad S' = S \tag{15}$$

e forma una rappresentazione banale uno-dimensionale. Possiamo separare la traccia dal tensore simmetrico S^{ab} dal resto nel seguente modo

$$S^{ab} = \underbrace{S^{ab} - \frac{1}{N}\delta^{ab} S}_{\hat S^{ab}} + \frac{1}{N}\delta^{ab} S \tag{16}$$

dove abbiamo definito il tensore simmetrico senza traccia $\hat{S}^{ab}$ (che infatti soddisfa $\hat{S}^a{}_a = 0$). Dunque abbiamo separato il tensore T^{ab} nelle sue parti irriducibili

$$T^{ab} = \frac{1}{N}\delta^{ab}S + \hat{S}^{ab} + A^{ab} \tag{17}$$

ed indicando le rappresentazioni irriducibili con le rispettive dimensioni si traduce nella seguente scrittura

$$N \otimes N = 1 \oplus \Big(\frac{N(N+1)}{2} - 1\Big) \oplus \frac{N(N-1)}{2} \ . \tag{18}$$

Nel caso specifico di $SO(3)$ questo produce

$$3 \otimes 3 = 1 \oplus 5 \oplus 3 \tag{19}$$

che ci dice che componendo lo spin 1 (la rappresentazione vettoriale "3") con se stesso si ottiene lo spin 0 (la rappresentazione "1", lo scalare), lo spin 1 (di nuovo la rappresentazione "3") e lo spin 2 (la rappresentazione "5").

La rappresentazione sui tensori antisimmetrici con due indici A^{ab}, la $\frac{N(N-1)}{2}$, è anche chiamata rappresentazione aggiunta: si noti che le sue dimensioni corrispondono al numero di parametri indipendenti del gruppo, che sono gli angoli che descrivono le rotazioni nei piani $a-b$ (con $a \neq b$).

2.4 Rappresentazioni di $SU(N)$

Consideriamo ora $SU(N)$, il gruppo speciale unitario di matrici $N \times N$. Questo è il gruppo che lascia invariato il prodotto scalare di vettori $\vec{v}, \vec{w} \in C^N$ definito da $\vec{v}^* \cdot \vec{w} = \delta^a{}_b v^*_a w^b$, dove il simbolo * indica il complesso coniugato e la metrica $\delta^a{}_b$ identifica un tensore invariante (vedere eq. (11)). Partendo dalla fondamentale, la N (corrispondente ai vettori v^a), ne otteniamo subito un'altra, la complesso coniugata (corrispondente ai vettori $v^{\dot{a}} \sim v_a$), indicata con $\bar{N}$. Studiamo ora altre rappresentazioni considerando il prodotto tensoriale

$$N \otimes N = \frac{N(N+1)}{2} \oplus \frac{N(N-1)}{2} \tag{20}$$

corrispondente alla separazione del tensore T^{ab} nelle sue parti simmetriche ed antisimmetriche, $T^{ab} = S^{ab} + A^{ab}$. Questo è tutto (si noti che non si possono prendere traccie per formare scalari su questi tensori perchè δ_{ab} non è un tensore invariante per $SU(N)$: per rendersene conto basta trasformare sotto $SU(N)$ il tensore δ_{ab} come dettato dalla struttura dei suoi indici e vedere che non rimane invariante; si paragoni questo con l'invarianza del tensore $\delta^a{}_b$ in eq. (11)). Consideriamo ora

$$N \otimes \bar{N} = 1 \oplus (N^2 - 1) \tag{21}$$

che corrisponde alla separazione del tensore $T^a{}_b$ nella sua parte di traccia (lo scalare) e nella sua parte senza traccia. Questo è possibile perchè sappiamo che la contrazione di un indice alto con un indice basso produce uno scalare. In formule questa separazione si scrive

$$T^a{}_b = \frac{1}{N}\delta^a{}_b T + \hat{T}^a{}_b \tag{22}$$

dove $T \equiv T^a{}_a$ e $\hat{T}^a{}_b \equiv T^a{}_b - \frac{1}{N}\delta^a{}_b T$. Si noti che il tensore $\delta^a{}_b$ è un tensore invariante (lo si provi usando le trasformazioni di $SU(N)$; si noti che questo tensore corrisponde alla metrica dello spazio vettoriale complesso C^N). La rappresentazione N^2-1 è la cosidetta rappresentazione aggiunta. Altri tensori invarianti di $SU(N)$ sono i tensori completamente antisimmetrici con N indici, $\epsilon_{a_1 a_2 \dots a_N}$ ed $\epsilon^{a_1 a_2 \dots a_N}$ (lo si puó dimostrare utilizzando il fatto che le matrici del gruppo hanno determinate uguale ad uno).

