Relatività Ristretta

(Appunti per il corso di Fisica Nucleare e Subnucleare 2011/12)

Fiorenzo Bastianelli

1 Introduzione

Agli inizi del 1900 erano conosciute due grandi teorie fisiche:
1) la meccanica di Galileo e Newton,
2) l'elettrodinamica classica sintetizzata dalle equazioni di Maxwell.

Però queste teorie non sembravano essere compatibili a vicenda. La meccanica di Galileo e Newton è invariante per cambi di sistema di riferimento inerziali definiti da "trasformazioni galileiane". Un sistema di riferimento inerziale K permette di misurare la posizione $\vec{x}$ ed il tempo t, per cui possiamo indicare tale sistema in modo schematico con $K = \{t, \vec{x}\} = \{t, x^1, x^2, x^3\} = \{t, x, y, z\}$. Similmente possiamo considerare un secondo sistema di riferimento inerziale ed indicarlo con $K' = \{t', \vec{x}'\}$.

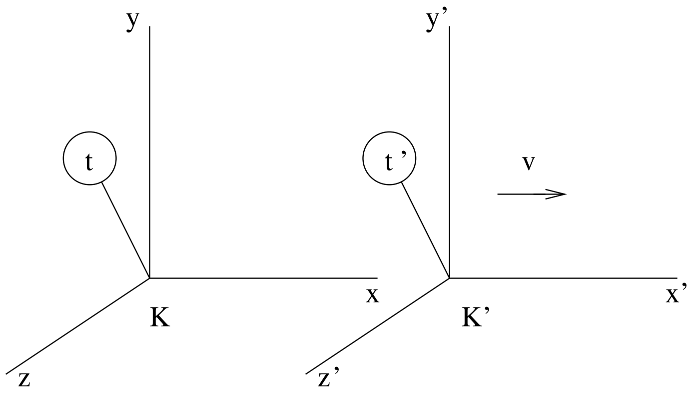

Figure 1: I sistemi di riferimento inerziali K e K' con i rispettivi orologi per la misura del tempo.

Se il secondo sistema K' si muove con velocità v diretta lungo l'asse x rispetto a K, la trasformazione galileiana che collega le coordinate dei due sistemi di riferimento inerziali è data da

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \qquad (1)$$

L'equazione $t' = t$ ci dice che esiste un tempo assoluto, indipendente dallo stato di moto dell'osservatore.

Le equazioni dell'elettrodinamica non sono invarianti per questa trasformazione galileiana, ma risultano essere invarianti per la seguente trasformazione di Lorentz

$$\begin{aligned} t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \tag{2}$$

dove c indica la velocità della luce (interpretata come una costante fondamentale della natura). In questo caso il tempo è relativo al sistema di riferimento. In particolare, il concetto di simultaneità perde il suo carattere assoluto, ma ha un significato preciso solo all'interno di uno specifico sistema di riferimento.

Fu Einstein che riuscì a chiarire che le proprietà di simmetria dell'elettrodinamica erano quelle corrette. Egli concluse che occorreva modificare la meccanica di Galileo e Newton in una <u>meccanica relativistica</u> per renderla compatibile con l'elettrodinamica e quindi con le corrette leggi di trasformazione che collegano i vari sistemi di riferimento inerziali.

I punti chiave su cui si basa la meccanica relativistica sono:

- Le leggi fisiche sono identiche in tutti i sistemi di riferimento inerziali.
- La "velocità della luce" è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Queste due proprietà fondamentali della meccanica relativistica sono state e continuano ad essere verificate sperimentalmente e possono essere usate per derivare le trasformazioni di Lorentz e le loro proprietà generali. (N.B. "velocità della luce" = velocità limite di propagazione delle interazioni).

2 Trasformazioni di Lorentz e spazio-tempo di Minkowski

La trasformazione di Lorentz in eq. (2) mostra che il tempo non è più assoluto, ma deve essere considerato un parametro relativo al sistema di riferimento scelto, come le coordinate spaziali. Un esercizio utile è quello di verificare che in effetti la luce ha la stessa velocità nei due sistemi di riferimento K e K'. Per comodità è utile riportare anche le trasformazioni inverse derivabili immediatamente dalla (2) (evidentemente per ottenerle è sufficiente scambiare le coordinate di K con quelle di K' e cambiare $v \to -v$)

$$\begin{aligned} t &= \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned} \tag{3}$$

Ricordiamo anche la seguenti definizioni usate molto spesso

$$\beta \equiv \frac{v}{c}, \qquad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{4}$$

che possono assumere i valori $0 \leq \beta < 1$ e $1 \leq \gamma < \infty$.

Esercizio 1: *Un lampo di luce emesso al tempo $t = 0$ nel punto $x = y = z = 0$ del sistema K descrive un fronte d'onda sferico di coordinate (t, x, y, z) identificato dalla relazione $-c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0$. Usando le trasformazioni di Lorentz, verificare che nel sistema K' il fronte di onda sferico assume la forma $-c^2t'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0$, per cui la luce si propaga con la stessa velocità c.*

L'esercizio ci fa apprezzare come "ct" sia essenzialmente una nuova coordinata del sistema di riferimento ed abbia le dimensioni di una lunghezza

$$(ct, x, y, z,) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \vec{x}) = x^\mu. \tag{5}$$

Le quattro coordinate x^μ costituiscono le coordinate dello spazio-tempo relativistico, detto spazio di Minkowski, e x^μ è talvolta chiamato quadrivettore posizione. Si dice anche che un quadrivettore posizione identifica un "evento" dello spazio-tempo. L'esercizio precedente ci fa anche apprezzare come la quantità

$$s^2 \equiv -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2 \tag{6}$$

sia invariante per trasformazioni di Lorentz (l'esercizio chiede di mostrarlo per $s^2 = 0$, ma la dimostrazione è identica anche per $s^2 \neq 0$). La grandezza s^2 è uno scalare: significa che è un invariante per trasformazioni di Lorentz e dunque può essere calcolato a scelta con le coordinate x^μ o con le coordinate $x^{\mu\prime}$ (proprio come il modulo quadrato di un vettore tridimensionale che può essere calcolato con il teorema di Pitagora usando le componenti del vettore lungo gli assi cartesiani del sistema di riferimento oppure usando le componenti del vettore lungo assi cartesiani ruotati rispetto a quelli precedenti). Nel caso di punti dello spazio-tempo collegati dalla propagazione della luce si ha che $s^2 = 0$, come si vede dall'esercizio 1. In generale si può avere la seguente classificazione

$$\begin{array}{ll} s^2 < 0 & \text{(distanze di tipo tempo)} \\ s^2 = 0 & \text{(distanze di tipo luce)} \\ s^2 > 0 & \text{(distanze di tipo spazio).} \end{array}$$

Questa classificazione è utile perché non dipende dalla scelta del sistema di riferimento inerziale: è una classificazione invariante (vedi fig. 2).

