

Interazioni tra campi, teorie di Fermi e di Yukawa

(Appunti per il corso di Teoria dei Campi 1 - 2010/11)

Fiorenzo Bastianelli

1 Costanti d'accoppiamento

Le teorie di campo libere che abbiamo analizzato fin qui descrivono la propagazione di particelle ed antiparticelle relativistiche con la corretta relazione tra energia ed impulso. Sorgenti esterne possono essere utilizzate per descriverne la creazione e l'assorbimento: questo accorgimento ci ha permesso in particolare di analizzare gli effetti "virtuali" associati alle particelle (quali i potenziali di interazione tra sorgenti statiche).

Le sorgenti esterne sono un'approssimazione utile, ma in molti casi occorre considerare anche la dinamica di queste sorgenti. Nel caso in cui queste sorgenti siano descrivibili da campi e dalle loro fluttuazioni, i termini d'interazione corrispondono precisamente ai termini cubici e di ordine più alto nei campi presenti nell'azione. Le costanti che moltiplicano questi termini sono dette costanti d'accoppiamento. In generale le equazioni del moto che ne conseguono non sono risolubili in modo esatto, ma se le costanti d'accoppiamento sono sufficientemente piccole si può ricorrere alla teoria perturbativa.

Analizziamo il caso istruttivo di un campo scalare reale con autointerazioni

$$S[\phi] = \int d^4x \left(-\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda_3}{3!} \phi^3 - \frac{\lambda_4}{4!} \phi^4 - \frac{\lambda_5}{5!} \phi^5 + \dots \right). \quad (1)$$

L'azione è manifestamente Lorentz invariante, per cui la consistenza con la relatività ristretta è garantita. Le equazioni del moto sono non-lineari

$$(\square - m^2)\phi = \frac{\lambda_3}{2} \phi^2 + \frac{\lambda_4}{3!} \phi^3 + \frac{\lambda_5}{4!} \phi^4 + \dots \quad (2)$$

e non è noto come risolverle esattamente. Però, se i valori delle costanti d'accoppiamento lo permettono, si può ricorrere alla teoria perturbativa ed interpretare i termini della lagrangiana come corrispondenti alla propagazione libera (termini quadratici nei campi, che identificano il propagatore) ed ai vertici d'interazione (termini di ordine maggiore di due)

$$S[\phi] = \int d^4x \left(-\frac{1}{2} \phi (-\square + m^2) \phi - \frac{\lambda_3}{3!} \phi^3 - \frac{\lambda_4}{4!} \phi^4 - \frac{\lambda_5}{5!} \phi^5 + \dots \right)$$

$$= \text{---} + \text{---} \begin{array}{l} \diagup \\ \lambda_3 \\ \diagdown \end{array} + \text{---} \begin{array}{l} \diagup \\ \lambda_4 \\ \diagdown \end{array} + \text{---} \begin{array}{l} \diagup \\ \lambda_5 \\ \diagdown \end{array} + \dots \quad (3)$$

Nei vertici ogni campo agisce distruggendo una particella o creando una antiparticella (e viceversa per il campo complesso coniugato se presente).

Classifichiamo le costanti d'accoppiamento λ_i in base alle loro dimensioni di massa. In unità in cui $\hbar = c = 1$ l'azione è adimensionale, una lunghezza ha le dimensioni di una massa M così come il campo ϕ , etc.. In formule

$$[S] = M^0, \quad [x^\mu] = M^{-1}, \quad [\partial_\mu] = M, \quad [m] = M, \quad [\phi] = M \quad (4)$$

mentre le costanti d'accoppiamento

$$[\lambda_3] = M, \quad [\lambda_4] = M^0, \quad [\lambda_5] = M^{-1}, \dots \quad (5)$$

Le costanti d'accoppiamento con dimensione di massa positiva sono dette super-rinormalizzabili (come λ_3), quelle adimensionali sono dette rinormalizzabili (come λ_4), quelle con dimensione di massa negativa sono dette non-rinormalizzabili (come λ_5).

