Fisica Nucleare e Subnucleare: Prova Scritta 9 Febbraio 2011 (parte I e III)

Soluzioni

1) - Il tensore del campo elettromagnetico $F^{\mu\nu}$ è un tensore antisimmetrico ($F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$). Verificare che sotto una trasformazione di Lorentz $F^{\mu\nu} \to F'^{\mu\nu}$ il tensore rimane antisimmetrico, e cioè $F'^{\mu\nu} = -F'^{\nu\mu}$.
- Se in un sistema di riferimento inerziale si ha $\vec{E} = (0, E, 0)$ e $\vec{B} = (0, 0, 0)$, quanto valgono i campi elettromagnetici $\vec{E}'$ e $\vec{B}'$ nel sistema di riferimento in moto lungo l'asse x con velocità v?

Soluzione: Le trasformazioni di Lorentz collegano le coordinate spazio-temporali $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$ di due sistemi di riferimento inerziali nel seguente modo

$$x^{\mu\prime} = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

dove le matrici Λ soddisfano la relazione $\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\lambda\Lambda^\nu{}_\rho = \eta_{\lambda\rho}$, con $\eta_{\mu\nu}$ la metrica di Minkowski. Il tensore $F^{\mu\nu}$ si trasforma per definizione come

$$F^{\mu\nu\prime} = \Lambda^\mu{}_\lambda\Lambda^\nu{}_\rho F^{\lambda\rho}$$

e dato che il tensore $F^{\mu\nu}$ è antisimmetrico ($F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$) dobbiamo mostrare che anche il suo trasformato lo è ($F^{\mu\nu\prime} = -F^{\nu\mu\prime}$). Questo segue dalle seguenti uguaglianze

$$F^{\mu\nu\prime} \equiv \Lambda^\mu{}_\lambda\Lambda^\nu{}_\rho F^{\lambda\rho} = -\Lambda^\mu{}_\lambda\Lambda^\nu{}_\rho F^{\rho\lambda} = -\Lambda^\nu{}_\rho\Lambda^\mu{}_\lambda F^{\rho\lambda} \equiv -F^{\nu\mu\prime}$$

dove nella prima uguaglianza abbiamo usato l'antisimmetria di $F^{\lambda\rho}$ e nella seconda abbiamo riordinato i vari termini per riconoscere facilmente il trasformato $F^{\nu\mu\prime}$. Dunque

$$F^{\mu\nu\prime} = -F^{\nu\mu\prime}$$

- Il campo elettromagnetico si trasforma come un tensore di rango due della forma

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \qquad \to \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Data la trasformazione di Lorentz richiesta

$$\Lambda_\mu{}^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove $\beta = \frac{v}{c}$ e $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, possiamo calcolare (sapendo che solo $F^{02} = -F^{20}$ sono diversi da zero)

$$E'_x = F^{01\prime} = \Lambda^0{}_\lambda\Lambda^1{}_\rho F^{\lambda\rho} = (\Lambda^0{}_0\Lambda^1{}_2 - \Lambda^0{}_2\Lambda^1{}_0)F^{02} = 0$$

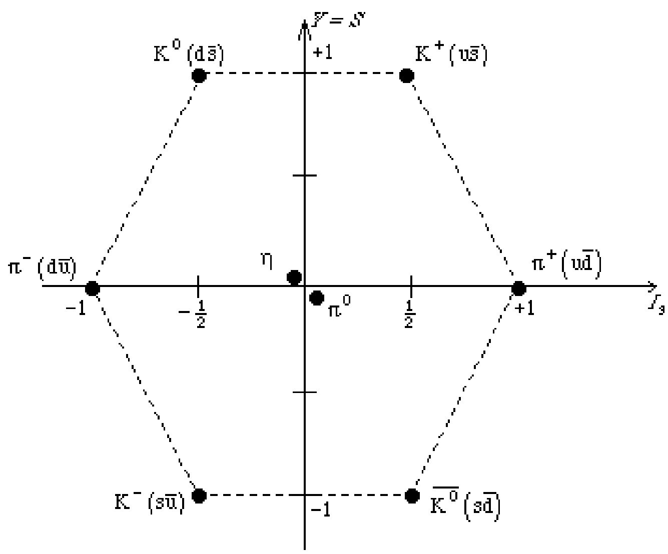
$$
\begin{aligned}
E'_y &= F^{02\prime} = \Lambda^0{}_\lambda \Lambda^2{}_\rho F^{\lambda\rho} = (\Lambda^0{}_0\Lambda^2{}_2 - \Lambda^0{}_2\Lambda^2{}_0)F^{02} = \gamma E \\
E'_z &= F^{03\prime} = \Lambda^0{}_\lambda \Lambda^3{}_\rho F^{\lambda\rho} = 0 \\
B'_x &= F^{23\prime} = \Lambda^2{}_\lambda \Lambda^3{}_\rho F^{\lambda\rho} = (\Lambda^2{}_0\Lambda^3{}_2 - \Lambda^2{}_2\Lambda^3{}_0)F^{02} = 0 \\
B'_y &= F^{31\prime} = ... = 0 \\
B'_z &= F^{12\prime} = \Lambda^1{}_\lambda \Lambda^2{}_\rho F^{\lambda\rho} = (\Lambda^1{}_0\Lambda^2{}_2 - \Lambda^1{}_2\Lambda^2{}_0)F^{02} = -\beta\gamma E
\end{aligned}
$$