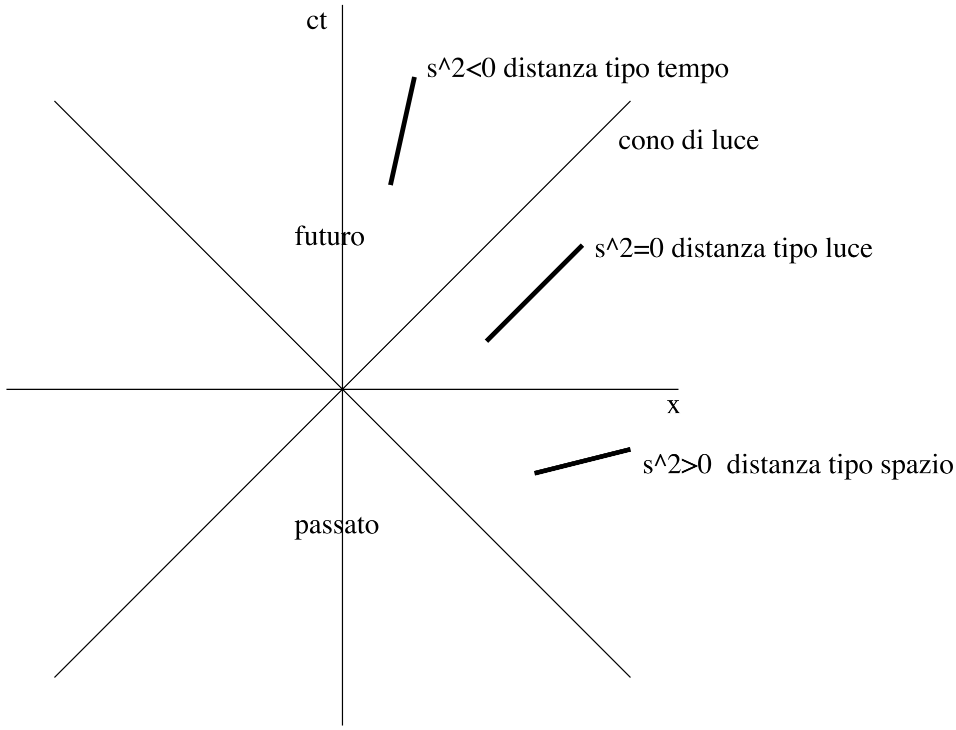

Figure 2: `Spazio di Minkowski: sono mostrate le coordinate` (ct, x) `mentre le coordinate` y `e` z `non sono riportate in figura. È evidente il cono di luce rispetto all'origine` $(0,0)$`: la parte superiore interna al cono di luce descrive il futuro del punto` $(0,0)$`, mentre la parte inferiore ne descrive il suo passato. Inoltre sono riportati dei segmenti le cui lunghezze Minkowskiane sono di tipo tempo, luce e spazio.`

3 Alcune conseguenze

Studiamo alcune conseguenze della teoria della relatività ristretta: *i*) somma delle velocità, *ii*) contrazione delle lunghezze, *iii*) dilatazione dei tempi.

i) Somma delle velocità

Consideriamo una particella con velocità v_x diretta lungo x nel sistema di riferimento K, come in figura 3. Dalla definizione di velocità nei sistemi K e K' sappiamo che

$$v_x = \frac{dx}{dt} \ , \qquad v'_x = \frac{dx'}{dt'} \ . \tag{7}$$

Dalla trasformazione di Lorentz (2) segue che

$$dx' = \gamma(dx - vdt) \ , \qquad dt' = \gamma(dt - \frac{v}{c^2}dx)$$

da cui

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - vdt)}{\gamma(dt - \frac{v}{c^2}dx)} = \frac{v_x - v}{1 - \frac{vv_x}{c^2}} \ . \tag{8}$$

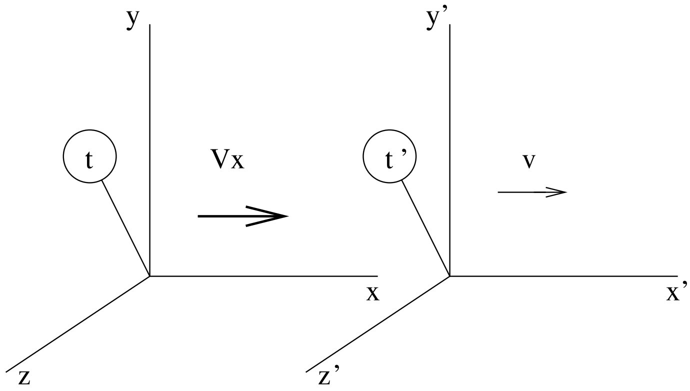

Figure 3: `Particella con velocità` v_x `nel sistema` K.

N.B. Se $v_x = c$ allora si trova che anche $v'_x = c$.

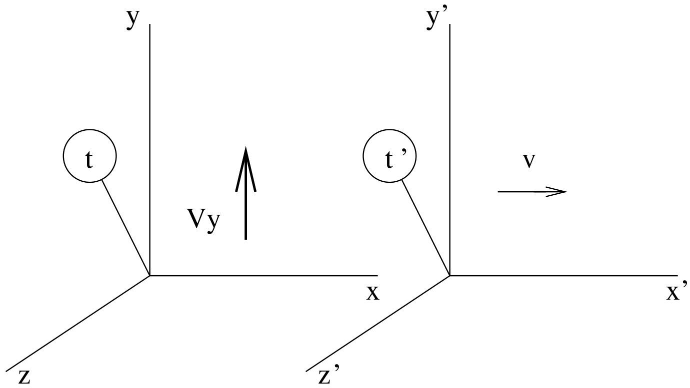

Figure 4: `Particella con velocità` v_y `nel sistema` K.

