Fisica Nucleare e Subnucleare: Prova Scritta 21 Giugno 2011 (parte I e III)

Soluzioni

1) Che cos'è il gruppo SO(3)? In cosa si decompone la rappresentazione $3 \otimes 3$ di tale gruppo? Definire brevemente cosa sono i generatori infinitesimi di un gruppo di Lie e descrivere l'algebra di Lie del gruppo SO(3).

Soluzione:

Il gruppo SO(3) è il gruppo speciale ortogonale di matrici reali 3×3, cioè matrici R reali, di dimensione 3×3, tali che $R^T = R^{-1}$ e $\det R = 1$. Costituisce il gruppo delle rotazioni nello spazio euclideo tridimensionale.

Un gruppo di Lie G è un gruppo i cui elementi dipendendono in modo continuo da alcuni parametri. Indicando tali parametri con α_a dove $a = 1, 2, .., \dim G$, e scegliendoli in modo tale che per $\alpha_a = 0$ si abbia l'identità del gruppo (che indichiamo con $\mathbb{1}$), allora elementi $g(\alpha) \in G$ con parametri infinitesimi descrivono trasformazioni infinitesime che si possono scrivere come

$$g(\alpha) = \mathbb{1} + i\alpha_a T^a + \mathcal{O}(\alpha^2)$$

Gli operatori T^a sono i generatori infinitesimi del gruppo (generano gli elementi infinitesimamente vicini all'identità).

Per SO(3) una rotazione attorno all'asse z con angolo α_z è data da

$$R_z(\alpha_z) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_z) & \sin(\alpha_z) & 0 \\ -\sin(\alpha_z) & \cos(\alpha_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha_z \lll 1} 1 + \alpha_z \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{iT^3} + \cdots$$

e similmente per rotazioni attorno agli altri assi cartesiani, da cui

$$T^3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad T^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \qquad T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che, con un calcolo esplicito, generano la corrispondente algebra di Lie

$$[T^a, T^b] = i\epsilon^{abc}T^c$$

*****

2) Illustrare la composizione in termini di quark dei pioni carichi e del pione neutro. Indicare il principale canale di decadimento per il pione carico π^- e quello per il pione neutro π_0. Dire anche qual'è l'interazione fondamentale responsabile per tali decadimenti.

Soluzione:

$$\pi^- \sim (\bar{u}d)\ , \quad \pi^+ \sim (\bar{d}u)\ , \quad \pi^0 \sim (\frac{\bar{u}u - \bar{d}d}{\sqrt{2}})$$

$$\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu \quad \text{(interazione debole)}$$

$$\pi^0 \to \gamma + \gamma \quad \text{(interazione elettromagnetica)}$$

*****

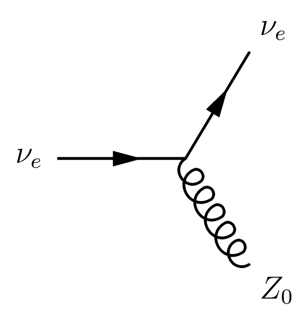
3) Descrivere i vertici fondamentali che accoppiano il bosone Z_0 ai fermioni del modello standard mediante diagrammi di Feynman. Descrivere due processi deboli mediati dallo Z_0.

Soluzione:

I fermioni del modello standard possono essere raggruppati nel seguente modo

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix} \ ; \quad \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} \ .$$

Ciascuna di queste particelle può emettere un bosone Z_0 rimanendo una particella della stessa natura. Naturalmente in ciascun vertice ciascuna particella entrante (uscente) può essere sostitutita dalla corrispondente antiparticella uscente (entrante), tenendo conto che l'antiparticella dello Z_0 coincide con lo Z_0 stesso.
Con grafici di Feynman, prendendo ad esempio la particella ν_e



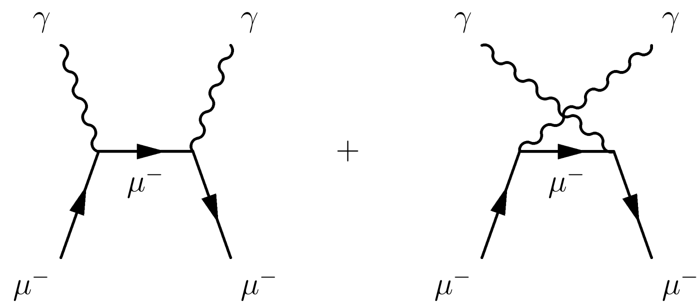
Si noti che le interazioni con lo Z_0 non cambiano il sapore del leptone con cui interagiscono (le particelle che emettono lo Z_0 rimangono particelle della stessa natura, con gli stessi numeri quantici di sapore).

*****

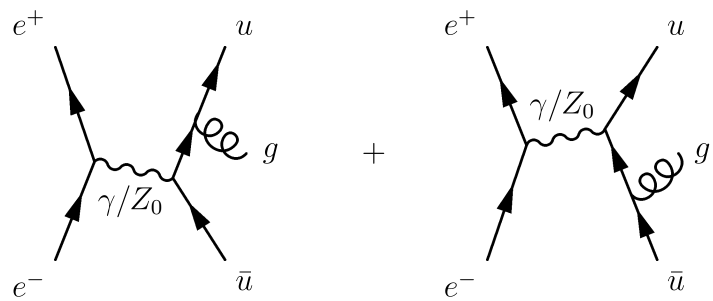
4) Disegnare all'ordine più basso i diagrammi di Feynman relativi ai seguenti processi, indicando la natura delle particelle virtuali che circolano all'interno del diagramma
• $\mu^- + \gamma \to \mu^- + \gamma$; • $e^- + e^+ \to u + \bar{u} + g$ (g = *gluone*); • $t \to b + e^+ + \nu_e$; • $s + \bar{s} \to d + \bar{d}$.

Soluzione:

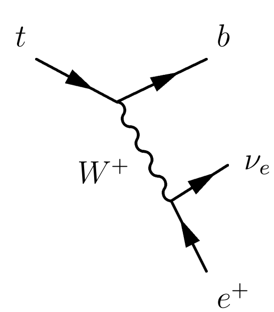
• $\mu^- + \gamma \to \mu^- + \gamma$



• $e^- + e^+ \to u + \bar{u} + g$



• $t \to b + e^+ + \nu_e$



- $s + \bar{s} \to d + \bar{d}$