1 Simmetrie e teorema di Noether

L'analisi delle simmetrie di un sistema fisico è una strategia molto utile per identificare le equazioni del moto del sistema sotto studio. Si può definire il concetto di simmetria delle equazioni del moto nel seguente modo:
Una simmetria è una trasformazione delle variabili dinamiche $q(t)$, indotta eventualmente da una trasformazine del parametro t,

$$\begin{aligned} t &\longrightarrow t' = f(t) \\ q(t) &\longrightarrow q'(t') = F(q(t), t) \end{aligned} \tag{1}$$

che lascia invarianti in forma le equazioni del moto.
Poichè le equazioni del moto sono invarianti in forma, esse ammettono le stesse soluzioni e non si può stabilire se siamo nel "vecchio sistema di riferimento" o nel "nuovo sistema di riferimento", che quindi sono da trattare sullo stesso piano, senza che uno di essi possa essere identificato come privilegiato. Un test per verificare se una trasformazione è una simmetria fà uso dell'azione. Se l'azione è invariante sotto la trasformazione (1)

$$S[q'] = S[q] \tag{2}$$

a meno di termini di bordo (che non modificano le equazioni del moto lagrangiane) allora la trasformazione è una simmetria, perchè le equazioni dedotte dal principio di minima azione sono le stesse in forma, essendo ottenibili da azioni identiche.

Per simmetrie di Lie, cioè simmetrie che dipendono in modo continuo da alcuni parametri, si può dimostrare il teorema di Noether che afferma che:
Per ogni parametro continuo del gruppo di simmetria esiste una carica conservata, o, per teorie di campo, una conservazione locale espressa tramite una equazione di continuità.
Dimostriamo questo teorema per una generale teoria di campo che include come sottocaso anche sistemi con un numero finito di gradi di libertà. Indichiamo con x^μ le coordinate spazio-temporali e collettivamente con $\phi(x)$ i campi dinamici. Una trasformazione di simmetria che dipende da un parametro α può essere descritta da

$$\begin{aligned} x'^\mu &\longrightarrow x'^\mu = f^\mu(x, \alpha) \\ \phi(x) &\longrightarrow \phi'(x') = F(\phi(x), x, \alpha) \end{aligned} \tag{3}$$

dove per definizione si ottiene la trasformazione identità per $\alpha = 0$. Le trasformazioni infinitesime (con parametro $\alpha \ll 1$) si possono scrivere nel seguente modo

$$\delta_\alpha \phi(x) \equiv \phi'(x) - \phi(x) = \alpha G(\phi(x), x) \tag{4}$$

con un'opportuna funzione G ottenibile dalla F in (3). Ora per provare che esiste una grandezza conservata associata a questa simmetria, estendiamo la trasformazione di simmetria ad una trasformazione più generale con parametro $\alpha(x)$ non più costante ma funzione arbitraria dipendente dal tempo e dallo spazio

$$\delta_{\alpha(x)} \phi(x) \equiv \phi'(x) - \phi(x) = \alpha(x) G(\phi(x), x) \tag{5}$$

In generale questa trasformazione non sarà più una simmetria, ma possiamo certamente affermare che l'azione si trasforma nel seguente modo

$$\delta_{\alpha(x)} S[\phi] = \int d^n x \ \partial_\mu \alpha(x) J^\mu \tag{6}$$

a meno di termini di bordo (integrali di derivate totali). Infatti, se prendiamo il caso di α costante sappiamo che l'azione deve essere invariante perchè per ipotesi abbiamo una simmetria. Ora la corrente J^μ è la corrente che soddisfa l'equazione di continuità associata alla conservazione di una carica. Per vederlo usiamo le equazioni del moto, che rendono nulla la variazione dell'azione sotto qualunque trasformazione (principio di minima azione) e in particolare sotto le trasformazioni con parametro locale descritte in (5)

$$0 = \delta_{\alpha(x)} S[\phi] = \int d^n x \ \partial_\mu \alpha(x) J^\mu = -\int d^n x \ \alpha(x) \partial_\mu J^\mu \qquad \Longrightarrow \qquad \partial_\mu J^\mu = 0 \tag{7}$$