Si può procedere in modo simile anche nel caso di una particella con velocità diretta lungo l'asse y, come in figura 4. Infatti per definizione $v_y = \frac{dy}{dt}$ e $v'_y = \frac{dy'}{dt'}$. Dalla trasformazione di Lorentz (2) segue che

$$dy' = dy \ , \qquad dt' = \gamma(dt - \frac{v}{c^2}dt)$$

da cui

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma(dt - \frac{v}{c^2}dx)} = \frac{v_y}{\gamma(1 - \frac{vv_x}{c^2})} = \frac{v_y}{1 - \frac{vv_x}{c^2}}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{9}$$

ii) Contrazione delle lunghezze

Supponiamo che nel sistema K' ci sia un regolo di lunghezza $L_0 = x'_2 - x'_1$ in quiete, vedi figura 5. Quindi la sua lunghezza vista nel sistema di riferimento a riposo con il regolo stesso è L_0. Nel sistema K il regolo si muove con velocità v, per cui occorrerà misurare la posizione degli estremi del regolo in modo simultaneo ad un tempo fissato t per calcolare la lunghezza L

$$L = x_2(t) - x_1(t). \tag{10}$$

Si ricordi infatti che la simultaneità è un concetto relativo al sistema di riferimento poiché il tempo lo è. Ora possiamo chiederci: come sono collegate L ed L_0? Dalle trasformazioni di Lorentz (2) si ottiene

$$L_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2(t) - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{x_1(t) - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{x_2(t) - x_1(t)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{L}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \ . \tag{11}$$

Dunque la lunghezza vista nel sistema di riferimento in cui l'oggetto è in moto con velocità v risulta contratta

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \ . \tag{12}$$

o, equivalentemente, $L = L_0/\gamma$. In generale $v \leq c$, per cui $\gamma \geq 1$ e quindi $L \leq L_0$.

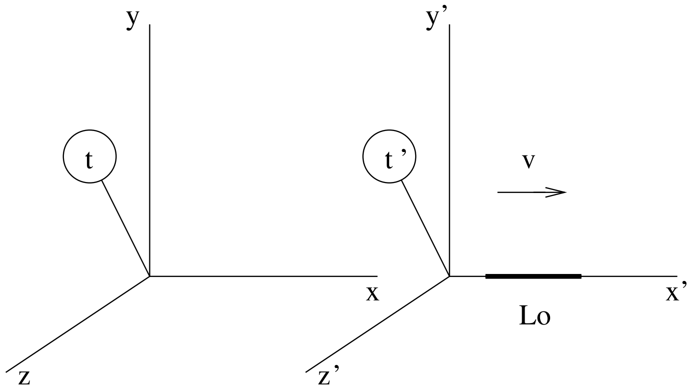

Figure 5: Un oggetto di lunghezza L_0 posizionato lungo l'asse x' del sistema K'.

ii) Dilatazione dei tempi

Consideriamo due eventi nel sistema K' che accadono nello stesso punto spaziale, $E_1 = (t'_1, x', y', z')$ ed $E_2 = (t'_2, x', y', z')$. Questi due eventi sono separti da un intervallo temporale $T_0 = t'_2 - t'_1$. Ora l'intervallo di tempo misurato nel sistema K è dato da

$$T = t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 + \frac{v}{c^2}x') - \gamma(t'_1 + \frac{v}{c^2}x') = \gamma(t'_2 - t'_1) = \gamma T_0 \ . \tag{13}$$

Dunque $T \geq T_0$ per cui si parla di dilatazione dei tempi. Il tempo che scorre nel sistema di riferimento in quiete con l'oggetto in questione è detto tempo proprio ed è spesso indicato con τ. È il tempo più breve possible per il fenomeno in questione, poiché in tutti gli altri sistemi di riferimento questo tempo risulta necessariamente dilatato.

Possiamo riscrivere il tempo proprio infinitesimo per un'oggetto solidale con il sistema di riferimento K' (cioè a riposo nel sistema K') in modo invariante nel seguente modo

$$d\tau \equiv dt' = dt \ \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{dt^2 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2}} = \sqrt{-\frac{ds^2}{c^2}} \tag{14}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la definizione già introdotta di lunghezza minkowskiana quadrata che infatti è negativa per distanze di tipo tempo. Questa lunghezza è un invariante di Lorentz, e quindi facilmente calcolabile in qualunque sistema di riferimento. Dalla relazione (14) risulta che anche il tempo proprio è un invariante relativistico.

4 Formalismo tensoriale

Possiamo scrivere la trasformazione di Lorentz (2) come

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{15}$$

dove

$$\beta \equiv \frac{v}{c}, \qquad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \,. \tag{16}$$

Si noti che per sistemi di riferimento fisicamente realizzabili si ha $0 \leq \beta < 1$ e $1 \leq \gamma < \infty$. Queste trasformazioni possono essere riscritte in modo compatto usando varie notazioni

$$x^{\mu\prime} = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \tag{17}$$

$$x^{\mu\prime} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \tag{18}$$

$$x' = \Lambda x \tag{19}$$

dove Λ indica la matrice della trasformazione di Lorentz riportata in (15) e $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ i corrispondenti elementi di matrice. Si noti che in (18) è stata usata la convenzione di Einstein, per cui indici ripetuti sono considerati automaticamente sommati su tutti i loro possibili valori (in questo caso l'indice $\nu = 0, 1, 2, 3$). La notazione matriciale (19) è comoda per fare velocemente dei calcoli quando si hanno solo vettori e matrici.