Esplicitiamo il caso di $SU(3)$. Abbiamo

$$3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8 \tag{23}$$

relazione che trova applicazioni nel modello statico a quark dei mesoni quando si considerano i tre tipi quark up, down e strange. Inoltre

$$3 \otimes 3 = 6 + \bar{3} \tag{24}$$

La possibile ambiguità di capire se il tensore A^{ab}, che ha tre componenti, corrisponda alla 3 o alla $\bar{3}$ è risolto in favore di quest'ultima opzione considerando che $A^{ab} \sim A^{ab}\epsilon_{abc} \sim V_c$ (ricordare che ϵ_{abc} è un tensore invariante per $SU(3)$). Con un pò più di sforzo si può anche dedurre che

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 \tag{25}$$

che trova applicazioni nel modello statico a quark dei barioni.

Esplicitiamo anche il caso di $SU(2)$. Abbiamo

$$2 \otimes 2 = 1 \oplus 3\ , \qquad 2 \otimes \bar{2} = 1 \oplus 3 \tag{26}$$

che sono consistenti col fatto che la 2 è equivalente alla $\bar{2}$ (in notazioni $2 \sim \bar{2}$), evidente dalla relazione $v^a \sim v^a \epsilon_{ab} \sim v_b$.

2.5 Rappresentazioni di $U(1)$

Consideriamo anche il caso delle rappresentazioni del gruppo $U(1)$, che riveste una notevole importanza in fisica. Tutte le sue rappresentazioni unitarie sono uno-dimensionali (complesse) e sono identificate da un numero intero positivo o negativo detto "carica". La rappresentazione definente rappresenta un elemento del gruppo $U(1)$ con la fase $e^{i\alpha}$ che "ruota" naturalmente un vettore complesso unidimensionale v ($v \in C$, dove C indica il campo dei numeri complessi)

$$v \quad \xrightarrow{g \in U(1)} \quad v' = e^{i\alpha} v \tag{27}$$

Quindi lo spazio vettoriale della rappresentazione definente è unidimensionale e complesso, e le matrici della rappresentazione sono matrici complesse 1×1 (cioè numeri complessi).

Oggetti che si trasformano come prodotti tensoriali

$$v_{(q)} \sim \underbrace{vv\cdots v}_{q \text{ volte}} = v^q \tag{28}$$

con q numero intero sono le rappresentazioni di carica q

$$v_{(q)} \quad \xrightarrow{g \in U(1)} \quad v'_{(q)} = e^{iq\alpha} v_{(q)} \tag{29}$$

Evidentemente q può essere anche negativo. Il prodotto tensoriale di una rappresentazione di carica q_1 con una di carica q_2 genera la rappresentazione di carica $q_1 + q_2$. Il gruppo di simmetria $U(1)$ è usato in fisica quando ci sono numeri quantici additivi quantizzati. Siccome tutte le sue rappresentazioni sono uno-dimensionali, per distinguere la varie rappresentazioni inequivalenti occorre indicare la carica q della rappresentazione piuttosto che la sua dimensione.

3 Trasformazioni infinitesime ed algebra di Lie

Un gruppo di Lie è per definizione un gruppo di trasformazioni che dipendono in modo continuo da alcuni parametri. Studiando le trasformazioni infinitesime generate dal gruppo, cioè trasformazioni che differiscono di poco dall'identità, si ottiene la cosidetta algebra di Lie del gruppo, un'algebra che riassume le informazioni essenziali del gruppo. In generale un elemento $g(\alpha)$ di un gruppo di Lie G (o più propriamente della parte del gruppo connessa all'identità) si può parametrizzare nel seguente modo

$$g(\alpha) = e^{i\alpha_a T^a} \in G \qquad a = 1, .., \dim G \tag{30}$$

dove i parametri α_a sono numeri reali che parametrizzano i vari elementi del gruppo e sono scelti in modo tale che per $\alpha_a = 0$ si ha l'identità $g = 1$, mentre gli operatori T^a sono i generatori del gruppo. Pensando il gruppo nella rappresentazione definente come gruppo di matrici $n \times n$, anche i generatori risultano essere matrici $n \times n$. Essi generano transformazioni infinitesime quando $\alpha_a \ll 1$ (basta sviluppare in serie di Taylor la funzione esponenziale e tenere i termini di ordine più basso)

