1 Rottura spontanea di simmetria globale

In teoria dei campi le simmetrie dell'azione possono essere realizzate in due modi diversi:

1) realizzazione di Wigner-Weyl: il vuoto (stato di energia più basso) è invariante per le trasformazioni di simmetria. Questa è la *fase simmetrica* della teoria e lo spettro della teoria si decompone in rappresentazioni del gruppo di simmetria.

2) realizzazione di Nambu-Goldstone: il vuoto non è invariante, ma ci sono diversi possibili vuoti collegati da trasformazioni di simmetria. Questa è la *fase spontaneamente rotta*, caratterizzata dall' esistenza di eccitazioni a massa nulla (bosoni di Goldstone) che corrispondono alle fluttuazioni attorno al vuoto (minimo del potenziale) lungo le direzioni piatte del potenziale. Queste direzioni piatte esistono necessariamente a causa della simmetria della lagrangiana.

Esempio: **modello scalare con simmetria** $U(1)$

La lagrangiana che definisce il modello è

$$\mathcal{L} = -\partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - \lambda(\phi^* \phi)^2 \tag{1}$$

con corrispondente densità di energia $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E} = \dot{\phi}^* \dot{\phi} + \vec{\nabla}\phi^* \cdot \vec{\nabla}\phi + \underbrace{m^2 \phi^* \phi + \lambda(\phi^* \phi)^2}_{V} \tag{2}$$

Il modello possiede una simmetria globale $U(1)$

$$\phi' = e^{i\alpha}\phi \ , \qquad \phi^{*\prime} = e^{-i\alpha}\phi^* \tag{3}$$

con α parametro arbitrario ma costante. In forma infinitesima queste leggi di trasformazione si scrivono come

$$\delta\phi = i\alpha\, \phi \ , \qquad \delta\phi^* = -i\alpha\, \phi^* \ . \tag{4}$$

Per studiare gli stati ad energia più bassa occorre analizzare il potenziale V, infatti nell'espressione della densità di energia $\mathcal{E}$ i termini con le derivate sono definiti positivi ed il contributo minimo si ha per campi costanti sia nello spazio che nel tempo. Inoltre si richiede che $\lambda > 0$ affinché la teoria sia stabile. A questo punto ci sono due possibilità: (i) $m^2 \geq 0$, (ii) $m^2 < 0$.

Per $m^2 \geq 0$ il potenziale V ha un unico minimo, localizzato in $\phi_0 = \phi_0^* = 0$. Questa è la situazione con vuoto simmetrico in quanto la simmetria $U(1)$ non è spontanemanete rotta (infatti il vuoto è invariante, $\delta\phi_0 = 0$ sotto la trasformazione di simmetria in eq. 4). La simmetria è visibile nello spettro (realizzazione di Wigner-Weyl): ci sono particelle cariche (con carica $U(1)$) e massa m in interazione tra loro.

Per $m^2 < 0$ i vuoti possibili sono descritti dal minimo del potenziale V

$$\phi_0 = a e^{i\eta} \ , \qquad a = \sqrt{-\frac{m^2}{2\lambda}} \tag{5}$$

dove eta η è una fase che indicizza i possibili vuoti, tutti equivalenti tra di loro. Questa è la fase spontaneamente rotta.

Studiamo ora le fluttuazioni attorno al vuoto, che sono interpretabili come i campi a cui sono associate le particelle della teoria. Scegliendo come vuoto $\phi_0 = a$ (cioè $\eta = 0$) ed espandendo il campo come

$$\phi(x) = (a + \rho(x))e^{i\theta(x)}$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - \lambda(\phi^* \phi)^2 \\
&= -\partial^\mu \rho \partial_\mu \rho - (\rho + a)^2 \partial^\mu \theta \partial_\mu \theta - m^2(\rho + a)^2 - \lambda(\rho + a)^4 \\
&= -\partial^\mu \rho \partial_\mu \rho - a^2 \partial^\mu \theta \partial_\mu \theta - (\underbrace{-2m^2}_{m_\rho^2})\rho^2 \\
&\quad -(\rho^2 + 2a\rho)\partial^\mu \theta \partial_\mu \theta - \lambda(\rho^4 + 4a\rho^3) + \frac{m^4}{4\lambda}
\end{aligned} \tag{6}$$

Dalla parte quadratica leggiamo le masse delle fluttuazioni m_ρ ed m_θ, date da: $m_\rho^2 = -2m^2 = 4\lambda a^2 > 0$ e $m_\theta^2 = 0$. Il campo θ rimane senza massa ed è chiamato bosone di Goldstone. Il resto della lagrangiana descrive le interazioni.