Nota tecnica: Si noti che $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ indica, al variare di μ e ν, gli elementi della matrice Λ, ed in particolare indica l'elemento in riga μ ed in colonna ν, come esemplificato da

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \Lambda^{0}{}_{0} & \Lambda^{0}{}_{1} & \Lambda^{0}{}_{2} & . \\ \Lambda^{1}{}_{0} & \Lambda^{1}{}_{1} & \Lambda^{1}{}_{2} & . \\ \Lambda^{2}{}_{0} & \Lambda^{2}{}_{1} & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix} \tag{20}$$

Dunque il primo indice (posto convenzionalmente in alto) indica l'indice di riga ed il secondo indice (posto convenzionalmente in basso) indica l'indice di colonna. Nel prodotto di due matrici, $A = BC$, l'elemento $A^{\mu}{}_{\nu}$ è dato dal prodotto vettoriale della riga μ di B con la colonna ν di C, e quindi da

$$A^{\mu}{}_{\nu} = B^{\mu}{}_{\lambda} C^{\lambda}{}_{\nu} \tag{21}$$

dove la somma in λ (indice ripetuto e quindi sommato) produce il prodotto vettoriale descritto sopra. In altre applicazioni, ad esempio nella descrizione delle rotazioni, non è necessario distinguere tra indici in alto ed indici in basso, ad esempio la una matrice di rotazione R in uno spazio tridimensionale può essere indicata da R^{ij}, con $i, j =, 1, 2, 3$. Il prodotto di matrici $R = PQ$ è descritto dagli elementi di matrice $R^{ij} = P^{ik} Q^{kj}$ (indice k ripetuto due volte e quindi sommato automaticamente da 1 a 3). Infine si noti che il trasposto R^T di R ha elementi di matrice $(R^T)^{ij} = R^{ji}$, e ad esempio il prodotto $U = R^T S$ è descritto da $U^{ij} = (R^T)^{ik} S^{kj} = R^{ki} S^{kj}$.

Il quadrato della distanza minkowskiana s^2, che come abbiamo visto è un invariante di Lorentz, può essere scritto nei modi seguenti

$$
\begin{aligned}
s^2 = -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2 &= \begin{pmatrix} ct & x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \\
&= x^T \eta \, x = \sum_{\mu=0}^{3} \sum_{\nu=0}^{3} x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\nu = x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\nu = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \qquad (22)
\end{aligned}
$$

dove si è introdotta la <u>metrica di Minkowski</u>, cioè la matrice $\eta_{\mu\nu}$ definita sopra, che ci permette di valutare il modulo quadro dei quadrivettori. Questo quadrato della lunghezza minkowskiana generalizza il concetto di modulo quadro di un vettore in spazi euclidei.

In generale le trasformazioni di Lorentz sono tutte quelle che lasciano invariata la distanza minkowskiana. Vediamo di esprimere questa definizione in equazioni. Usando la notazione matriciale

$$
\begin{aligned}
s^2 &= x^T \eta \, x \qquad \text{(definizione del quadrato della distanza)} \\
x' &= \Lambda \, x \qquad \text{(trasformazione di Lorentz arbitraria)} \qquad (23)
\end{aligned}
$$

per cui

$$s^2 = s'^2 \quad \Rightarrow \quad x^T \eta \, x = x'^T \eta \, x' = x^T \Lambda^T \eta \, \Lambda \, x \quad \Rightarrow \quad \Lambda^T \eta \, \Lambda = \eta \; . \qquad (24)$$

Dunque tutte le trasformazioni di Lorentz possibili sono quelle definite da matrici Λ tali che

$$\Lambda^T \eta \, \Lambda = \eta \qquad (25)$$

dove η è la metrica di Minkowski. In notazione tensoriale questa equazione si scrive come

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta = \eta_{\alpha\beta} \; . \qquad (26)$$

Esercizio 2: *Verifcare che la matrice in (15) soddisfa la relazione (25).*

L'analisi della proprietà fondamentale (25) che caratterizza il gruppo di Lorentz permette di dedurre che tale gruppo, cioè l'insieme di tutte le matrici che definiscono trasformazioni di Lorentz (si dimostri che tale insieme soddisfa agli assiomi di definizione di un gruppo), può essere parametrizzato da 6 variabili: 3 angoli che definiscono la rotazione degli assi cartesiani spaziali più le 3 componenti della velocità $\vec{v}$ relativa tra i due sistemi di riferimento inerziali.

La posizione degli indici in alto o in basso non è arbitraria, ma ha un significato ben preciso. Il quadrivettore posizione x^μ ha l'indice in alto, la metrica di Minkowski ha due indici in basso $\eta_{\mu\nu}$, gli elementi di matrice di una trasformazione di Lorentz sui quadrivettori x^μ ha l'indice di riga in alto e l'indice di colonna in basso, $\Lambda^\mu{}_\nu$. Partendo da queste definizioni, risulta poi utile definire un quadrivettore con l'indice in basso ("quadrivettore covariante") come

$$x_\mu \equiv \eta_{\mu\nu} x^\nu$$

da cui segue che si può riottenere il quadrivettore con l'indice in alto ("quadrivettore controvariante") come

$$x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu \; , \qquad \eta^{\mu\nu} \equiv (\eta^{-1})^{\mu\nu} \qquad (27)$$

Queste definizioni sono autoconsistenti

$$x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu = \eta^{\mu\nu}(\eta_{\nu\lambda} x^\lambda) = (\eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\lambda}) x^\lambda = \delta^\mu{}_\lambda x^\lambda = x^\mu \tag{28}$$

dove nel calcolo si è usata la delta di Kronecker $\delta^\mu{}_\lambda$ che corrisponde alle componenti della matrice identità (ricordare la convenzione di sommatoria di Einstein e notare che l'equazione matriciale $\eta^{-1}\eta = I$, dove I è la matrice identità, si scrive in componenti come $\eta^{\mu\lambda}\eta_{\lambda\nu} = \delta^\mu{}_\nu$. Similmente $Ix = x$ si scrive in componenti come $\delta^\mu{}_\nu x^\nu = x^\mu$). Usando la definizione di x_μ si può anche riscrivere la (22) come

$$s^2 = x_\mu x^\mu \ . \tag{29}$$

L'operatore di derivata $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ si comporta come un 4-vettore con l'indice in basso. Questo si può facilmente verificare calcolando la derivata dell'invariante s^2

$$\partial_\mu s^2 \equiv \frac{\partial s^2}{\partial x^\mu} = 2 x_\mu \ . \tag{30}$$

In generale si definiscono scalari, quadrivettori e quadritensori (o più brevemente vettori e tensori) quantità che si trasformano in modo ben preciso per trasformazioni di Lorentz

$$\begin{array}{rcll} s' & = & s & \text{(scalare)} \\ x^{\mu\prime} & = & \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu & \text{(quadrivettore)} \\ F^{\mu\nu\prime} & = & \Lambda^\mu{}_\lambda \Lambda^\nu{}_\rho F^{\lambda\rho} & \text{(quadritensore di rango due)} \end{array} \tag{31}$$

