Modello Standard: formule varie

Fiorenzo Bastianelli

Abstract

Collezione di varie formule discusse a lezione, che riassumono gli argomenti descritti in classe. Tali argomenti devono essere studiati più approfonditamente nei testi consigliati.

1 Modello standard: introduzione

Considerazioni teoriche e dati sperimentali hanno portato alla conclusione che tre delle quattro forze fondamentali conosciute, la forza nucleare forte, la forza nucleare debole e la forza elettromagnetica, sono descritte da una teoria di gauge basata sul gruppo $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, con rottura parziale di simmetria indotta dal meccanismo di Higgs nel settore elettrodebole $SU(2) \times U(1)$. I bosoni di gauge sono accoppiati a tre famiglie di fermioni in modo chirale, per cui non sono ammessi termini espliciti di massa per i fermioni, perchè questi termini romperebbero esplicitamente la simmetria di gauge. Naturalmente non sono ammessi neanche termini di massa per i bosoni di gauge stessi per la stessa ragione. Le masse delle varie particelle emergono tutte quante dal meccanismo di Higgs tramite gli accoppiamenti di gauge e di Yukawa del campo di Higgs.

Le particelle descritte dal modello standard sono:
(i) particelle di spin 1/2, fermioni che si sottodividono in leptoni e quarks e sono raggruppati in tre famiglie, possono essere interpretate come particelle di materia (soddisfano al principio di esclusione di Pauli);
(ii) particelle di spin 1, bosoni mediatori delle tre forze indicate sopra: il fotone γ, particella senza massa che media la forza elettromagnetica, le particelle massive W^+, W^- e Z^0, mediatrici della forza nucleare debole, e gli otto gluoni, particelle senza massa, mediatrici della forza nucleare forte;
(iii) una particella di spin 0, il bosone di Higgs, congetturato per spiegare le masse delle varie particelle attraverso una rottura spontanea di simmetria locale, non ancora rivelato sperimentalmente.

1.1 Leptoni e quarks

La particelle di spin 1/2 si dividono in leptoni e quarks. I leptoni non sentono la forza forte e si raggruppano in tre famiglie:
la prima contenente l'elettrone ed il neutrino elettronico (e, ν_e),
la seconda con il muone ed il neutrino muonico (μ, ν_μ),

la terza contenente la particella tau ed il corrispondente neutrino tau (τ, ν_τ).
Similmente i quarks, che sentono anche l'interazione forte, si dividono in tre famiglie:
la prima famiglia contiene il quark up ed il quark down (u, d),
la seconda famiglia contiene il quark charm ed il quark strano (strange) (c, s),
la terza famiglia contiene il quark top ed il quark bottom (t, b).

I diversi tipi di fermioni sono distinti da numeri quantici diversi, alcuni dei quali corrispondono alla carica sotto il gruppo di gauge $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Il modello standard è una teoria chirale, cioè non è invariante per trasformazioni di parità. In particolare, la parte sinistrorsa di una particella di spin 1/2 ha genericamente una carica di gauge diversa dalla sua parte destrorsa. Infatti, conviene ricordare che un fermione di Dirac ψ (che soddisfa appunto all'equazione di Dirac) può essere diviso nella sua parte sinistrorsa (left-handed) ψ_L e nella sua parte destrorsa (right-handed) ψ_R:

$$\psi = \psi_L + \psi_R \ , \qquad \psi_L \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi \ , \quad \psi_R \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi \ . \tag{1}$$

Queste due parti identificano le due rappresentazioni irriducibili ed inequivalenti del gruppo di Lorentz proprio ed ortocrono, $(\frac{1}{2}, 0)$ e $(0, \frac{1}{2})$. I corrispondenti spinori sono detti spinori di Weyl. Ricordiamo anche che la lagrangiana dello spinore di Dirac si decompone in termini dei corrispondenti spinori di Weyl come segue

$$\mathcal{L} \ = \ -\overline{\psi}\partial\!\!\!/\psi - m\overline{\psi}\psi \ = \ -\overline{\psi_L}\partial\!\!\!/\psi_L - \overline{\psi_R}\partial\!\!\!/\psi_R - m(\overline{\psi_L}\psi_R + \overline{\psi_R}\psi_L) \ . \tag{2}$$

Questo mostra come una massa di Dirac m non possa essere presente per fermioni chirali (fermoni le cui parti chirali abbiano cariche di gauge diverse): tale termine non potrebbe essere invariante sotto trasformazioni di gauge. I fermioni del modello standard acquisiscono massa solo tramite il meccanismo di Higgs (con la sola possibile eccezione dei neutrini destrorsi).