Un'analisi dimensionale più approfondita può mostrare che le interazioni con costanti d'accoppiamento super-rinormalizzabili ($[\lambda] = M^\alpha$ con $\alpha > 0$) danno origine ad effetti importanti a basse energie, mentre questi effetti sono trascurabili ad alte energie: se in un determinato processo indichiamo con E l'energia totale in gioco, l'interazione dipende dal termine adimensionale $\frac{\lambda}{E^\alpha}$. Come caso limite si può trattare la massa di una particella come costante

d'accoppiamento, che naturalmente risulta super-rinormalizzabile, rendendosi conto che i suoi effetti sono trascurabili ad energie elevate (in questo limite le particelle possono essere considerate ultra-relativistiche). Se la costante d'accoppiamento è rinormalizzabile (ed è quindi adimensionale) i suoi effetti sono importanti a tutte le scale di energia. Infine le interazioni con costanti d'accoppiamento non-rinormalizzabili ($[\lambda] = M^{-\alpha}$ con $\alpha > 0$) danno origine ad effetti importanti ad alte energie e trascurabili a basse energie: se E indica l'energia totale in gioco, gli effetti sono proporzionali al termine adimensionale λE^α . Queste ultime interazioni sono in genere considerate come interazioni efficaci, valide essenzialmente solo a basse energie, ma presumibilmente re-interpretabili come approssimazioni di interazioni più complicate che dovrebbero emergere ad energie più alte (un esempio tipico è dato dalla teoria di Fermi delle interazioni deboli, che può essere interpretata come approssimazione di bassa energia del modello standard elettrodebole).

2 Sviluppo perturbativo, diagrammi di Feynman e quantizzazione

Per descrivere brevemente l'uso dei diagrammi di Feynman ed accennare alle conseguenze della quantizzazione, consideriamo il caso illustrativo della teoria $\lambda\phi^3$ in presenza di una sorgente esterna J . Questa teoria è definita dall'azione

$$S[\phi] = \int d^4x \left(-\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{3!} \phi^3 + J\phi \right) \quad (6)$$

che genera le seguenti equazioni relativistiche non-lineari

$$(-\square + m^2)\phi(x) = J(x) - \frac{\lambda}{2}\phi^2(x).$$

Usando la funzione di Green $G(x-y)$ dell'operatore differenziale $(-\square + m^2)$, che soddisfa all'equazione

$$(-\square_x + m^2)G(x-y) = \delta^4(x-y)$$

e che costituisce essenzialmente il propagatore libero, possiamo trasformare l'equazione differenziale in equazione integrale

$$\phi(x) = \int d^4y G(x-y) \left(J(y) - \frac{\lambda}{2} \phi^2(y) \right).$$

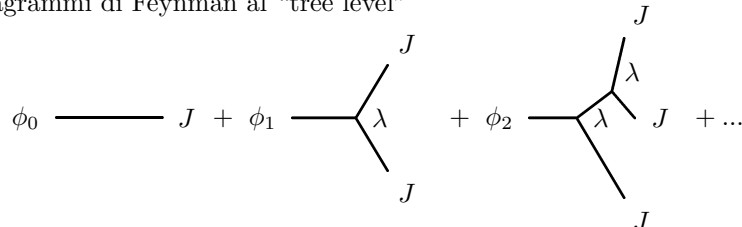
Questa è un'equazione integrale perchè per valutare l'integrale nel lato destro occorre già conoscere il lato sinistro. Una soluzione perturbativa in λ può essere ottenuta sostituendo come ansatz di soluzione la serie

$$\phi(x) = \phi_0(x) + \phi_1(x) + \phi_2(x) + \dots + \phi_n(x) + \dots$$

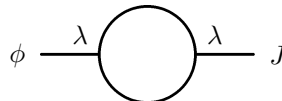
dove ϕ_n è un termine proporzionale a λ^n , ed uguagliando tra loro i termini proporzionali a λ^n . Si ottiene

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &= \int d^4y G(x-y) J(y) \\ \phi_1(x) &= \int d^4y G(x-y) \left(-\frac{\lambda}{2} \right) \phi_0^2(y) \\ \phi_2(x) &= \int d^4y G(x-y) (-\lambda) \phi_0(y) \phi_1(y) \\ &\dots \end{aligned} \quad (7)$$

rappresentabili come diagrammi di Feynman al "tree level"



La quantizzazione comporta che oltre ai diagrammi del "tree level" occorra aggiungere diagrammi con "loops"



3 Modello di Yukawa per le interazioni nucleari

Il nucleo contiene protoni e neutroni, legati da una forza nucleare a corto raggio. Nel 1935 Yukawa propose di associare una particella scalare massiva (mesone) il cui campo potesse descrivere la forza attrattiva tra cariche nucleari dello stesso segno (come ad esempio i neutroni). Dal punto di vista della forza nucleare i protoni ed i neutroni sembrano essere equivalenti tra loro, ed Heisenberg propose di introdurre una simmetria $SU(2)$ (simmetria di isospin) che potesse rendere conto di questa equivalenza, per cui la lagrangiana libera per protoni e neutroni (i nucleoni) con invarianza di isospin assume la forma

$$\mathcal{L}_N = -\bar{N}^i(\gamma^\mu \partial_\mu + m)N_i = -\bar{N}(\gamma^\mu \partial_\mu + m)N \quad (8)$$

dove nella seconda forma si sottintende l'indice di $SU(2)$ ($N_1 = \psi_p$ descrive il protone ed $N_2 = \psi_n$ il neutrone; una rotazione $SU(2)$ permette di ridefinire che cosa si intenda per protone e cosa per neutrone; m descrive la massa dei nucleoni: il fatto che protoni e nucleoni abbiano in realtà masse leggermente diverse indica che la simmetria $SU(2)$ non è esatta ma solo approssimata).