Esempio di uno scalare è la distanza Minkowskiana, di un vettore il quadrivettore coordinata o come vedremo più avanti il quadrimpulso, di un tensore a due indici il tensore campo elettromagnetico $F^{\mu\nu}$ (in unità gaussiane o in quelle di Heaviside–Lorentz)

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} . \tag{32}$$

Un modo di interpretare la (29) è dire che la trasformazione del quadrivettore x^μ è compensata dalla trasformazione del quadrivettore x_μ , per cui la "contrazione" degli indici in $x_\mu x^\mu$ produce uno scalare. Similmente dati vettori e tensori si deduce facilmente che ad esempio $A_\mu B_\nu F^{\mu\nu}$ è uno scalare, $B_\nu F^{\mu\nu}$ è uno quadrivettore controvariante, etc. In generale le posizioni degli indici in grandezze tensoriali indicano le proprietà di trasformazione sotto trasformazioni di Lorentz, ed indici contratti possono essere ignorati in quanto si comportano come uno scalare.

Esercizio 3: *Verificare che le equazioni di Maxwell si possono scrivere come ($\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$)*

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -J^\nu \tag{33}$$

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0 \tag{34}$$

Si noti che se la sorgente J^μ si trasforma come un quadrivettore, allora è immediato verificare l'invarianza relativistica delle equazioni di Maxwell scritte in questa forma. Verificare inoltre che il secondo set di equazioni di Maxwell, cioè le equazioni senza sorgenti in (34), sono risolte automaticamente dall'introduzione di un quadripotenziale vettore A_μ definendo

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu .$$

Calcolare infine il valore dello scalare $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$. Perchè è uno scalare?.

Le proprietà geometriche dettate dalla metrica di Minkowski definiscono lo spazio-tempo di Minkowski, che rappresenta appunto un modello del nostro spazio-tempo fisico. Una scelta di quattro assi "cartesiani" lungo cui misurare le distanze x^μ dello spazio-tempo rappresenta un sistema di riferimento inerziale. Alcune definizioni e proprietà dello spazio-tempo di Minkowski sono descritte e riportate nella figura 2.

Oltre alla possibilità di cambiare il sistema di riferimento con trasformazioni di Lorentz è possibile fare una diversa scelta dell' origine del sistema di riferimento. Ciò corrisponde alla possibilità di operare 3 traslazioni spaziali ed 1 traslazione temporale. Quando si aggiunge questa ulteriore invarianza alle trasformazioni di Lorentz si ottiene un gruppo totale di trasformazioni a dieci parametri detto gruppo di Poincarè, sotto cui un punto dello spazio tempo si trasforma nel modo seguente

$$x^{\mu\prime} = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \tag{35}$$

I dieci parametri corrispondono ai 4 parametri a^μ che definiscono una traslazione spazio-temporale più i 6 parametri del gruppo di Lorentz contenuti in una $\Lambda^\mu{}_\nu$ generica. Si può dimostarre che l'invarianza per traslazioni spazio-temporali è collegata alla conservazione dell'impulso e dell'energia. Similmente l'invarianza per trasformazioni di Lorentz comporta la conservazione di 6 quantità (che includono le 3 componenti del momento angolare).

5 Definizione relativistica di energia e momento: il quadrimomento

Nel paragrafo precedente abbiamo analizzato il concetto di tempo proprio. In un sistema di riferimento inerziale arbitrario un tempo proprio infinitesimo di un oggetto può essere scritto come

$$d\tau = dt\,\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{36}$$

dove v è la velocità dell'oggetto. Utilizzeremo questo parametro scalare per introdurre il concetto di quadrimomento (detto anche quadrimpulso) per particelle massive.

5.1 Particelle massive

Una particella nel suo moto descrive una traiettoria nello spazio-tempo. A questa traiettoria si dà il nome di linea di mondo (o linea d'universo), vedi figura 6. Possiamo parametrizzare questa linea di mondo utilizzando il tempo proprio τ.

Nel caso di una particella massiva che si muove di moto a velocità costante la linea d'universo è una linea retta che indichiamo con $x^\mu(\tau)$. La quadrivelocità è per definizione il seguente quadrivettore

$$u^\mu(\tau) \equiv \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} = \left(\frac{cdt(\tau)}{d\tau}, \frac{d\vec{x}(\tau)}{d\tau}\right) = \left(\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \tag{37}$$

dove si è fatto uso dell'equazione (36). Questa quantità è un quadrivettore poichè $d\tau$ è uno scalare e dx^μ un quadrivettore. È immediato calcolarne il modulo quadrato

$$u^\mu u_\mu = -(u^0)^2 + \vec{u}\cdot\vec{u} = -c^2 \tag{38}$$

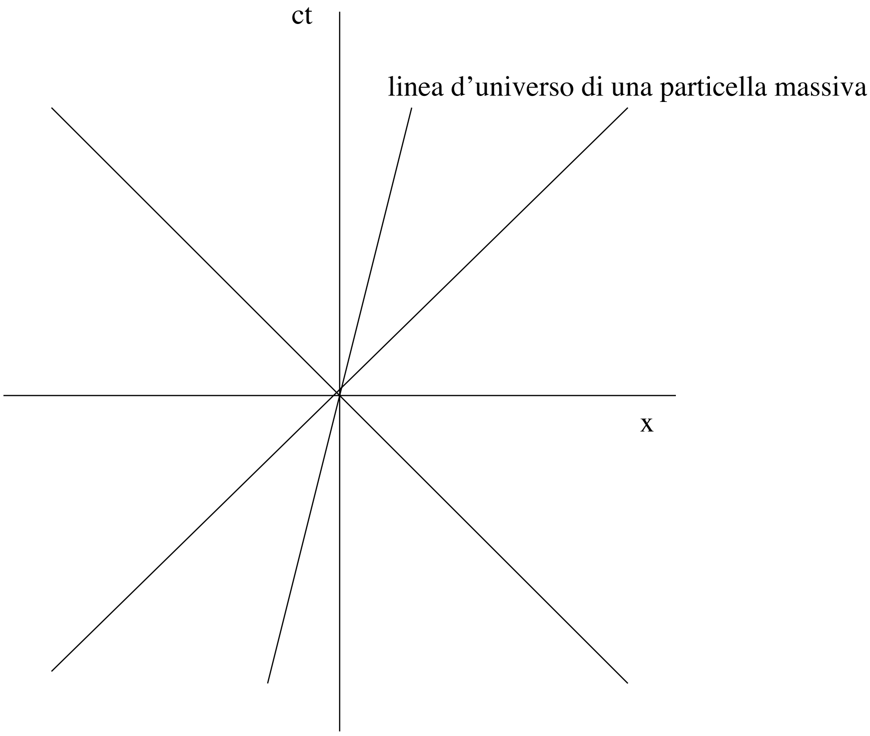

Figure 6: `La linea di universo di una particella massiva è contenuta all'interno del cono di luce.`

Poichè $u^\mu u_\mu$ è un invariante di Lorentz, per semplicità si sarebbe potuto effettuare il calcolo nel sistema di riferimento a riposo con la particella, in cui $u^\mu = (c, 0)$ come si evince dalla (37), e dunque $u^\mu u_\mu = -c^2$.