Nello schema qui sotto riportiamo le cariche sotto il gruppo di gauge, usando una notazione della forma $(SU(3), SU(2))_{U(1)}$, dove per i gruppi non-abeliani indichiamo la rappresentazione tramite la corrispondente dimensione, mentre per la parte abeliana tramite la carica $U(1)$, chiamata ipercarica:

$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}$	ν_{eR}	e_R	$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	u_R	d_R
$\begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}$	$\nu_{\mu R}$	μ_R	$\begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}$	c_R	s_R
$\begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}$	$\nu_{\tau R}$	τ_R	$\begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}$	t_R	b_R
$(1,2)_{-\frac{1}{2}}$	$(1,1)_0$	$(1,1)_{-1}$	$(3,2)_{\frac{1}{6}}$	$(3,1)_{\frac{2}{3}}$	$(3,1)_{-\frac{1}{3}}$

Il gruppo $SU(3)$ è detto gruppo di colore, ed i quarks si trasformano nella rappresentazione fondamentale, la 3, ed hanno quindi tre "colori", mentre le corrispondenti antiparticelle, gli antiquarks, si trasformano nella rappresentazione complesso coniugata, la $\bar{3}$, ed hanno quindi tre "anticolori". I leptoni non sentono la forza forte e sono quindi scalari sotto il gruppo di colore. Il gruppo $SU(2)$ è detto gruppo di isospin debole, ed i doppietti di $SU(2)$ sono stati scritti qui sopra nella forma di vettore colonna: si trasformano nella rappresentazione bidimensionale, la 2, ed hanno quindi isospin debole $I = \frac{1}{2}$, con terza componente $I_3 = \frac{1}{2}$ per l'elemento in alto del vettore colonna, ed $I_3 = -\frac{1}{2}$ per quello in basso. Si ricordi che la 2 è equivalente alla $\bar{2}$, entrambe identificano la stessa rappresentazione con isospin debole uguale ad $\frac{1}{2}$. $U(1)$ è il gruppo dell'ipercarica. Se indichiamo con Y l'ipercarica di una particella, la corrispondente carica elettrica Q è data da $Q = I_3 + Y$, dove I_3 indica la terza componente dell'isospin debole.

Con la precisazione di questi numeri quantici è immediato scrivere la derivata covariante per il gruppo di gauge del modello standard di ciascun fermione. La parte della lagrangiana che descrive i fermioni in interazione con i campi di gauge prende quindi la forma seguente

$$\mathcal{L}_{1/2} = -\sum_f \overline{\psi_f} \gamma^\mu D_\mu \psi_f \tag{3}$$

dove la somma è sui 6×3 tipi di fermioni riportati sopra (6 componenti per ogni "famiglia"). In generale, la derivata covariante assume la forma

$$D_\mu = \partial_\mu - i g_S G^A_\mu(x) T^A - i g W^a_\mu(x) I^a - i y B_\mu(x) Y \tag{4}$$

dove $G^A_\mu(x)$ sono i campi di gauge per il gruppo di colore $SU(3)$ e T^A i rispettivi generatori, $W^a_\mu(x)$ i campi di gauge per il gruppo di isospin debole $SU(2)$ e I^a i generatori corrispondenti, $B_\mu(x)$ il campo di gauge dell'ipercarica $U(1)$ e Y il generatore che misura l'ipercarica. Le tre costanti di accoppiamento sono state indicate con (g_S, g, y). Termini di massa espliciti non sono ammessi nella lagragiana perchè non sarebbero gauge invarianti (in realtà per i neutrini destrorsi, dato che non sono carichi sotto il gruppo di gauge, sono ammissibili termini di massa di Majorana).

