Fisica Nucleare e Subnucleare: Prova Scritta 3 Giugno (parte I e III)

Soluzioni

1) Si consideri la rappresentazione fondamentale di un gruppo G, che trasforma i vettori nel modo seguente

$$v^a \quad \overset{g\in G}{\longrightarrow} \quad v'^a = [r(g)]^a{}_b \, v^b$$

Dimostrare che il tensore T^{ab} non identifica una rappresentazione irriducibile, ma si riduce nelle sue parti simmetrica ed antisimmetrica (dimostrare cioè che la trasformazione della parte simmetrica è simmetrica e la trasformazione della parte antisimmetrica è antisimmetrica).

Soluzione: Per definizione il tensore T^{ab} si trasforma come

$$T^{ab} \quad \overset{g\in G}{\longrightarrow} \quad T'^{ab} = [r(g)]^a{}_c [r(g)]^b{}_d \, T^{cd}$$

e si può decomporre nella sue parti simmetrica ed antisimmetrica $T^{ab} = S^{ab} + A^{ab}$ dove

$$S^{ab} = \frac{1}{2}(T^{ab} + T^{ba}) \ , \quad A^{ab} = \frac{1}{2}(T^{ab} - T^{ba})$$

per cui $S^{ab} = S^{ba}$ e $A^{ab} = -A^{ba}$. Si può ora calcolare il trasformato della parte simmetrica e verificare che risulta simmetrica

$$S^{ab} \quad \overset{g\in G}{\longrightarrow} \quad S'^{ab} = [r(g)]^a{}_c [r(g)]^b{}_d \, S^{cd} = [r(g)]^a{}_c [r(g)]^b{}_d \, S^{dc} = [r(g)]^b{}_d [r(g)]^a{}_c S^{dc} = S'^{ba}$$

Similmente si può verificare che

$$A^{ab} \quad \overset{g\in G}{\longrightarrow} \quad A'^{ab} = [r(g)]^a{}_c [r(g)]^b{}_d \, A^{cd} = [r(g)]^a{}_c [r(g)]^b{}_d \, (-A^{dc}) = -[r(g)]^b{}_d [r(g)]^a{}_c A^{dc} = -A'^{ba}$$

per cui il trasformato della parte antisimmetrica è antisimmetrica.

***

2) Descrivere la corretta relazione relativistica tra energia ed impulso ed utilizzarla per ottenere l'equazione libera di Klein Gordon. Discutere infine le soluzioni di onda piana di tale equazione.

Soluzione:

L'energia $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ e l'impulso $\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ formano relativisticamente un quadrivettore $p^\mu = (\frac{E}{c}, \vec{p})$ con lunghezza invariante

$$p^\mu p_\mu = -\frac{E^2}{c^2} + \vec{p}^{\,2} = -m^2c^2 \ .$$

In particolare vale

$$E^2 = \vec{p}^{\,2} c^2 + m^2 c^4 \ , \quad E = \sqrt{\vec{p}^{\,2} c^2 + m^2 c^4} \ .$$

La prima di queste relazioni, con le sostituzioni $E \to i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ e $\vec{p} \to -i\hbar\vec{\nabla}$, da origine all'equazione di Klein Gordon

$$\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi(\vec{x}, t) = 0 \ .$$

Soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon sono le soluzioni di onda piana

$$\phi(x) = e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x} - Et)} \qquad \text{con} \quad E = \sqrt{\vec{p}^{\,2} c^2 + m^2 c^4}$$

che sono essere collegate a particelle scalari di massa m, e le soluzioni con "energie negative"

$$\phi(x) = e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x} - Et)} \qquad \text{con} \quad E = -\sqrt{\vec{p}^{\,2} c^2 + m^2 c^4}$$

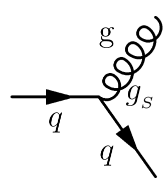
interpretabili come dovute alle antiparticelle.

***

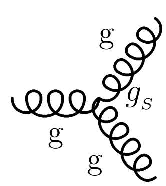
3) Descrivere graficamente i vertici fondamentali della QCD ed esemplificare con diagrammi di Feynman tre processi forti tra le particelle fondamentali del modello standard. Che cos'é il confinamento?