Il quadrimomento della particella è definito da

$$p^\mu = mu^\mu \tag{39}$$

dove m è la massa della particella. Questa massa è per definizione una proprietà scalare assegnata alla particella ed a volte è detta massa invariante, massa a riposo o massa propria per differenziarla da eventuali altre definizioni. Dunque anche p^μ è un quadrivettore ed il suo modulo quadro è facilmente calcolabile

$$p^\mu p_\mu = m^2 u^\mu u_\mu = -m^2 c^2 \tag{40}$$

Familiarizziamo un pò con questa definizione relativistica per vedere come le note definizioni non-relativistiche sono generalizzate nella meccanica relativistica

$$p^\mu = m\frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} = \left(mc\frac{dt(\tau)}{d\tau}, m\frac{d\vec{x}(\tau)}{d\tau}\right) = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right). \tag{41}$$

Abbiamo identificato la componente p^0 con l'energia E associata alla particella (diviso c per immediate considerazioni dimensionali), mentre le componenti spaziali sono identificate con la definizione relativistica del momento spaziale. Giustifichiamo queste identificazioni analizzando il limite non-relativistico $v \ll c$.

Energia E: dalla (41) si ottiene

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \; . \tag{42}$$

Per $v = 0$ si vede che la teoria della relatività assegna in modo naturale una energia a riposo proporzionale alla massa $E = mc^2$. Per $v \ll c$ possiamo sviluppare in serie di $\frac{v}{c}$ che è un numero piccolo rispetto ad 1

$$E = mc^2\Big(1-\frac{v^2}{c^2}\Big)^{-\frac{1}{2}} = mc^2\Big(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+...\Big) = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + ... \tag{43}$$

Questo ci fà vedere come la definizione non-relativistica di energia cinetica venga riprodotta nel limite di velocità basse rispetto a quella della luce. Alla luce di questo calcolo si può intuire la definizione appropriata di energia cinetica T nel caso relativistico

$$T = E - mc^2 \; . \tag{44}$$

Momento $\vec{p}$: dalla (41) si vede che nel limite $v \ll c$ si riottiene la definizione non-relativistica di momento lineare

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \rightarrow \qquad \vec{p} = m\vec{v} \; . \tag{45}$$

Si noti che particelle massive non possono raggiungere la velocità della luce: dovrebbero avere energia e momento infiniti! Dunque la velocità $v = c$ è una velocità limite teoricamente irraggiungibile per particelle massive, poichè nessun fenomeno fisico è in grado di cedere un'energia infinita ad una particella.

Queste definizioni relativistiche possono essere giustificate in maniera più rigorosa e derivate partendo da un principio d'azione che descriva la dinamica relativistica. L'azione corretta per una particella libera è proporzionale al tempo proprio integrato sulla linea di mondo della particella (così da garantire l'invarianza relativistica)

$$S[\vec{x}(t)] = -mc^2 \int dt \sqrt{1-\frac{\dot{\vec{x}}\cdot\dot{\vec{x}}}{c^2}} \tag{46}$$

dove naturalmente $\vec{v} = \dot{\vec{x}}$ descrive la velocità della particella. Poiché la corrispondente lagrangiana $L = -mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{\vec{x}}\cdot\dot{\vec{x}}}{c^2}}$ non dipende dalla posizione $\vec{x}$, ma solo dalla velocità $\dot{\vec{x}}$, il momento coniugato

$$\vec{p} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = \frac{m\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{47}$$

è conservato (come conseguenza delle equazioni di Eulero-Lagrange). Inoltre anche l'hamiltoniana

$$H = \vec{p}\cdot\dot{\vec{x}} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{48}$$

che coincide con l'energia è conservata.

5.2 Particelle con massa nulla

Abbiamo visto che particelle massive non possono raggiungere esattamente la velocità della luce. Però possono esistere particelle che viaggino alla velocità della luce purchè abbiano massa nulla. Questa interpretazione è consistente con la relatività ristretta. Infatti la relatività ristretta prevede che particelle che vanno alla velocità della luce siano costrette a viaggiare sempre a quella velocità, che infatti è necessariamente la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Questa proprietà ci dice che non si può trovare un sistema di riferimento a riposo con particelle di massa nulla, e quindi non esiste il concetto di tempo proprio per tali particelle. Infatti dalla (14) si vede che il presunto tempo proprio dovrebbe essere nullo, e quindi sarebbe un tempo che non può scorrere e non può essere utilizzato per parametrizzare la linea d'universo di queste particelle. Infatti questa linea d'universo è una linea di tipo luce e deve necessariamente giacere sul cono di luce della particella stessa. In ogni caso possiamo ugualmente assegnare un quadrimomento alla particella con massa nulla. In tal caso l'invariante relativistico $p^\mu p_\mu$ si annulla e può essere utilizzato per ricavare una relazione tra energia ed impulso

$$p^\mu p_\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{E^2}{c^2} + \vec{p} \cdot \vec{p} = 0 \quad \Rightarrow \quad E = |\vec{p}|c\,. \tag{49}$$

Questa formula è valida approssimativamente anche per particelle che viaggiano a velocità molto vicine a quella della luce e che di conseguenza hanno energie molto maggiori della loro massa a riposo, $E \gg mc^2$ (particelle ultra-relativistiche. Si noti che il concetto di particella ultra-relativistica dipende dal sistema di riferimento scelto). Vediamo di derivare questa affermazione. Abbiamo visto che per una particella di massa m

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \tag{50}$$

da cui si ottiene la relazione

$$\vec{p} = \frac{E\vec{v}}{c^2}\,. \tag{51}$$

Nel limite di $v \to c$ si ottiene

$$|\vec{p}| = \frac{E}{c} \tag{52}$$

che coincide con quanto ottenuto in eq. (49) per particelle a massa nulla.

