Fisica Nucleare e Subnucleare: Prova Scritta 19 Luglio 2011 (parte I e III)

Soluzioni

1) Sia data la rappresentazione definente $r(g)$ di un gruppo G, dove $g \in G$ è un elemento arbitrario del gruppo. Per definizione questa agisce sui vettori di uno spazio vettoriale le cui componenti indicate con v^a (indici in alto) si trasformano come

$$v^a \quad \stackrel{g\in G}{\longrightarrow} \quad v^{a\prime} = [r(g)]^a{}_b \, v^b$$

Cosa sono i vettori con indici puntati e non puntati in alto ed in basso? Dimostare inoltre che il prodotto $v^{\dot a} w_{\dot a}$ è uno scalare.

Soluzione: Data la rappresentazione $r(g)$, se ne possono immediatamente costruire altre tre: la rappresentazione "complesso coniugata" $r(g)^*$, la rappresentazione "inverso trasposta" $r(g)^{-1\,\mathrm{T}}$ e la rappresentazione "inverso hermitiana" $r(g)^{-1\,\dagger}$. Infatti se $r(g_1)r(g_2) = r(g_1 g_2)$ e $r(e) = 1$, prendendo il complesso coniugato di queste relazioni segue che $r(g_1)^* r(g_2)^* = r(g_1 g_2)^*$ e $r(e)^* = 1$, per cui anche $r(g)^*$ definisce una rappresentazione del gruppo. Similmente per gli altri casi.

Queste rappresentazioni matriciali trasformano vettori di opportuni spazi vettoriali le cui componenti sono per convenzione indicate con "indici puntati in alto", "indici in basso" ed "indici puntati in basso", rispettivamente. In formule

$$\begin{aligned}
v^{\dot a} \quad &\stackrel{g\in G}{\longrightarrow} \quad v^{\dot a\prime} = [r(g)^*]^{\dot a}{}_{\dot b} \, v^{\dot b} \\
v_a \quad &\stackrel{g\in G}{\longrightarrow} \quad v_a{}' = [r(g)^{-1\,\mathrm{T}}]_a{}^b \, v_b \\
v_{\dot a} \quad &\stackrel{g\in G}{\longrightarrow} \quad v_{\dot a}{}' = [r(g)^{-1\,\dagger}]_{\dot a}{}^{\dot b} \, v_{\dot b}
\end{aligned}$$

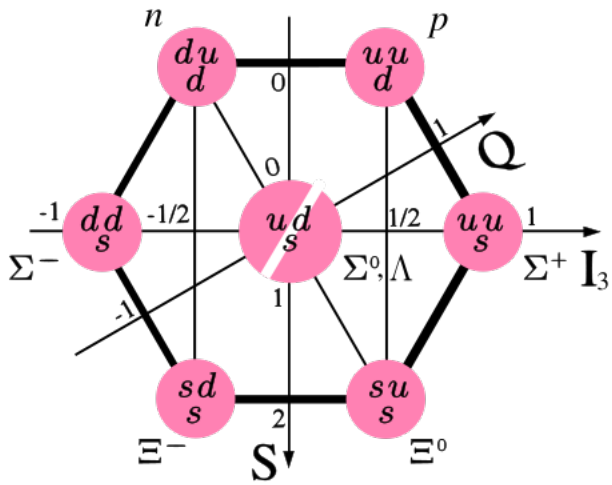
L'invarianza di $v^{\dot a} w_{\dot a}$ segue dal seguente calcolo

$$\begin{aligned}
v_{\dot a} w^{\dot a} \quad \stackrel{g\in G}{\longrightarrow} \quad v_{\dot a}{}' w^{\dot a\prime} &= v^{T\prime} w' = (r(g)^{-1\,\dagger} v)^T r(g)^* w = v^T r(g)^{-1\,*}\, r(g)^* w = \\
&= v^T w = v_{\dot a} w^{\dot a}
\end{aligned}$$

*****

2) Graficare l'ottetto dei barioni $J^P = \frac{1}{2}^+$ (il multipletto contenente il protone) riportando sull'asse x la terza componente dell'isospin I_3 e sull'asse y il numero quantico di stranezza S. Descrivere la struttura dei vari barioni in termini dei quark di valenza costituenti.

Soluzione:



NB: nel grafico è stata usata la convenzione con stranezza positiva per il quark s, opposta a quella standard usata anche in classe.