$$g = 1 + i\alpha_a T^a + ... \tag{31}$$

dove 1 indica l'elemento identità del gruppo. Studiando la relazione che cattura le proprietà di composizione del gruppo con trasformazioni infinitesime (che in generale sono non commutative) si ottiene l'algebra di Lie del gruppo G

$$[T^a, T^b] = i f^{ab}{}_c T^c \tag{32}$$

Le costanti $f^{ab}{}_c$ sono chiamate <u>costanti di struttura</u> del gruppo e caratterizzano quasi completamente il gruppo (gruppi diversi ma con la stessa algebra di Lie differiscono per la loro diversa topologia, ma localmente sono simili). Per familiarizzare con queste definizioni è utile passare in rassegna i gruppi più semplici e familiari, quali $U(1)$, $SO(3)$ ed $SU(2)$.

3.1 Algebra di Lie del gruppo $U(1)$

Consideriamo il gruppo $U(1) = \{e^{i\alpha} \mid \alpha \in \mathbf{R}\}$, il gruppo delle fasi definito tramite la sua rappresentazione definente. Per trasformazioni infinitesime

$$e^{i\alpha} = 1 + i\alpha + ... \tag{33}$$

ed il generatore infinitesimo è dato da $T = 1$ (che possiamo pensare come matrice 1×1) il quale produce l'algebra di Lie abeliana del gruppo $U(1)$ data dal commutatore

$$[T, T] = 0 \tag{34}$$

Nella rappresentazione di carica q, dove l'elemento $e^{i\alpha}$ è rappresentato da $e^{iq\alpha}$, si vede che il generatore infinitesimo è rappresentato da $T = q$ e soddisfa alla stessa algebra di Lie (34). Possiamo quindi pensare all'algebra di Lie $[T, T] = 0$ come all'algebra di Lie astratta corrispondente al gruppo $U(1)$, che viene poi rappresentata da matrici diverse nelle diverse rappresentazioni. Siccome le rappresentazioni irriducibili del gruppo $U(1)$ sono tutte uno-dimensionali tutte queste matrici sono matrici 1×1 e quindi dei numeri. Nella rappresentazione di carica q il generatore di $U(1)$ è rappresentato da $T = q$. Tipicamente si usa anche la notazione Q (con cui spesso si indica una carica) o anche J al posto di T per il generatore del gruppo $U(1)$.

3.2 Algebra di Lie del gruppo $SO(3)$

Consideriamo ora il familiare gruppo delle rotazioni nello spazio tridimensionale, il gruppo $SO(3)$ delle matrici R reali ortogonali 3×3 con determinante uguale ad 1. Queste matrici generano le trasformazioni di un vettore tridimensionale

$$\vec{x} \quad \longrightarrow \quad \vec{x}\,' = R\,\vec{x} \tag{35}$$

o in notazione tensoriale

$$x^i \quad \longrightarrow \quad x'^i = R^i{}_j x^j \qquad i, j = 1, 2, 3 \tag{36}$$

Questa è la rappresentazione definente (o vettoriale) e gli indici in alto ed in basso sono della stessa natura (poichè la metrica euclidea è la δ_{ij}) per cui in questo caso si potrebbero anche porre tutti gli indici in alto. Consideriamo ora le rotazioni attorno ai tre assi cartesiani con coordinate $(x, y, z) = (x^1, x^2, x^3)$

$$R_z(\theta_z) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_z) & \sin(\theta_z) & 0 \\ -\sin(\theta_z) & \cos(\theta_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \stackrel{\theta_z \ll 1}{\longrightarrow} \quad 1 + \theta_z \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{iT^3} + \cdots \tag{37}$$

$$R_x(\theta_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_x) & \sin(\theta_x) \\ 0 & -\sin(\theta_x) & \cos(\theta_x) \end{pmatrix} \quad \stackrel{\theta_x \ll 1}{\longrightarrow} \quad 1 + \theta_x \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{iT^1} + \cdots \tag{38}$$

$$R_y(\theta_y) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_y) & 0 & -\sin(\theta_y) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta_y) & 0 & \cos(\theta_y) \end{pmatrix} \quad \stackrel{\theta_y \ll 1}{\longrightarrow} \quad 1 + \theta_y \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{iT^2} + \cdots \tag{39}$$

cosicchè i generatori T^i delle trasformazioni infinitesime sono dati da

$$T^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \qquad T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad T^3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{40}$$