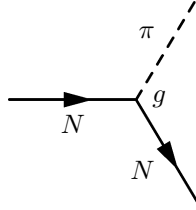
Un campo scalare reale libero è descritto dalla lagrangiana

$$\mathcal{L}_\pi = -\frac{1}{2}\partial_\mu\pi\partial^\mu\pi - \frac{1}{2}\mu^2\pi^2 \quad (9)$$

dove μ è la massa del mesone, la particella associata al campo scalare. Un'interazione semplice che possa descrivere le forze nucleari come mediate da un mesone ed invariante per $SU(2)$ assume la forma

$$\mathcal{L}_{int} = -g \pi \bar{N}N \quad (10)$$

con g costante d'accoppiamento adimensionale. Questa interazione comporta un vertice d'interazione elementare descritto dal seguente diagramma di Feynman



e naturalmente da tutti i vertici simili in cui particelle entranti (uscanti) dal vertice sono sostituite da antiparticelle uscenti (entranti), come segue dall'interpretazione con struttura causale del propagatore (prescrizione di Feynman).

La lagrangiana totale $\mathcal{L} = \mathcal{L}_N + \mathcal{L}_\pi + \mathcal{L}_{int}$ costituisce quindi un primo tentativo di descrivere le forze nucleari in modo consistente con l'invarianza relativistica (sotto il gruppo di Poincaré) e con la simmetria di isospin.

Lo studio sperimentale delle forze nucleari ha però mostrato come ci siano tre mesoni (π^0, π^+, π^-) che sotto trasformazioni di parità cambiano segno e cioè si comportano come pseudoscalari. Queste informazioni possono essere incluse usando un tripletto (isospin 1) di mesoni pseudoscalari π^a (con $a = 1, 2, 3$) e lagrangiana libera

$$\mathcal{L}'_\pi = -\frac{1}{2}\partial_\mu\pi^a\partial^\mu\pi^a - \frac{1}{2}\mu^2\pi^a\pi^a \quad (11)$$

insieme ad un'interazione invariante sotto i gruppi di Poincaré, dell'isospin $SU(2)$ e sotto trasformazioni di parità, descritta quindi da

$$\mathcal{L}'_{int} = -ig \pi^a \bar{N} \sigma^a \gamma_5 N \quad (12)$$

dove con σ^a sono state indicate le matrici di Pauli.

Le interazioni elettromagnetiche non sono invarianti per trasformazioni di isospin (protone e neutrone hanno cariche elettriche diverse). Gli autostati di carica elettrica possono essere esplicitati nel modo seguente. Definendo

$$\pi^\pm \equiv \pi_\mp \equiv \frac{\pi^1 \mp i\pi^2}{\sqrt{2}}, \quad \pi^0 \equiv \pi^3 \quad (13)$$

l'azione libera $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_N + \mathcal{L}'_\pi$ diventa

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 = & -\bar{\psi}_p(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi_p - \bar{\psi}_n(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi_n \\ & -\frac{1}{2}\partial_\mu\pi^0\partial^\mu\pi^0 - \frac{1}{2}\mu^2\pi^0\pi^0 - \partial_\mu\pi^-\partial^\mu\pi^+ - \mu^2\pi^-\pi^+ \end{aligned} \quad (14)$$

mentre l'interazione (usando $\sigma_{\pm} = \frac{\sigma^1 \pm i\sigma^2}{\sqrt{2}}$)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'_{int} &= -ig (\pi^+ \bar{N} \sigma_+ \gamma_5 N + \pi^- \bar{N} \sigma_- \gamma_5 N + \pi^0 \bar{N} \sigma^3 \gamma_5 N) \\ &= -ig \left(\sqrt{2} \pi^+ \bar{\psi}_p \gamma_5 \psi_n + \sqrt{2} \pi^- \bar{\psi}_n \gamma_5 \psi_p + \pi^0 (\bar{\psi}_p \gamma_5 \psi_p - \bar{\psi}_n \gamma_5 \psi_n) \right).\end{aligned}\quad (15)$$

Da questa lagrangiana d'interazione si possono estrarre i conseguenti vertici elementari d'interazione tra pioni e nucleoni.