Concludiamo questa sezione ricordando che non è stato mai possibile interpretare in modo consistente, all'interno di teorie fisiche, i tachioni (ipotetiche particelle che viaggiano a velocità maggiori di c).

5.3 Legge di conservazione del quadrimomento

La definizione data sopra di quadrimomento per particelle massive e particelle senza massa è appropriata in quanto è proprio questa quantità che soddisfa a specifiche leggi di conservazione. Infatti si può dimostare che: *per interazioni relativistiche invarianti per traslazioni spaziali e temporali si conserva il quadrimomento totale.*

In particolare il quadrimomento si conserva per sistemi isolati in cui avvengono processi di urto regolati dalle interazioni fondamentali. Per descrivere processi di urto tra due particelle che vanno in due particelle, come in figura 7, risulta utile l'uso delle variabli di Mandelstam

$$s = -(p_1 + p_2)^2$$

$$
\begin{aligned}
t &= -(p_2 - p_3)^2 \\
u &= -(p_1 - p_3)^2
\end{aligned}
\tag{53}
$$

dove nel lato destro si intende il modulo quadrato minkowskiano dei rispettivi quadrivettori. Il quadrivettore p_n è il quadrimomento delle particella n-esima con massa m_n ed è orientato come in figura 7. Queste variabili di Mandelstam non sono indipendenti, poichè si può mostare che (ponendo per semplicità $c = 1$)

$$
s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 \tag{54}
$$

dove $(p_1)^2 = -m_1^2$, $(p_2)^2 = -m_2^2$, etc.. Se nel processo di urto sono prodotte ulteriori particelle le variabili t ed u perdono in genere il loro significato immediato, mentre la variabile s continua ad essere utile ($\sqrt{s}$ corrisponde all' energia totale presente nel sistema di riferimento 'centro di massa").

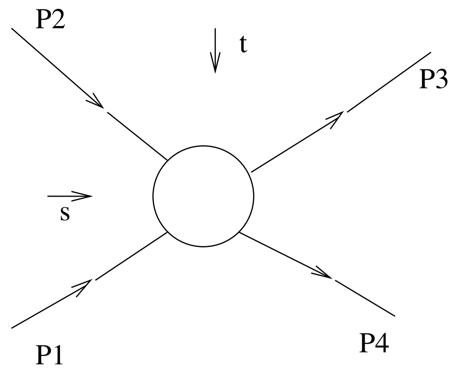

Figure 7: `Processo di urto. Sono rappresentate le variabili di Mandelstam` s `e` t.

Esercizio 4: *Un muone di energia $E = 10$ GeV è prodotto nell'atmosfera dai raggi cosmici. La vita media del muone è $\tau = 2.2\ 10^{-6}s$ e la sua massa $m = 106\ MeV/c^2$. Stimare la distanza che il muone può percorrere (nel sistema di riferimento solidale con la terra).*

Esercizio 5: *Verifcare l'equazione (54). Suggerimento: utilizzare la conservazione del quadrimpulso totale.*

Esercizio 6: *Verificare che nell' urto tra una particella e la sua antiparticella $\sqrt{s}$ rappresenta l'energia massima disponibile nel sistema di riferimento centro di massa per la creazione di nuove particelle.*

Esercizio 7: *Calcolare l'energia cinetica minima che un protone deve avere per interagire con un altro protone fermo e generare nell'urto una coppia protone–antiprotone:*

$$
p + p \to p + p + p + \bar{p}
$$

La massa del protone (e dell'antiprotone) può essere appossimata a $m_p = 1\ GeV/c^2$.

Esercizio 8: *Una particella di massa M a riposo decade in due particelle di massa m_1 e m_2. Utilizzando la conservazione del quadrimpulso totale calcolare le energie delle particelle finali.*

Esercizio 9: *Utilizzare le leggi di trasformazione (31) per il campo elettromagnetico definito in (32) per derivare le seguenti leggi di trasformazione per cambio del sistema di riferimento specificato dalla* *trasformazione in (15)*

$$\begin{array}{ll} E_x{}' = E_x & B_x{}' = B_x \\ E_y{}' = \gamma(E_y - \beta B_z) & B_y{}' = \gamma(B_y + \beta E_z) \\ E_z{}' = \gamma(E_z + \beta B_y) & B_z{}' = \gamma(B_z - \beta E_y). \end{array} \tag{55}$$

6 Trasformazioni discrete e gruppo di Lorentz proprio ed ortocrono

Il gruppo di Lorentz è spesso indicato con $O(3,1)$

$$O(3,1) = \{\Lambda, \text{matrici reali } 4 \times 4 \mid \Lambda^T \eta\, \Lambda = \eta\}$$

che generalizza ad uno spaziotempo con tre direzioni spaziali ed una temporale il gruppo ortogonale delle rotazioni spaziali

$$O(3) = \{R, \text{matrici reali } 3 \times 3 \mid R^T R = I\}\ .$$

Questi sono gruppi di Lie, con cui si intendono gruppi che dipendono in modo continuo da alcuni parametri. Per il gruppo di Lorentz questi parametri possono essere relazionati alle tre componenti della velocità relativa $\vec{v}$ con cui i due sistemi di riferimento si muovono in moto relativo uniforme, ed a tre angoli $\vec{\theta}$ che descrivono una eventuale rotazione degli assi spaziali. È quindi un gruppo a sei parametri. Se all'annullarsi di questi parametri si ha la trasformazione identità, variando in modo continuo questi parametri possiamo raggiungere tutte le matrici di Lorentz connesse all'identità. Tutte queste matrici, che per convenienza possiamo indicare con $\Lambda(\vec{v},\vec{\theta})$, hanno determinante $\det \Lambda(\vec{v},\vec{\theta}) = 1$. Infatti si deduce facilmente, calcolando il determinante della relazione definente le matrici del gruppo di Lorentz, che

$$\det(\Lambda^T \eta\, \Lambda) = \det(\eta) \qquad \to \qquad \det(\Lambda) = \pm 1$$

e poiché la matrice identità ha determinante unitario, per continuità $\det \Lambda(\vec{v},\vec{\theta}) = 1$. Queste matrici formano un sottogruppo, denominato *gruppo di Lorentz proprio ed ortocrono* e spesso indicato con $SO^{\uparrow}(3,1)$. Per invarianza relativistica solitamente si intende solo l'invarianza per trasformazioni appartenenti a questo sottogruppo.