La corrispondente algebra di Lie è facilmente calcolata calcolando i commutatori delle matrici sopra identificate

$$[T^i, T^j] = i\epsilon^{ijk}T^k \tag{41}$$

da cui si estraggono le costanti di struttura del gruppo $SO(3)$. Abbiamo ottenuto questa algebra usando la rappresentazione definente, però ora possiamo considerarla coma l'algebra astratta del gruppo di Lie $SO(3)$ e studiarne le diverse rappresentazioni irriducibili. Come abbiamo visto le rappresentazioni irriducibili dell'algebra di Lie corrispondono alle rappresentazioni delle trasformazioni infinitesime del gruppo, esponenziando queste trasformazioni infinitesime si ottengono le trasformazioni finite[1]. Riconosciamo in (41) l'algebra quantistica del momento angolare. Infatti rinominando $T^i \to J^i$ si ha la familiare algebra del momento angolare

$$[J^i, J^j] = i\epsilon^{ijk}J^k \tag{42}$$

e lo studio delle sue rappresentazioni unitarie irriducibili può essere risolto esplicitamente con i metodi usati in meccanica quantistica: queste rappresentazioni irriducibili sono date dalle armoniche sferiche Y_{lm} che formano una base della rappresentazione di spin l che è $2l+1$ dimensionale (infatti i possibili valori di m sono $2l+1$). Nel caso di rappresentazioni spinoriali (cioè con spin semintero) una rotazione di 2π (che per $SO(3)$ coincide con l'identità) è rappresentata dalla matrice -1, e quindi si parla di rappresentazione a 2 valori (occorre ruotare di altri 2π per riottenere l'identità). Come vedermo queste rappresentazioni spinoriali sono vere e proprie rappresentazioni del gruppo $SU(2)$, che ha la stessa algebra di Lie di $SO(3)$, e quindi localmente ha la stessa struttura, ma diverse proprietà topologiche.

Per apprezzare sviluppi futuri (algebre di Lie di $SO(n)$ e $SO(n,m)$) riscriviamo le matrici che identificano i generatori nella rappresentazione vettoriale (40) e la corrispondente algebra di Lie in (41) in un modo alternativo. Possiamo rinominare il generatore T^1 come T^{23}, poichè genera rotazione nel piano 2-3, e così via: $T^2 \equiv T^{31}$, $T^3 \equiv T^{12}$. Gli elementi di matrice in (40) possono essere scritti come

$$(T^1)^i{}_j \equiv (T^{23})^i{}_j = -i(\delta^{2i}\delta^3{}_j - \delta^{3i}\delta^2{}_j) \tag{43}$$

e similmente per T^{31} e T^{12}. Si ottiene quindi l'espressione

$$(T^{mn})^i{}_j = -i(\delta^{mi}\delta^n{}_j - \delta^{ni}\delta^m{}_j) \tag{44}$$

L'agebra di Lie (41) può essere riscritta in questa base e diventa

$$[T^{mn}, T^{ij}] = -i\delta^{ni}T^{mj} + i\delta^{mi}T^{nj} + i\delta^{nj}T^{mi} - i\delta^{mj}T^{ni} \tag{45}$$

Si noti in questa relazione la presenza della metrica euclidea (inversa) δ^{ij}.

3.3 Algebra di Lie del gruppo $SU(2)$

Analizziamo ora il gruppo $SU(2)$, il gruppo delle matrici unitarie 2×2 con determinante uguale ad 1

$$SU(2) = \{g,\ \text{matrici complesse } 2\times 2 \mid g^\dagger = g^{-1},\ \det g = 1\} \tag{46}$$

[1]A meno di proprietà globali (o topologiche) come esemplificato dal caso delle rappresentazioni spinoriali a due valori che, come vedremo più avanti, sono vere rappresentazioni (cioè ad un solo valore) del gruppo $SU(2)$.