4 Teoria di Fermi delle interazioni deboli

Nel 1934 Fermi propose l'uso dei campi per descrivere le interazioni deboli, esemplificate dal decadimento del neutrone in protone, elettrone ed antineutrino

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e.$$

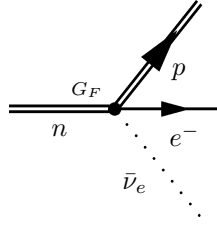
Dovendo descrivere un tale fenomeno, Fermi consideró una lagrangiana con quattro campi di spin 1/2, $\psi_i = (\psi_n, \psi_p, \psi_e, \psi_\nu)$ con masse $m_i = (m_n, m_p, m_e, m_\nu)$, associati alle differenti particelle in gioco

$$\mathcal{L}_0 = - \sum_{i=1}^4 \bar{\psi}_i (\gamma^\mu \partial_\mu + m_i) \psi_i \quad (16)$$

ed un'interazione del tipo

$$\mathcal{L}_{int} \sim G_F (\bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n) (\bar{\psi}_\nu \gamma_\mu \psi_e) + c.c. \quad (17)$$

dove *c.c.* indica il complesso coniugato per garantire che la lagrangiana abbia valori reali. Questa interazione produce un vertice del tipo



proporzionale alla costante d'accoppiamento di Fermi G_F (di dimensioni di massa M^{-2} e quindi classificabile come non-rinormalizzabile). L'invarianza relativistica è assicurata anche se la struttura tensoriale delle varie correnti (con corrente adronica ci si riferisce a $\bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n$ e con corrente leptonica alla corrente $\bar{\psi}_\nu \gamma^\mu \psi_e$) è diversa da quella vettoriale utilizzata qui sopra. In generale si possono utilizzare correnti della forma

$$\bar{\psi} \Gamma^i \psi \quad \text{con} \quad \Gamma^i = (1, \gamma^\mu, [\gamma^\mu, \gamma^\nu], \gamma^\mu \gamma_5, \gamma_5) \quad (18)$$

ed il problema di quali correnti siano necessarie per descrivere correttamente il decadimento beta non è completamente vincolato dall'invarianza di Lorentz, ma le possibilità restanti devono essere verificate da test sperimentali. Emerse ben presto che i dati sperimentali potevano essere consistenti solo con correnti di natura vettoriale (contenti γ^μ , come aveva assunto Fermi, o $\gamma^\mu \gamma_5$). Più precisamente, dopo la scoperta della violazione della parità (Lee e Yang, 1956), si giunse alla struttura vettoriale-assiale (V-A)

$$\bar{\psi}_\nu \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_e. \quad (19)$$

Questa struttura vettoriale assiale, corretta per la corrente leptonica, ha mostrato poi delle leggere deviazioni nella corrente adronica (cioè per i nucleoni) che risulta descritta da due parametri G_V e G_A con valori leggermente differenti dall'unità nel seguente modo

$$\bar{\psi}_n \gamma^\mu (G_V - G_A \gamma_5) \psi_p. \quad (20)$$

Quest'ultimo fatto fu subito interpretato come dovuto alla struttura non puntiforme del protone e del neutrone, segnale di una struttura composta dei nucleoni (che infatti sono oggi interpretati come composti da quark e gluoni). In definitiva, usando una corrente j^μ somma di correnti cariche leptoniche ed adroniche (corrente "carica" significa che la corrente descrive un cambio di carica nel vertice, con $\Delta q = -1$ nel caso seguente)

$$j^\mu = \bar{\psi}_e \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_\nu + \bar{\psi}_n \gamma^\mu (G_V - G_A \gamma_5) \psi_p \quad (21)$$

l'interazione di Fermi assume la forma finale descritta da

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} j^\mu j_\mu^\dagger \quad (22)$$

che è reale (j_μ^\dagger indica la corrente hermitiano-coniugata, corrente carica con $\Delta q = 1$; la presenza di una $\sqrt{2}$ è puramente convenzionale) e naturalmente include il decadimento beta sopra descritto, più altri processi di natura debole osservati anche essi in natura. Questa lagrangiana è ancora oggi utilissima per la descrizione della forza debole a basse energie (energie sufficientemente minori della massa delle particelle W^\pm), quando opportunamente estesa con l'aggiunta di correnti neutre (associate nel modello standard alla particella Z^0).