Esistono poi trasformazioni discrete, inversione spaziale (o parità) ed inversione temporale, che non sono connesse all'identità, ma appartengono al gruppo di Lorentz $O(3,1)$.

L'inversione spaziale (indicata con P) è definita da

$$x^{\mu\prime} = P^\mu{}_\nu x^\nu\ , \qquad P^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

che evidentemente cambia l'orientamento degli assi spaziali. Appartiene al gruppo di Lorentz ($P^T \eta P = \eta$) ed ha $\det P = -1$.

Similmente l'inversione temporale (indicata con T) è definita da

$$x^{\mu\prime} = T^\mu{}_\nu x^\nu\ , \qquad T^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cambia la direzione dell'asse temporale, appartiene al gruppo di Lorentz ($T^T\eta T = \eta$) ed ha $\det T = -1$.

Componendo le matrici del gruppo di Lorentz proprio ed ortocrono $SO^{\uparrow}(3,1)$ con le trasformazioni discrete P e T si ottengono gli elementi delle parti disconnesse dell'intero gruppo di Lorentz $O(3,1)$ che in totale ha quattro componenti disconnesse.

7 Appendice

Equazioni di Maxwell

Svolgiamo esplicitamente l'esercizio n.3 facendo uso delle unità di misura di Heaviside-Lorentz con $c = 1$. Consideriamo le quattro equazioni di Maxwell con sorgenti

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -J^\nu \tag{56}$$

dove

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}, \qquad J^\mu = (\rho, \vec{J}) \tag{57}$$

e valutiamo l'equazione per i diversi valori dell'indice libero $\nu = (0, i)$ con $i = (1, 2, 3)$.

Per $\nu = 0$ abbiamo

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu 0} &= \partial_0 F^{00} + \partial_i F^{i0} = \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = -(\partial_1 E^1 + \partial_2 E^2 + \partial_3 E^3) \\ &= -\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -J^0 = -\rho \end{aligned} \tag{58}$$

dove naturalmente $E^1 \equiv E_x, E^2 \equiv E_y$, etc.. Riconosciamo questa come l'equazione di Gauss

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho\ .$$

Per $\nu = 1$ abbiamo

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu 1} &= \partial_0 F^{01} + \partial_i F^{i1} = \partial_0 E^1 + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} = \partial_t E^1 - \partial_2 B^3 + \partial_3 B^2 \\ &= (\partial_t \vec{E} - \vec{\nabla}\times\vec{B})^1 = -J^1 \end{aligned} \tag{59}$$

che corrisponde alla prima componente dell'equazione vettoriale

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \partial_t\vec{E} = \vec{J}\ .$$

Un calcolo simile con $\nu = 2, 3$ genera le altre componenti di questa equazione vettoriale.

Analogamente si può procedere con le equazioni di Maxwell senza sorgenti

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0 \tag{60}$$

dove, abbassando gli indici con le metrica di Minkowski, si ha

$$F_{\mu\nu} = \eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\sigma}F^{\lambda\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ E^2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ E^3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{61}$$

Valutando l'eq. (60) con $(\mu, \nu, \lambda) = (1, 2, 3)$ si ha

$$\partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = \partial_1 B^1 + \partial_2 B^2 + \partial_3 B^3 = 0 \tag{62}$$

ed otteniamo l'equazione

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \, .$$

Similmente con $(\mu, \nu, \lambda) = (0, 1, 2)$ si ha

$$\partial_0 F_{12} + \partial_1 F_{20} + \partial_2 F_{01} = \partial_t B^3 + \partial_1 E^2 - \partial_2 E^1 = 0 \tag{63}$$

che corrisponde alla terza componente dell'equazione vettoriale

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0$$

e così via.

Principio d'azione La soluzione generica delle equazioni omogenee (60) può essere scritta in termini di un potenziale quadrivettore A_μ

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \, . \tag{64}$$

Con il potenziale A_μ è possibile introdurre un principio di minima azione per le equazioni del campo elettromagnetico. Infatti dall'azione

$$S_{Max}[A_\mu] = \int d^4x \Big(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + A_\mu J^\mu \Big) \tag{65}$$

si ottengono le equazioni di Maxwell con sorgente

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = -J_\nu \, . \tag{66}$$

La conservazione della corrente è necessaria per la consistenza delle equazioni di Maxwell. Infatti

$$\partial^\mu \partial^\nu F_{\mu\nu} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \partial^\nu J_\nu = 0 \, . \tag{67}$$

Esplicitiamo queste equazioni separando gli indici in parti spaziali e parti temporali. Ponendo

$$A^\mu = (A^0, \vec{A}) = (\phi, \vec{A}) \, , \qquad A_\mu = (-\phi, \vec{A}) \, , \qquad J^\mu = (\rho, \vec{J}) \tag{68}$$

possiamo calcolare

$$\begin{aligned} &\partial_\mu J^\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \\ &F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = \partial_t A_i + \partial_i \phi = -E_i \\ &F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i = \epsilon_{ijk} B_k \end{aligned} \tag{69}$$

per cui il tensore campo elettromagnetico può essere scritto (in unità di Heaviside-Lorentz) come

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{70}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \partial^\mu F_{\mu 0} = -J_0 \quad &\longrightarrow \quad \partial^i F_{i0} = \rho \quad \longrightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \\ \partial^\mu F_{\mu i} = -J_i \quad &\longrightarrow \quad \partial^j F_{ji} + \partial^0 F_{0i} = -J_i \quad \longrightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \partial_t \vec{E} = \vec{J} \end{aligned} \tag{71}$$

che riconosciamo come le equazioni di Maxwell con sorgenti. Le altre equazioni di Maxwell (quelle senza sorgenti)

$$\begin{aligned} &\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ &\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0 \end{aligned} \tag{72}$$

sono similmente contenute in $\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0$, conseguenza della (64) (identità di Bianchi).