Possiamo scrivere matrici che differiscono inifinitesimamente dalla matrice unità nel seguente modo

$$g = 1 + iT \qquad\qquad T^i{}_j \ll 1 \tag{47}$$

Ora la richiesta che $g^\dagger = 1 - iT^\dagger$ coincida con $g^{-1} = 1 - iT$ implica che le matrici T debbano essere hermitiane

$$T^\dagger = T \tag{48}$$

mentre la richiesta di determinate unitario, $\det g = 1 + i \operatorname{tr} T = 1$, implica che queste matrici siano a traccia nulla

$$\operatorname{tr} T = 0 \tag{49}$$

Una base di matrici 2×2 hermitiane a traccia nulla sono date dalle matrici di Pauli

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{50}$$

per cui possiamo esprimere una arbitraria matrice T come combinazione lineare delle σ^a

$$T = \theta_a \frac{\sigma^a}{2} \equiv \theta_a T^a \qquad\qquad a = 1, 2, 3 \tag{51}$$

La normalizzazione è stata scelta per comodità. Infatti con questa normalizzazione i generatori infinitesimi $T^a = \frac{\sigma^a}{2}$ soddisfano alla seguente algebra di Lie di $SU(2)$

$$[T^a, T^b] = i\epsilon^{abc} T^c \tag{52}$$

che coincide con l'algebra di Lie di $SO(3)$. Questo dimostra che localmente sono lo stesso gruppo, ma globalmente ci sono differenze: usando il linguaggio della geometria differenziale si può dire che il gruppo $SU(2)$ è un ricoprimento del gruppo $SO(3)$. Vediamo questa differenza esplicitamente nella rappresentazione definente (o fondamentale) di $SU(2)$ (la rappresentazione "2" o di spin $\frac{1}{2}$). Una rotazione finita è ottenuta esponenziando trasformazioni infinitesime per renderle finite $g(\theta_a) = \exp(i\theta_a \frac{\sigma^3}{2})$. Una rotazione finita attorno all'asse z è ottenuta scegliendo $\theta_3 = \theta$ e $\theta_1 = \theta_2 = 0$, ed indicandola con $g_3(\theta)$ si ha

$$\begin{aligned} g_3(\theta) &= e^{i\theta \frac{\sigma^3}{2}} \\ &= 1 + i\theta \frac{\sigma^3}{2} + \frac{1}{2!}\Big(i\theta \frac{\sigma^3}{2}\Big)^2 + \frac{1}{3!}\Big(i\theta \frac{\sigma^3}{2}\Big)^3 + + \frac{1}{4!}\Big(i\theta \frac{\sigma^3}{2}\Big)^4 + \dots \\ &= 1 + i\Big(\frac{\theta}{2}\Big)\sigma^3 - \frac{1}{2!}\Big(\frac{\theta}{2}\Big)^2 - i\frac{1}{3!}\Big(\frac{\theta}{2}\Big)^3 \sigma^3 + \frac{1}{4!}\Big(\frac{\theta}{2}\Big)^4 \\ &= \Big(1 - \frac{1}{2!}\Big(\frac{\theta}{2}\Big)^2 + \frac{1}{4!}\Big(\frac{\theta}{2}\Big)^4 + \dots\Big) + i\sigma^3\Big(\frac{\theta}{2} - \frac{1}{3!}\Big(\frac{\theta}{2}\Big)^3 + \dots\Big) \\ &= \cos\Big(\frac{\theta}{2}\Big) + i\sigma^3 \sin\Big(\frac{\theta}{2}\Big) \end{aligned} \tag{53}$$

e ponendo $\theta = 2\pi$ otteniamo la trasformazione

$$g_3(\theta = 2\pi) = -1 \tag{54}$$

che non coincide con l'identità di $SU(2)$. La trasformazione identità si ottiene solo per $\theta = 4\pi$. Questa è la ben nota proprietà di rotazione di uno spinore. Come è noto dalla meccanica quantistica, tutte le rappresentazioni unitarie irriducibili di $SU(2)$ sono caratterizzate da un numero quantico j che puó essere intero o semintero, e sono di dimensione $2j + 1$.

3.4 Struttura di un generico gruppo di Lie

Usando l'intuizione sviluppata nelle discussioni precedenti, possiamo ora descrivere velocemente la struttura generale di un gruppo di Lie non abeliano. Un elemento del gruppo non abeliano G connesso all' identità può essere parametrizzato con le coordinate α_a collegate ai corrispondenti generatori T^a. Elenchiamo alcune definizioni e proprietà generali

$$
\begin{array}{rl}
(i) & g = \exp(i\alpha_a T^a) \in G \qquad a = 1, .., \dim G \\
(ii) & [T^a, T^b] = i f^{ab}{}_c T^c \\
(iii) & \mathrm{tr}\,(T^a T^b) = \dfrac{1}{2}\gamma^{ab} \qquad \text{(nella rappresentazione fondamentale)} \\
(iv) & [[T^a, T^b], T^c] + [[T^b, T^c], T^a] + [[T^c, T^a], T^b] = 0 \\
 & \Rightarrow\ f^{ab}{}_d f^{dc}{}_e + f^{bc}{}_d f^{da}{}_e + f^{ca}{}_d f^{db}{}_e = 0 \\
(v) & f^{abc} = f^{ab}{}_d \gamma^{dc} \qquad \text{tensore completamente antisimmetrico .}
\end{array}
$$