1.2 Bosoni vettoriali

I campi di gauge associati al gruppo $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ descrivono particelle di spin 1 (bosoni vettoriali) e l'invarianza di gauge non permette l'aggiunta di un termine di massa esplicito nell'azione, e quindi la lagrangiana assume la forma standard

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{4}(F^A_{\mu\nu}(G))^2 - \frac{1}{4}(F^a_{\mu\nu}(W))^2 - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu}(B))^2 \ . \tag{5}$$

1.3 Meccanismo di Higgs

La rottura spontanea della simmetria locale è generata dal campo di Higgs ϕ, un campo scalare con i seguenti numeri quantici $(1,2)_{\frac{1}{2}}$, che può essere rappresentato con un doppietto di funzioni complesse (cioè quattro campi reali in tutto)

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \eta_2 + i\eta_3 \\ h + i\eta_1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Conoscendo i numeri quantici del campo di Higgs è immediato scrivere il termine della lagrangiana contenente le derivate covarianti, mentre il potenziale del campo scalare descrivente le autointerazioni ha la forma di “cappello messicano” per permettere una rottura spontanea di simmeria. Il termine della lagrangiana contenente il campo di Higgs e le sue interazioni con i campi di gauge è quindi

$$\mathcal{L}_{Higgs} = -(D_\mu\phi)^\dagger D^\mu\phi + \mu^2\phi^\dagger\phi - \lambda(\phi^\dagger\phi)^2 \tag{7}$$

con μ^2 e λ due parametri positivi.

Lo stato di energia più basso, lo stato di vuoto, assunto dal campo di Higgs è dato dalle configurazioni costanti di ϕ che minimizzano il potenziale scalare $V(\phi) = -\mu^2\phi^\dagger\phi + \lambda(\phi^\dagger\phi)^2$, che per l'appunto ha la forma di cappello messicano vicino all'origine. Queste configurazioni con energia più bassa sono date da

$$\phi_0^\dagger\phi_0 = \frac{\mu^2}{2\lambda} \tag{8}$$

e possiamo scegliere lo stato di vuoto descritto da

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \qquad \text{con } v \equiv \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \ . \tag{9}$$

Questo valore non nullo di ϕ nella sua configurazione di vuoto rompe la simmetria locale nel settore $SU(2) \times U(1)$, lasciando solamente un sottogruppo $U(1)$ non spontaneamente rotto: questo sottogruppo è associato all'elettromagnetismo (quindi il fotone rimane senza massa) ed è spesso indicato con $U_{em}(1)$ per non confonderlo con l'$U(1)$ dell'ipercarica, a volte indicato con $U_Y(1)$. Non rompe la parte di $SU(3)$ perchè il campo di Higgs è invariante sotto trasformazioni di $SU(3)$, ed in particolare è invariante la sua configurazione di vuoto.

Studiamo in dettaglio le trasformazioni di simmetria del vuoto. L'unico campo del MS che ha un valore nel vuoto non nullo è il campo di Higgs. Operando una trasformazione infinitesima sotto $SU(2) \times U(1)$ otteniamo

$$\delta\phi_0 = (i\alpha^a I^a + i\beta Y)\phi_0 = \Big(i\alpha^a\frac{\sigma^a}{2} + i\beta\frac{1}{2}\Big)\phi_0 = \frac{i}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} (\alpha^1 - i\alpha^2)v \\ (\beta - \alpha^3)v \end{pmatrix} \tag{10}$$

ed il vuoto è invariante, $\delta\phi_0 = 0$, solo per trasformazioni con $\alpha^3 = \beta$ e $\alpha^1 = \alpha^2 = 0$. Quindi rimane un gruppo ad un parametro, che possiamo identificare con β, che non è spontaneamente rotto. Tale gruppo è generato da $Q \equiv I^3 + Y$ ed indicato con $U_{em}(1)$: poichè non è spontaneamente rotto, il campo di gauge associato (il fotone) rimane senza massa. Gli altri 3 generatori linearmente indipendenti risultano invece spontaneamente rotti: questo comporta l'emergere di masse per i campi di gauge associati.