dove abbiamo integrato per parti ed usato l'arbitrarietà della funzione $\alpha(x)$ per dedurre l'equazione di continuità. Questo tipo di simmetrie di Lie sono dette <u>simmetrie rigide</u> o <u>simmetrie globali</u> ed hanno associate una carica conservata Q

$$Q = \int d^3 x \, J^0 \tag{8}$$

Queste cariche sono conservate perchè possiamo calcolare

$$\frac{d}{dt} Q = \int d^3 x \, \partial_0 J^0 = -\int d^3 x \, \partial_i J^i = 0 \tag{9}$$

dove si è assunto che le componenti spaziali della corrente vadano a zero in modo sufficientemente veloce così da annullare il termine di bordo.

Le simmetrie di Lie in cui il parametro è una funzione arbitraria del tempo (e dello spazio) sono dette <u>simmetrie locali</u> o <u>simmetrie di gauge</u>. Il metodo precedente non permette di ottenere nessuna equazione di continuità perchè ora la variazione dell'azione è sempre zero, per qualunque parametro locale e senza usare le equazioni del moto. La presenza di simmetrie locali ci dice che le variabili dinamiche che stiamo usando sono ridondanti, perchè con una trasformazione di gauge possiamo modificare arbitrariamente l'evoluzione temporale di una opportuna combinazione delle variabili dinamiche, combinazione la cui evoluzione non è evidentemente fissata dalle equazioni del moto.

Questi due tipi di simmetria sono esemplificati negli esempi seguenti.

2 Particella non relativistica

Consideriamo il caso di una particella non relativistica libera. Ci proponiamo di studiarne l'invarianza per trasformazioni generate dal gruppo di Galileo, ottenendo le corrispondenti cariche conservate, come garantito dal teorema di Noether.

Prendiamo le coordinate cartesiane della particella $x^i(t) \in R^3$ come variabili dinamiche. Poichè la metrica euclidea è data da δ_{ij}, la posizione degli indici in alto o in basso è ininfluente.

L'azione è data dall' integrale temporale della lagrangiana, che per una particella libera coincide con la sua energia cinetica

$$S[x^i(t)] = \int dt\ \frac{m}{2}\dot{x}^i\dot{x}^i \tag{10}$$

e le equazioni del moto sono ottenute minimizzando l'azione

$$\frac{\delta S[x]}{\delta x^i(t)} \equiv -m\ddot{x}^i = 0\ . \tag{11}$$

<u>*Traslazioni spaziali*</u>: La trasformazione delle variabili dinamiche per traslazioni spaziali è data da

$$\delta x^i(t) = a^i \tag{12}$$

con a^i vettore infinitesimo costante; abbiamo usato la definizione $\delta x^i(t) \equiv x'^i(t) - x^i(t)$ che collega le variabili dinamiche trasformate con le vecchie variabili dinamiche. Si verifica immediatamente che sotto (12) l'azione è invariante

$$\delta S[x] = 0 \tag{13}$$

quindi la trasformazione (12) è una simmetria: poichè l'azione è invariante le equazioni del moto sono invarianti in forma.

Usiamo ora il metodo di Noether per trovare le cariche conservate. Estendiamo le trasformazioni in (12) a trasformazioni più generali dipendenti da un vettore $a^i(t)$ dipendente dal tempo.

$$\delta x^i(t) = a^i(t)\ . \tag{14}$$

L'azione non sarà più invariante ed infatti un calcolo esplicito produce

$$\delta S[x] = \int dt\ \underbrace{m\dot{x}^i}_{p^i}\dot{a}^i\ . \tag{15}$$

Il termine che moltiplica $\dot{a}^i$ identifica la carica conservata: il momento lineare p^i. Per provarne la conservazione è sufficiente usare le equazioni del moto, che implicano che $\delta S = 0$ per ogni variazione ed in particolare per una variazione della forma (14). Integrando per parti ed usando l'arbitrarietà delle funzioni $a^i(t)$ si deduce che $p^i = m\dot{x}^i$ è conservato

$$0 = \delta S[x^i(t)] = \int dt\ p^i(t)\dot{a}^i(t) = -\int dt\ \dot{p}^i(t)a^i(t) \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{p}^i(t) = 0 \tag{16}$$

Dunque il momento lineare $p^i = m\dot{x}^i$ è conservato durante l'evoluzione del sistema come conseguenza dell'invarianza traslazionale nello spazio.