La (i) descrive la parametrizzazione esponenziale di un elemento arbitrario del gruppo che sia connesso all'identità. L'indice a aussume tanti valori quante le dimensioni del gruppo. Un elemento del gruppo è quindi parametrizzato dai paramatri α_a con $a = 1, .., \dim G$.
La (ii) corrisponde all'algebra di Lie soddifatta dai generatori infinitesimi T^a. Le costanti $f^{ab}{}_c$ sono dette costanti di struttura e caratterizzano il gruppo G.
La (iii) identifica una metrica γ^{ab} detta "metrica di Killing". Tale metrica è definita positiva solo per gruppi di Lie compatti, come ad esempio $SU(N)$ o $SO(N)$.
Le (iv) sono le cosiddette "identità di Jacobi" che possono essere sfruttate per costruire la rappresentazione aggiunta dell'algebra di Lie e del relativo gruppo. Infatti, denotando con $(T^a_{(A)})^b{}_c$ gli elementi di matrice dei generatori della rappresentazione aggiunta $T^a_{(A)}$, si ha $(T^a_{(A)})^b{}_c = -i f^{ab}{}_c$. Le identità di Jacobi permettono di provare che questa è una rappresentazione (di dimensioni uguali alle dimensioni del gruppo, poiché $a, b, c = 1, 2, ..., \dim G$).
In (v) si è usata la metrica di Killing per alzare un indice nelle costanti di struttura. Le f^{abc} sono completamente antisimmetriche in tutti gli indici: questa proprietà si può dedurre prendendo la traccia delle identità di Jacobi del punto (iv) ed usando la (ii) e la (iii). L'antisimmetria negli indici a e b è ovvia per la (ii).

A questo punto è utile citare la formula di Baker-Campbell-Hausdorff per il prodotto degli esponenziali di due operatori lineari A e B

$$
e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}[A,[A,B]]-\frac{1}{12}[B,[A,B]]+\cdots} \tag{55}
$$

dove i puntini indicano i termini successivi che sono sempre esprimibili tramite commutatori. Questa formula mostra che la conoscenza dell'algebra di Lie è sufficiente per ricostruire il prodotto (in generale non-commutativo) del corrispondente gruppo di Lie. Infine concludiamo con l'enunciato di un teorema che non dimostremo:

Teorema: Le rappresentazioni unitarie dei gruppi compatti sono finito dimensionali.

Questo teorema si applica a gruppi compatti quali $SO(N)$ ed $SU(N)$. Invece per gruppi non compatti, quali il gruppo di Lorentz $SO(3,1)$ ed il gruppo di Poincaré $ISO(3,1)$, questo teorema non si applica ed in realtà vale l'opposto: le rappresentazioni unitarie sono infinito dimensionali. Per le applicazioni in teoria dei campi relativistica, è utile conoscere: *(i)* le rappresentazioni finito dimensionali del gruppo di Lorentz che non sono unitarie, ma sono usate per descrive i campi quantistici fermionici, *(ii)* le rappresentazioni unitarie del gruppo di Poincaré che sono infinito dimensionali e sono realizzate nello spazio di Hilbert della teoria di campo quantistica appunto tramite operatori unitari. Questi punti sono molto sommariamente descritti qui di seguito.

3.5 Rappresentazioni finito dimensionali del gruppo di Lorentz

Innanzi tutto è utile ricavarsi l'algebra di Lie del gruppo di Lorentz. Per trasformazioni infinitesime possiamo scrivere

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu \ , \qquad |\omega^\mu{}_\nu| \ll 1 \tag{56}$$

ed imponendo la condizione che definisce le trasformazioni di Lorentz ($\eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}\Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu$) si ottiene che le $\omega^\mu{}_\nu$ devono soddisfare