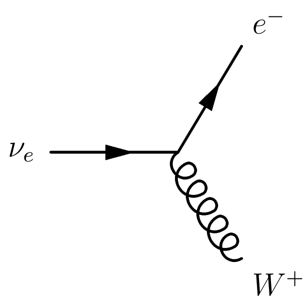
*****

3) Descrivere i vertici fondamentali che accoppiano i bosoni W^+ e W^- ai fermioni del modello standard mediante diagrammi di Feynman. Descrivere due processi deboli mediati dai $W^\pm$. Che cosa è la matrice CKM?

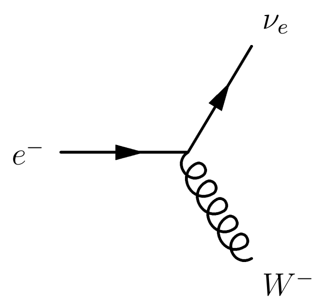
Soluzione: I fermioni del modello standard possono essere descritti dai seguenti doppietti di isospin debole

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix} .$$

In ciascun doppietto la particella posizionata in alto si può trasformare in quella corrispondente posizionata in basso con l'emissione di un W^+, e similmente una particella posizionata in basso si può trasformare nella particella corrispondente posizionata in alto con l'emissione di un W^-. Naturalmente, in ciascun vertice ciascuna particella entrante (uscente) può essere sostitutita dalla corrispondente antiparticella uscente (entrante). Con grafici di Feynman, prendendo ad esempio il primo doppietto $\binom{\nu_e}{e}$, si ha



;



etc.. Nel settore dei quark, i bosoni $W^\pm$ si accoppiano direttamente agli autostati di interazione debole (d', s', b') che sono collegati agli autostati di massa (d, s, b) da un matrice unitaria detta matrice CKM (Cabibbo-Kobayashi-Maskawa).

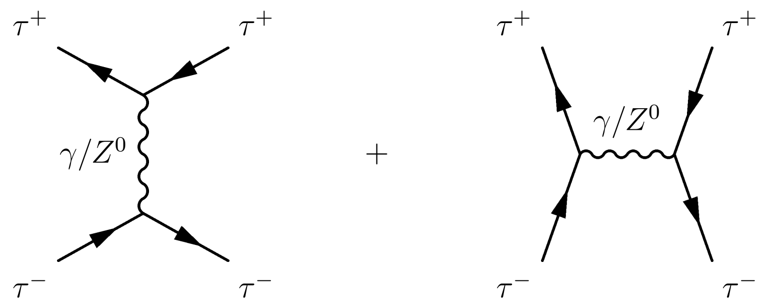
*****

4) Disegnare all'ordine più basso i diagrammi di Feynman relativi ai seguenti processi, indicando la natura delle particelle virtuali che circolano all'interno del diagramma

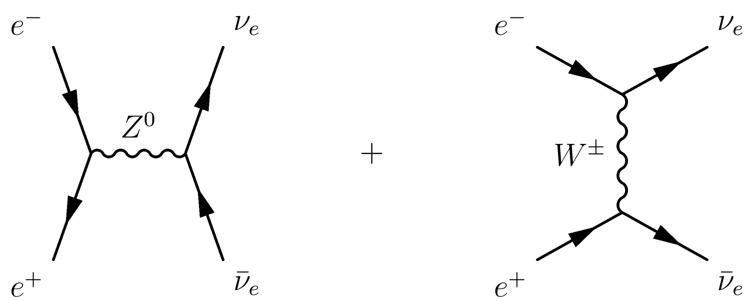
• $\tau^+ + \tau^- \to \tau^+ + \tau^-$; • $e^- + e^+ \to \nu_e + \bar{\nu}_e$; • $\gamma + \gamma \to \gamma + \gamma$; • $u + \bar{u} \to c + \bar{c}$.

Soluzione: Nei seguenti diagrammi il tempo scorre lungo l'asse orizzontale

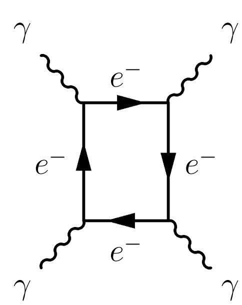
- $\tau^+ + \tau^- \to \tau^+ + \tau^-$



- $e^- + e^+ \to \nu_e + \bar{\nu}_e$



- $\gamma + \gamma \to \gamma + \gamma$



più eventuali permutazioni delle linee esterne (sono particelle identiche, indistinguibili tra loro).

- $u + \bar{u} \to c + \bar{c}$