<u>*Traslazione temporale*</u>: Anche una traslazione temporale è un'invarianza del sistema. Se trasliamo il tempo di una grandezza infinitesima ϵ

$$t \to t' = t - \epsilon \tag{17}$$

e se richiediamo che la funzioni $x^i(t)$ siano funzioni scalari

$$x^i(t) \quad \to \quad x'^i(t') = x^i(t) \tag{18}$$

allora l'azione è invariante. Esprimiamo questa trasformazione delle variabili dinamiche in termini della variazione $\delta x^i(t) \equiv x'^i(t) - x^i(t)$, con funzioni valutate in termini della stessa variabile t,

$$\begin{aligned} \delta x^i(t) &= x'^i(t) - x^i(t) = x'^i(t) - x^i(t) + x'^i(t') - x'^i(t') \\ &= x'^i(t) - x'^i(t') + \underbrace{x'^i(t') - x^i(t)}_{=0} = (t - t')\dot{x}'^i(t') = \epsilon\, \dot{x}^i(t) \end{aligned} \tag{19}$$

relazione valida a meno di termini di ordine ϵ^2. Usando una funzione arbitraria $\epsilon(t)$

$$\delta x^i(t) = \epsilon(t)\dot{x}^i(t) \tag{20}$$

possiamo verificare l'invarianza ed ottenere direttamente la carica conservata. Infatti variando l'azione sotto le trasformazioni (20) otteniamo

$$\delta S[x] = \int dt\ m\dot{x}^i \partial_t(\epsilon \dot{x}^i) = \int dt\ \Big[\partial_t\Big(\frac{\epsilon m}{2}\dot{x}^i\dot{x}^i\Big) + \dot{\epsilon}\frac{m}{2}\dot{x}^i\dot{x}^i\Big] = \int dt\ \dot{\epsilon}\,\underbrace{\Big(\frac{m}{2}\dot{x}^i\dot{x}^i\Big)}_{E} \tag{21}$$

dove abbiamo trascurato termini di bordo (le derivate totali). Da questo calcolo possiamo dedurre immediatamente due cose:
(i) se ϵ è costante allora $\dot{\epsilon} = 0$ e quindi $\delta S[x] = 0$, per cui la trasformazione corrispondente è una simmetria.
(ii) Usando le equazioni del moto ($\delta S = 0$) ed integrando per parti deduciamo che $\dot{E} = 0$, quindi l'energia cinetica $E = \frac{m}{2}\dot{x}^i\dot{x}^i$ è conservata come conseguenza dell'invarianza per traslazioni temporali.
Rotazioni spaziali: Per rotazioni spaziali le coordinate si trasformano nel seguente modo

$$\delta x^i = \epsilon^{ijk}\omega^j x^k \tag{22}$$

dove il vettore ω^i descrive una rotazione infinitesima. Considerando subito ω^i come funzione arbitraria del tempo otteniamo

$$\delta S[x] = \int dt\ \dot{\omega}^i\, \underbrace{\epsilon^{ijk}x^j m\dot{x}^k}_{(\vec{r}\times\vec{p})^i \equiv L^i} \tag{23}$$

Di nuovo, per ω^i costante si ha una simmetria. Le corrispondenti cariche conservate sono le tre componenti del vettore momento angolare L^i.
Trasformazioni galileiane proprie: Indichiamo con trasformazioni galileiane proprie le trasformazioni tra due sistemi di riferimento inerziali in moto relativo con velocità relativa costante v^i. La trasformazione sulle variabili dinamiche è data quindi da

$$\delta x^i = v^i t \tag{24}$$

e procedendo come in precedenza, cioè estendendo i parametri della trasformazione a funzioni arbitrarie del tempo, si calcola a meno di termini di bordo

$$\delta S[x] = \int dt\ \dot{v}^i\, \underbrace{\Big(m\dot{x}^i t - m x^i\Big)}_{G^i} \tag{25}$$

da cui si deduce che per v^i costanti si ha una simmetria a cui corrisponde la conservazione del vettore $G^i = m\dot{x}^i t - mx^i$, come si può facilmente verificare usando le equazioni del moto.