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu} \tag{57}$$

cioè sono antisimmetriche quando si abbassano gli indici ($\omega_{\mu\nu} = \eta_{\mu\lambda}\omega^\lambda{}_\nu$). Contengono quindi 6 parametri indipendenti, che possiamo identificare con le $\omega_{\mu\nu}$ stesse ad indici $\mu < \nu$ fissati. Usando una notazione matriciale possiamo scrivere una trasformazione di Lorentz infinitesima arbitraria come

$$\Lambda = 1 + \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta} \tag{58}$$

dove le matrici Λ ed $M^{\alpha\beta} = -M^{\beta\alpha}$ hanno una struttura indiciale come in (56) che peró omettiamo per semplicità di notazione. Le sei matrici $M^{\alpha\beta}$ con $\alpha < \beta$ sono i generatori del gruppo di Lorentz, che nella rappresentazione definente (la "quadri-vettoriale") ed in notazione esplicita sono date da

$$(M^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu = -i(\eta^{\alpha\mu}\delta^\beta_\nu - \eta^{\beta\mu}\delta^\alpha_\nu) \tag{59}$$

Ad esempio possiamo esplicitarne alcune

$$M^{12} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \ , \qquad M^{01} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & i & 0 & 0 \\ \hline i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{60}$$

Vediamo che M^{12} genera rotazioni infinitesime lungo l'asse z, mentre la M^{01} genera un boost lungo l'asse x. Sebbene possa sembrare laborioso, è facile calcolare l' algebra di Lie

$$[M^{\mu\nu}, M^{\alpha\beta}] = -i\eta^{\nu\alpha}M^{\mu\beta} + i\eta^{\mu\alpha}M^{\nu\beta} + i\eta^{\nu\beta}M^{\mu\alpha} - i\eta^{\mu\beta}M^{\nu\alpha} \tag{61}$$

Tutto questo è valido anche per il gruppo $SO(n,m)$ se si identifica $\eta_{\mu\nu}$ con la metrica corrispondente: in particolare per $SO(3)$ si ha $\eta_{\mu\nu} \to \delta_{ij}$ e ridefinendo $J^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}M^{jk}$ si riottiene la (42).

Tornando al caso esplicito di $SO(3,1)$ si può riscrivere l'algebra in una forma molto utile che ci permette subito di riconoscere quali siano le sue rappresentazioni finito-dimensionali (seppur non unitarie). Separando gli indici in parte temporale e spaziale $\mu = (0,i)$, e definendo la seguente base per i generatori del gruppo di Lorentz

$$J^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}M^{jk} \ , \qquad K^i = M^{i0} \tag{62}$$

si ha che l'algebra di Lie (61) si riscrive nella forma

$$[J^i, J^j] = i\epsilon^{ijk}J^k \qquad [J^i, K^j] = i\epsilon^{ijk}K^k \qquad [K^i, K^j] = -i\epsilon^{ijk}J^k \tag{63}$$

dove i generatori J^i generano il sottogruppo delle rotazioni spaziali $SO(3)$. Infine, definendo le combinazioni lineari complesse

$$N^i = \frac{1}{2}(J^i - iK^i) \qquad \bar{N}^i = \frac{1}{2}(J^i + iK^i) \tag{64}$$

l'algebra si riscrive come

$$[N^i, N^j] = i\epsilon^{ijk}N^k \qquad [\bar{N}^i, \bar{N}^j] = i\epsilon^{ijk}\bar{K}^k \qquad [N^i, \bar{N}^j] = 0 \tag{65}$$

che mostra come l'algebra di $SO(3,1)$ si riduca a quella di $SU(2) \times SU(2)$, a meno di relazioni di hermiticità diverse (necessarie perchè $SO(3,1)$ non è compatto, mentre $SU(2)$ lo è). Questa relazione ci dice che $SO(3,1)$ si riduce essenzialmente a due copie indipendenti di $SU(2)$, per cui utilizzando le note rappresentazioni finito dimensionali di quest'ultimo gruppo, si riconoscono subito le rappresentazioni finito dimensionali di $SO(3,1)$: queste sono classificate da due numeri interi o seminteri (j_1, j_2) corrispondenti alla rappresentazioni dei due sottogruppi $SU(2)$ generati da N^i ed $\bar{N}^i$. Inoltre, ricordando la (64) si riconosce che il vero spin della rappresentazione è dato da $j = j_1 + j_2$. Queste rappresentazioni sono finito-dimensionali, ma non sono unitarie a causa della necessità di prendere delle combinazioni complesse dei generatori in (64).