Soluzione:

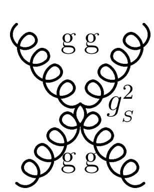
I vertici fondamentali della QCQ descrivono l'interazione quark-quark-gluone (dove i quark sono dello stesso sapore)



l'interazione a tre gluoni



e l'interazione a quattro gluoni.



Naturalmente in ogni vertice una particella entrante può essere sostituita con una antiparticella uscente e viceversa.

Il *confinamento* è una proprietà delle interazioni forti che confina il colore (la cariche non abeliane delle interazioni forti) all'interno di stati legati, gli adroni, che hanno colore totale nullo (scalari di $SU(3)$ di colore).

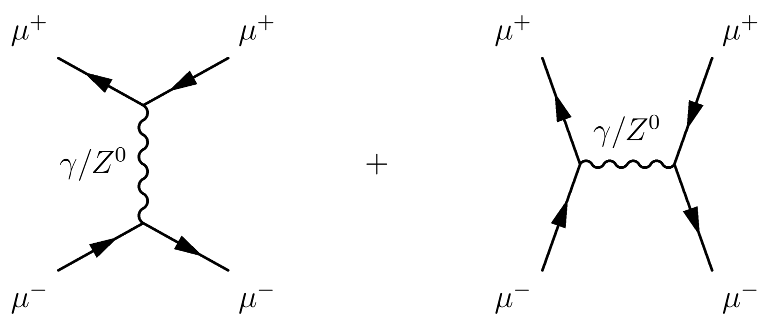
***

4) Disegnare all'ordine più basso i diagrammi di Feynman relativi ai seguenti processi, indicando la natura delle particelle virtuali che circolano all'interno del diagramma

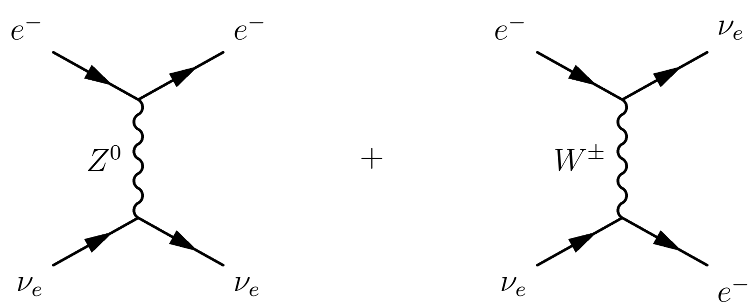
• $\mu^+ + \mu^- \to \mu^+ + \mu^-$; • $e^- + \nu_e \to e^- + \nu_e$; • $u + \bar{u} \to d + \bar{d}$; • $\mu^+ + n \to \bar{\nu}_\mu + p$.

Soluzione: Nei seguenti diagrammi il tempo scorre lungo l'asse orizzontale

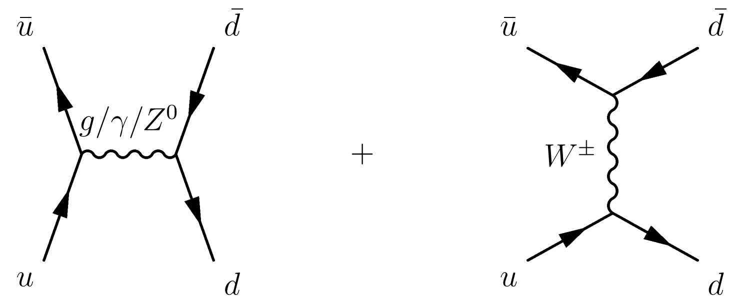
• $\mu^+ + \mu^- \to \mu^+ + \mu^-$



• $e^- + \nu_e \to e^- + \nu_e$;



- $u + \bar{u} \to d + \bar{d}$



- $\mu^+ + n \to \bar{\nu}_\mu + p$

grafico come nell' ultimo esercizio del 20.01.2011, dove si scambia μ^- uscente con μ^+ entrante e ν_μ entrante con $\bar{\nu}_\mu$ uscente.