Per concludere, abbiamo visto come all'invarianza della particella libera non relativistica sotto le trasformazioni del gruppo di Galileo, un gruppo di Lie a 10 parametri, corrispondono 10 grandezze conservate.

3 Particella relativistica

Studiamo ora un principio d'azione che descriva la propagazione di una particella relativistica, che per definizione deve essere consistente con l'invarianza per trasformazioni di Lorentz e, più in generale, di Poincaré. Studieremo quattro descrizioni equivalenti in alcune delle quali, si farà uso anche di simmetrie di gauge.

(I) Consideriamo la descrizione del moto della particella come visto da un sistema di riferimento inerziale con coordiante cartesiane $x^\mu = (x^0, x^i) = (t, x^i)$. Per semplicità abbiamo posto $c = 1$. Consideriamo come variabili dinamiche le funzioni posizione $x^i(t)$. Imponendo l'invarianza dell'azione per trasformazioni di Lorentz garantisce l'invarianza relativistica. Questa richiesta si può realizzare utilizzando il tempo proprio θ, che per un moto infinitesimo è dato da $d\theta = \sqrt{dt^2 - dx^i dx^i} = dt\sqrt{1 - \dot{x}^i \dot{x}^i}$. Quindi l'azione

$$S_I[x^i(t)] = -m \int d\theta = -m \int dt\ \sqrt{1 - \dot{x}^i(t)\dot{x}^i(t)} \tag{26}$$

con m massa della particella è automaticamente invariante per trasformazioni di Lorentz (e di Poincarè). Inoltre nel limite non relativistico $(\dot{x}^i)^2 \ll 1$ questa azione riproduce l'azione della particella non relativistica. Le equazioni del moto sono ottenute dal principio di minima azione

$$\delta S_I[x^i] = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}^i}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}\dot{\vec{x}}}}\right) = 0\ . \tag{27}$$

Le simmetrie rigide sono quelle generate dal gruppo di Poincarè. Non ci sono simmetrie di gauge e le tre variabili dinamiche sono tutte "fisiche".

(II) La formulazione precedente è corretta, ma esteticamente sarebbe preferibile trattare le coordinate spaziali x^i e la coordinata temporale $x^0 \equiv t$ in un modo più simmetrico. Sarebbe quindi preferibile usare quattro variabili dinamiche, le x^μ, ma una di loro, o più in generale una loro combinazione, dovrà essere ridondante affinchè si possa avere l'equivalenza con l'azione precedente: questo è possibile se ci sono simmetrie locali (dette anche simmetrie di "gauge"). Questo si può fare nel seguente modo: indichiamo con $x^\mu(\tau)$ le variabili dinamiche che descrivono la linea di mondo percorsa dalla particella. Il parametro τ è semplicemente un parametro temporale arbitrario che parametrizza la linea di mondo della particella. L'azione che cerchiamo è geometricamente sempre la stessa, proporzionale al tempo proprio, e prende la forma

$$S_{II}[x^\mu(\tau)] = -m \int d\tau\ \sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu} \tag{28}$$

dove ora $\dot{x}^\mu = \frac{d}{d\tau} x^\mu$. Le equazioni del moto sono

$$\delta S_{II}[x^\mu] = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{d}{d\tau}\left(\frac{m\dot{x}^\mu}{\sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}}\right) = 0 \tag{29}$$