Quindi $\vec{E}' = (0, \gamma E, 0)$ e $\vec{B}' = (0, 0, -\beta\gamma E)$. Naturalmente, ricordando le formule derivate in classe si poteva anche scrivere immediatamente il risultato finale.

***

2) Graficare l'ottetto dei mesoni $J^P = 0^-$ (cioè il multipletto contenente il pione) riportando sull'asse x la terza componente dell'isospin I_3 e sull'asse y il numero quantico di stranezza S. Descrivere la struttura dei vari mesoni in termini dei quark di valenza costituenti.

Soluzione:



NB: Le particelle π^0 e η sono composte da due combinazioni lineari di $u\bar{u}$, $d\bar{d}$ e $s\bar{s}$ indipendenti dalla combinazione scalare.

***

3) Perché esistono adroni composti da tre quark (qqq) e da coppia quark antiquark ($q\bar{q}$), ma non esistono adroni composti da due quark (qq)? Supportare la risposta includendo considerazioni di teoria dei gruppi.

Soluzione: Il colore risulta essere confinato dalle forze forti. Ora un adrone composto da tre quark può essere senza colore, cioè essere uno scalare per le trasformazioni di SU(3): infatti nelle possibili combinazioni dei colori dei tre quark esiste la rappresentazione scalare 1,

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10$$

Similimente un mesone ($q\bar{q}$) può essere senza colore poiché

$$3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8$$

Un adrone composto da due quark invece non può essere senza colore, poichè

$$3 \otimes 3 = 6 \oplus \bar{3}$$

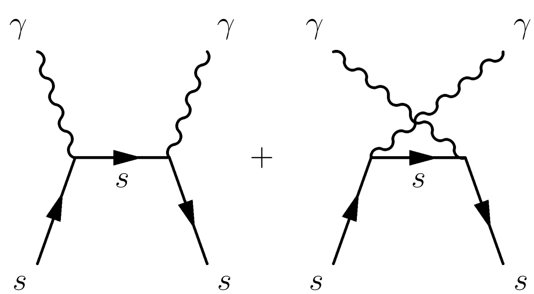
e quindi non è ammesso dal confinamento del colore.

***

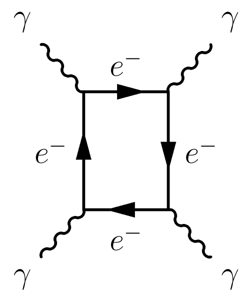
4) Disegnare all'ordine più basso nelle principali interazioni possibili i diagrammi di Feynman relativi ai seguenti processi:
• $s + \gamma \to s + \gamma$; • $\gamma + \gamma \to \gamma + \gamma$; • $\tau^- \to \mu^- + \nu_\tau + \bar{\nu}_\mu$; • $u + d \to u + d$.
Indicare esplicitamente il tipo di particelle virtuali presenti nei vari diagrammi.

Soluzione: Nei seguenti diagrammi il tempo scorre lungo l'asse orizzontale

• $s + \gamma \to s + \gamma$

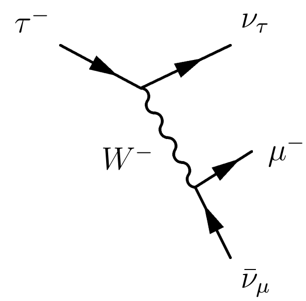


- $\gamma + \gamma \to \gamma + \gamma$



più eventuali permutazioni delle linee esterne.

- $\tau^- \to \mu^- + \nu_\tau + \bar{\nu}_\mu$



- $u + d \to u + d$