Un modo alternativo di descrivere la stessa fisica è quello di parametrizzare il campo scalare come

$$\phi(x) = a + \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1(x)) + i\varphi_2(x))$$

da cui

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{2}\partial^\mu \varphi_1 \partial_\mu \varphi_1 - \frac{1}{2}\partial^\mu \varphi_2 \partial_\mu \varphi_2 - \underbrace{2\lambda a^2}_{\frac{1}{2}m_{\varphi_1}^2} \varphi_1^2 \\
&\quad -\sqrt{2}\lambda a \varphi_1(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - \frac{\lambda}{4}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2 + \frac{m^4}{4\lambda}
\end{aligned} \tag{7}$$

il campo di Goldstone è φ_2 che non ha termine di massa, mentre la massa di φ_1 soddisfa $m_{\varphi_1}^2 = 4\lambda a^2$, come già visto precedentemente.

Teorema di Goldstone

Una teoria di campo quantistica invariante sotto un gruppo G sponteneamente rotto su un sottogruppo H (quindi le trasformazioni di H lasciano il vuoto invarinate) contiene tanti bosoni di Goldstone (particelle a massa nulla) quanti generatori del gruppo G sponteamente rotti (e questo numero coincide con le dimensione delllo spazio coset G/H).

2 Rottura spontanea di simmetria locale

Quando si verifica la rottura spontanea di una simmetria di gauge le conseguenze sono diverse dal caso precedente. In particolare succede che i bosoni di Goldstone non esitono (non ci sono particelle scalari senza massa) mentre alcuni campi di gauge diventano massivi. Questo fenomeno è conosciuto come “meccanismo di Higgs”.

Meccanismo di Higgs: modello abeliano

Un esempio concreto è dato dal modello di Higgs abeliano, una sorta di QED scalare (la particella carica ha spin 0 invece che 1/2) con potenziale per il campo scalare a forma di cappello messicano. La lagrangiana è data da

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}(A))^2 - D^\mu \phi^* D_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - \lambda(\phi^* \phi)^2 \tag{8}$$

dove

$$\begin{aligned} D_\mu \phi &= (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi \\ D_\mu \phi^* &= (D_\mu \phi)^* = (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi^* \end{aligned}$$

e corrisponde alla teoria precedente, ma con la simmetria $U(1)$ resa locale. La simmetria di gauge è data da

$$\begin{aligned} \phi' &= e^{i\alpha}\phi \\ A'_\mu &= A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha \end{aligned}$$

che in forma infinitesima si scrive come

$$\begin{aligned} \delta\phi &= i\alpha\,\phi \\ \delta A_\mu &= \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha\ . \end{aligned}$$

Assumiamo $\lambda > 0$ e $m^2 < 0$, per cui la simmetria di gauge è rotta: i possibili vuoti sono descritti da

$$\phi_0 = a e^{i\eta}\ , \qquad a = \sqrt{-\frac{m^2}{2\lambda}} \tag{9}$$

e non sono invarianti per trasformazioni di gauge.