Le simmetrie rigide sono quelle generate dal gruppo di Poincarè

$$\delta x^\mu(\tau) = \omega^\mu{}_\nu x^\nu(\tau) + a^\mu \tag{30}$$

dove $\delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu{}_\nu$ identifica una trasformazione di Lorentz infinitesima e questo garantisce che il modello sia relativistico. In aggiunta c'è anche una simmetria di gauge

$$\delta x^\mu = \xi(\tau)\dot{x}^\mu(\tau) \tag{31}$$

dove il parametro infinitesimo $\xi(\tau)$ che genera la simmetria è locale, cioè dipende arbitrariamente dal parametro temporale τ. Sotto le trasformazioni generate dalla (31) l'azione è invariante a meno di termini di bordo

$$\delta S_{II}[x^\mu] = \int d\tau \; \frac{d}{d\tau}\Big(\xi L_{II}\Big) \sim 0 \tag{32}$$

dove L_{II} è la lagrangiana (l'integrando in (28)). Questa simmetria locale corrisponde geometricamente ad una riparametrizzazione della linea d'universo

$$\begin{array}{rcl} \tau & \longrightarrow & \tau' = f(\tau) \\ x^\mu(\tau) & \longrightarrow & x'^\mu(\tau') = x^\mu(\tau) \end{array} \tag{33}$$

che per trasformazioni infinitesime $\tau' = \tau - \xi(\tau)$ si riduce alla (31) (i matematici chiamano questa simmetria un diffeomorfismo della linea di mondo). Questa simmetria di gauge è necessaria per mostrare l'equivalenza con la formulazione I. L'equivalenza della formulazione II con la formulazione I è ottenibile operando una trasformazione di gauge (una riparametrizzazione della linea d'universo) per fissare una delle variabili dinamiche, cioè per "fissare il gauge". Infatti si può imporre la condizione ("scelta del gauge")

$$x^0(\tau) = \tau \tag{34}$$

cosicchè la variabile $x^0(\tau)$ non è piu dinamica: la sua evoluzione temporale è stata fissata dalla scelta del gauge. Questo riproduce l'azione I.

(III) Una terza formulazione è tramite l'uso di un "campo di gauge", cioè di una variabile dinamica la cui trasformazione di gauge contiene la derivata del parametro di simmetria locale (detto anche parametro di gauge). Nel caso specifico si usa il campo di gauge $e(\tau)$ detto einbein (dal tedesco "una gamba") e l'azione è data da

$$S_{III}[x^\mu(\tau), e(\tau)] = \int d\tau \; \frac{1}{2}(e^{-1}\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu - em^2) \tag{35}$$

La simmetria locale prende la forma

$$\begin{array}{rcl} \delta x^\mu & = & \xi \dot{x}^\mu \\ \delta e & = & \dfrac{d}{d\tau}(\xi e) \end{array} \tag{36}$$

che difatti comporta $\delta S_{III} = \int d\tau \; \frac{d}{d\tau}(\xi L_{III}) \sim 0$. Si noti che il campo di gauge e contiene la derivata del parametro locale ξ. Le simmetrie globali sono le ovvie trasformazioni di Poincarè

$$\begin{array}{rcl} \delta x^\mu(\tau) & = & \omega^\mu{}_\nu x^\nu(\tau) + a^\mu \\ \delta e = 0 & & \end{array} \tag{37}$$

Le equazioni del moto sono

$$\frac{\delta S[x,e]}{\delta e(\tau)} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad e^{-2}\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu + m^2 = 0 \tag{38}$$

$$\frac{\delta S[x,e]}{\delta x^\mu(\tau)} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \frac{d}{d\tau}(e^{-1}\dot{x}^\mu) = 0 \tag{39}$$

Per mostrare l'equivalenza con la formulazione II, risolviamo l'equazione algebrica (38) assumendo che l'einbein e sia diverso da zero e quindi invertibile

$$e = \pm \frac{1}{m}\sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu} \tag{40}$$

Sostituendo questa relazione in S_{III} si ottiene

$$S_{III}\left[x^\mu(\tau), e(\tau) = \pm\frac{1}{m}\sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}\right] = \mp m \int d\tau \ \sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu} \tag{41}$$

Scegliendo la soluzione con $e > 0$ si riottiene la formualzione II. La presenza dell'altra soluzione è un segnale dell'esistenza delle antiparticelle. Inoltre l'azione III è superiore alle precedenti in quanto include anche il caso di particella senza massa, basta porre $m = 0$ nell'azione.