In teoria quantistica dei campi, si usano campi con queste rappresentazioni di Lorentz per descrive particelle con spin fissato, ad esempio

$$\begin{aligned}
(0,0) \quad &\longrightarrow \quad \text{scalare } \phi \\
(\frac{1}{2},0) \quad &\longrightarrow \quad \text{fermione sinistrorso } \psi_{_L} \sim \xi_a \\
(0,\frac{1}{2}) \quad &\longrightarrow \quad \text{fermione destrorso } \psi_{_R} \sim \eta_{\dot{a}} \\
(\frac{1}{2},0) \oplus (0,\frac{1}{2}) \quad &\longrightarrow \quad \text{fermione di Dirac } \psi \sim \psi_\alpha \\
(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \quad &\longrightarrow \quad \text{potenziale quadrivettore per spin}-1\ A_\mu
\end{aligned} \tag{66}$$

Esattamente come per $SO(3) \to SU(2)$ permette di descrivere le rappresentazioni spinoriali come rappresentazioni ad un solo valore, ora $SO(3,1) \to SL(2,C)$ include l'estensione relativistica delle proprietà sinoriali. Infatti le algebre di Lie di $SO(3,1)$ e di $SL(2,C)$ coincidono e quest'ultimo gruppo è il ricoprimento del primo.

3.6 Rappresentazioni unitarie del gruppo di Poincaré

Il gruppo di Poincaré estende il gruppo di Lorentz con traslazioni spazio-temporali e trasforma il quadrivettore posizione nel seguente modo

$$x^\mu \to x^{\mu\prime} = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \tag{67}$$

dove $\Lambda^\mu{}_\nu$ descrive una trasformazione di Lorentz ed a^μ una traslazione spazio-temporale. A volte questo gruppo è indicato con il nome $ISO(3,1)$, il gruppo speciale ortogonale inomogeneo.

L'algebra del gruppo di Poincaré può essere scritta nel seguente modo

$$\begin{aligned} [P^\mu, P^\nu] &= 0 \\ [M^{\mu\nu}, P^\lambda] &= -i\eta^{\nu\lambda} P^\mu + i\eta^{\mu\lambda} P^\nu \\ [M^{\mu\nu}, M^{\alpha\beta}] &= -i\eta^{\nu\alpha} M^{\mu\beta} + i\eta^{\mu\alpha} M^{\nu\beta} + i\eta^{\nu\beta} M^{\mu\alpha} - i\eta^{\mu\beta} M^{\nu\alpha} \end{aligned} \tag{68}$$

Le sue rappresentazioni unitarie sono infinito dimensionali e sono state classificate da Wigner. Sono classificate dai valori degli operatori di Casimir $P^2 \equiv P_\mu P^\mu$ e $W^2 \equiv W_\mu W^\mu$, dove $W_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} P^\nu M^{\alpha\beta}$ è il cosiddetto vettore di Pauli-Lubanski (infatti usando le eq. (68) si vede che P^2 e W^2 commutano con tutti gli elementi dell'algebra di Poincarè, i.e. sono invarianti per trasformazioni infinitesime del gruppo di Poincarè). Le rappresentazioni unitarie sono classificate dai seguenti valori degli operatori di Casimir:

- $P^2 = -m^2 > 0$, $W^2 = m^2 s(s+1)$ con $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2...$: particelle di massa m e spin s.
- $P^2 = 0$, $W^2 = 0$ e con $W_\mu = \pm s P_\mu$ dove $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2...$: particelle massless con elicità s.
- $P^2 = 0$, $W^2 = k^2 > 0$ "particelle" senza massa con infiniti stati di "polarizzazione" che variano in modo continuo: non sembrano avere applicazioni nella teoria dei campi (almeno a livello perturbativo).
- $P^2 = -m^2 < 0$: rappresentazioni tachioniche, mai utilizzate in fisica (inconsistenti con le interpretazioni fisiche usuali).
- $P_\mu = 0$, $W_\mu = 0$: rappresentazione banale (scalare) $\to$ vuoto quantistico (nessuna particella).

Ad esempio, il caso fisico delle rappresentazioni di massa m e spin s (caso con $P^2 = -m^2 > 0$ e $W^2 = m^2 s(s+1)$) sono definite su uno spazio vettoriale infinito-dimensionale: uno spazio di Hilbert generato da vettori della forma

$$|\vec{p}, s_3\rangle \ , \qquad \vec{p} \in R^3, \quad s_3 = -s, ..., +s \tag{69}$$

e su questo spazio di Hilbert infinito-dimensionale agiscono gli operatori unitari che rappresentano in modo irriducibile le trasformazioni del gruppo di Poincaré.