Scegliendo come vuoto $\phi_0 = a$, si possono studiare le piccole fluttuazioni attorno ad esso. Parametrizziamo il campo scalare come

$$\phi(x) = a + \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1(x)) + i\varphi_2(x))$$

e studiando la parte quadratica della lagrangiana possiamo identificare i vari termini di massa

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}(A))^2 - \frac{1}{2}\partial^\mu \varphi_1 \partial_\mu \varphi_1 - \frac{1}{2}\partial^\mu \varphi_2 \partial_\mu \varphi_2 \\ &\quad -e^2 a^2 A_\mu A^\mu - \sqrt{2} e a A^\mu \partial_\mu \varphi_2 - 2\lambda a^2 \varphi_1^2 + ... \end{aligned} \tag{10}$$

Si vede che emerge un termine di massa $m_A^2 = 2e^2 a^2$ per il campo di spin 1 (basta paragonare con l'azione libera di Proca) ed un termine di massa per il campo scalare reale φ_1 (il campo di Higgs) con $m_{\varphi_1}^2 = 4\lambda a^2$ (paragonare con l'azione libera di Klein-Gordon). Inoltre c'è anche un termine che accoppia A_μ con φ_2 che è piú comodo combinare in un quadrato esatto

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}(A))^2 - e^2 a^2 \Big(A_\mu - \frac{1}{\sqrt{2} e a}\partial_\mu \varphi_2\Big)^2 \\ &\quad -\frac{1}{2}\partial^\mu \varphi_1 \partial_\mu \varphi_1 - 2\lambda a^2 \varphi_1^2 + ... \end{aligned} \tag{11}$$

La prima riga coincide con un'azione di Proca libera per $\tilde{A}_\mu \equiv A_\mu - \frac{1}{\sqrt{2}ea}\partial_\mu\varphi_2$: spesso si descrive questo risultato dicendo che il campo di Goldstone φ_2 sparisce perchè viene "mangiato" dal campo di gauge A_μ che diventa massivo (e quindi acquista una polarizzazione in più). Il campo scalare massivo che rimane è detto campo di Higgs. I termini successivi della lagrangiana corrispondono alle interazioni.

Scelte di gauge. Le simmetrie di gauge possono essere espresse in termini dei campi che descrivono le fluttuazioni attorno al vuoto fisico. Nel caso di trasformazioni infinitesime queste assumono la forma

$$\begin{aligned} \delta\varphi_1 &= -\alpha\varphi_2 \\ \delta\varphi_2 &= \alpha\varphi_1 + \sqrt{2}a\alpha \\ \delta A_\mu &= \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha \ . \end{aligned} \tag{12}$$

Le simmetrie di gauge permettono di fissare delle condizioni (dette condizioni di gauge-fixing) che non modificano i risultati fisici, ma permettono di derivarne alcune conseguenze in modo più semplice.

Gauge unitario

Si può sfruttare l'invarianza di gauge per fissare la condizione

$$\varphi_2(x) = 0 \tag{13}$$

Questo gauge rende evidente che φ_2 non contribuisce allo spettro fisico. Tutti gli altri campi corrispondono invece a particelle fisiche: A_μ descrive particelle di spin 1 massive con massa $m_A^2 = 2e^2a^2$, φ_1 descrive particelle scalari di Higgs con massa $m_{\varphi_1}^2 = 4\lambda a^2$.

Gauge rinormalizzabile

Si può sfruttare l'invarianza di gauge per fissare la condizione

$$\partial^\mu A_\mu - m_A^2\varphi_2(x) = 0 \tag{14}$$

Ora non tutte in campi corrispondono a particelle fisiche, ma in in questo gauge è più facile studiare la rinormalizzabilità della teoria.

Propagatore campo di spin 1 massivo

Abbiamo visto emerge dal modello di Higgs abeliano l'azione di Proca. Possiamo immediatamente ricavare il propagatore libero del campo di Proca di massa m usando formule standard

$$\langle A_\mu(x)A_\nu(y)\rangle = -iG_{\mu\nu}(x-y) \tag{15}$$

dove $G_{\mu\nu}(x-y)$ è la funzione di Green dell'operatore cinetico. In trasformata di Fourier

$$\tilde{G}_{\mu\nu}(p) = A(p)\eta_{\mu\nu} + B(p)p_\mu p_\nu \tag{16}$$

con $A(p) = \frac{1}{p^2+m^2}$ e $B(p) = A(p)/m^2$, per cui

$$\langle A_\mu(x)A_\nu(y)\rangle = -i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{e^{ip\cdot(x-y)}}{p^2+m^2-i\epsilon}\Big(\eta_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m^2}\Big) \ . \tag{17}$$

3 Modello Standard

.... work in progress ...