(IV) Infine passiamo ad una quarta formulazione, equivalente alle precedenti ma utile per la quantizzazione canonica. È la formulazione hamiltoniana

$$S_{IV}[x^\mu(\tau), p_\mu(\tau), e(\tau)] = \int d\tau \ \left(p_\mu \dot{x}^\mu - \frac{e}{2}(p^\mu p_\mu + m^2)\right) \tag{42}$$

dove x^μ sono le coordinate della particella nello spazio-tempo, p_μ i momenti coniugati ed e l'einbein. La simmetria di gauge può essere scritta nella forma

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= \zeta p^\mu \\ \delta p_\mu &= 0 \\ \delta e &= \dot{\zeta} \end{aligned} \tag{43}$$

sotto cui $\delta S_{IV} = \int d\tau \ \frac{d}{d\tau}[\frac{\zeta}{2}(p^2 - m^2)] \sim 0$. Eliminando i momenti p_μ tramite le loro equazioni del moto algebriche

$$\frac{\delta S_{IV}}{\delta p_\mu} = \dot{x}^\mu - e p^\mu = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad p^\mu = e^{-1}\dot{x}^\mu \tag{44}$$

si ottiene la formulazione III (ed anche la simmetria di gauge è riprodotta con la relazione $\zeta = e\xi$).

Quantizzazione

Per quantizzare la particella relativistica conviene scegliere la formulazione IV e sfruttare la simmetria di gauge per fissare il gauge $e = 1$ (condizione possibile a meno di ostruzioni topologiche, trascurabili nel presente contesto). La quantizzazione è ottenuta elevando le variabili dinamiche classiche (x^μ, p_ν) ad operatori lineari $(\hat{x}^\mu, \hat{p}_\nu)$ agenti su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ e con regole di commutazione dedotte dalle parentesi di Poisson classiche

$$\{x^\mu, p_\nu\}_{PP} = \delta^\mu_\nu \qquad \longrightarrow \qquad [\hat{x}^\mu, \hat{p}_\nu] = i\hbar\delta^\mu_\nu \tag{45}$$

Uno vettore arbitrario dello spazio di Hilbert $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$ non descrive in generale uno stato fisico perchè occorre ricordarsi della equazione del moto del campo di gauge, $p^\mu p_\mu + m^2 = 0$. Questa equazione è usata come vincolo che seleziona gli stati fisici del sistema

$$(\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu + m^2)|\phi\rangle = 0 \tag{46}$$

Nel gauge $e = 1$ l'hamiltoniana è proporzionale al vincolo $H = \frac{1}{2}(p^2 + m^2)$ (evidente dalla (42)) e la corrispondente equazione di Schroedinger su stati fisici (che soddisfano la (46)) diventa

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial\tau}|\phi\rangle = \hat{H}|\phi\rangle = 0 \tag{47}$$

e dice che lo stato fisico $|\phi\rangle$ è indipendente da τ. La corrispondente funzione d'onda $\phi(x) = \langle x^\mu|\phi\rangle$ che descrive lo stato fisico è dunque indipendente dal parametro temporale τ e soddisfa la (46) che riconosciamo come l'equazione di Klein Gordon

$$(-\hbar^2\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\phi(x) = 0 \tag{48}$$

Dunque l'equazione di Klein Gordon è stata ottenuta quantizzando la particella relativistica. Ci si riferisce a questa quantizzazione come alla "prima quantizzazione" perchè questa equazione è reinterpretata come una teoria classica di un campo scalare relativistico che viene poi quantizzato (per cui si parla della quantizzazione di teorie di campo classiche come di "seconda quantizzazione"). Reintroducendo la velocità della luce c con considerazioni dimensionali l'equazione di Klein Gordon si scrive nel modo

$$\Big(\partial_\mu\partial^\mu - \mu^2\Big)\phi(x) = 0 \tag{49}$$

dove $\mu = \frac{mc}{\hbar}$ è l'inverso della lunghezza d'onda Compton $\lambda = \frac{\hbar}{mc}$ associata alla particella relativistica.