Calcoliamo le masse dei campi di gauge. È sufficiente considerare i termini senza derivate presenti nel termine della lagrangiana con le derivate covarianti del campo di Higgs

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Higgs} &= -(D_\mu\phi)^\dagger D^\mu\phi + ... \\
&\sim -\phi_0^\dagger(igW^{\mu a}I^a + iyB^\mu Y)(-igW_\mu^b I^b - iyB_\mu Y)\phi_0 \\
&= -\phi_0^\dagger\Big(igW^{\mu a}\frac{\sigma^a}{2} + iyB^\mu\frac{1}{2}\Big)\Big(-igW_\mu^b\frac{\sigma^b}{2} - iyB_\mu\frac{1}{2}\Big)\phi_0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}(0,v)\Big(g^2 W^{\mu a}W^b_\mu \frac{\sigma^a\sigma^b}{4} + y^2\frac{1}{4}B^\mu B_\mu + gyB^\mu W^a_\mu \frac{\sigma^a}{2}\Big)\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= -\frac{v^2}{8}\Big(g^2 W^{\mu a}W^a_\mu + y^2 B^\mu B_\mu - 2gyB^\mu W^3_\mu\Big) \\
&= -\frac{v^2}{8}\Big(g^2(W^1_\mu W^{\mu 1} + W^2_\mu W^{\mu 2}) + (gW^3_\mu - yB_\mu)^2\Big) \\
&= -\frac{1}{2}\frac{v^2 g^2}{4}\Big(W^1_\mu W^{\mu 1} + W^2_\mu W^{\mu 2}\Big) - \frac{1}{2}\frac{v^2(g^2+y^2)}{4}\Big(\frac{g}{\sqrt{g^2+y^2}}W^3_\mu - \frac{y}{\sqrt{g^2+y^2}}B_\mu\Big)^2
\end{aligned}
$$

da cui leggiamo le masse dei campi W^1_μ e W^2_μ, che risultano essere $m^2_W = \frac{v^2 g^2}{4}$, e del campo Z_μ, $m^2_Z = \frac{v^2(g^2+y^2)}{4}$. Il campo Z_μ è naturalmente la combinazione lineare

$$
Z_\mu = \cos\theta \; W^3_\mu - \sin\theta \; B_\mu \tag{11}
$$

dove

$$
\cos\theta \;= \frac{g}{\sqrt{g^2+y^2}} \; , \qquad \sin\theta \;= \frac{y}{\sqrt{g^2+y^2}} \tag{12}
$$

come emerge dal calcolo qui sopra. La combinazione ortogonale descrive il campo del fotone

$$
A_\mu = \cos\theta \; B_\mu + \sin\theta \; W^3_\mu \tag{13}
$$

che rimane senza massa: nessun termine massivo per A_μ è infatti emerso dal calcolo. Le masse dei campi di spin 1, descritte qui sopra, sono identificate paragonando la loro azione con l'azione libera di Proca: per fare questo occorre controllare la normalizzazione dei campi ed assicurarsi di riconoscere entrambi i termini con le rispettive normalizzazioni presenti nell'azione di Proca. Per garantire questo i campi A_μ e Z_μ, associati al fotone ed alla particella Z_0, sono stati definiti come combinazioni ortogonali di B_μ e W^3_μ per non modificare la normalizzazione del termine cinetico.

Riassumendo: indicando con (g, y) le costanti di accoppiamento di $SU(2)\times U(1)$, l'angolo debole θ è definito da

$$
\tan\theta = \frac{y}{g} \; , \quad \cos\theta \;= \frac{g}{\sqrt{g^2+y^2}} \; , \quad \sin\theta \;= \frac{y}{\sqrt{g^2+y^2}} \; , \tag{14}
$$

i campi del fotone e dello Z_0 sono definiti da

$$
\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_\mu \\ W^3_\mu \end{pmatrix} \tag{15}
$$

mentre quelli della particella W^+ ed antiparticella W^- dal campo complesso $W_{\mu+}$ e dal suo complesso coniugato $W_{\mu-}$, definiti da

$$
W_{\mu\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(W^1_\mu \mp iW^2_\mu) \; . \tag{16}
$$

Infine le masse sono date da

$$
m^2_W = \frac{v^2 g^2}{4} \; , \qquad m^2_Z = \frac{v^2(g^2+y^2)}{4} \tag{17}
$$

da cui si deduce facilmente la relazione

$$m_W = m_Z \cos\theta \ . \tag{18}$$

Sperimentalmente

$$m_W = 80,4 \text{ GeV} \ , \qquad m_Z = 91,2 \text{ GeV} \ , \qquad \sin^2\theta = 0,231 \ . \tag{19}$$

1.4 Accoppiamento di gauge dei fermioni con γ, Z_0 e $W^\pm$

Abbiamo dedotto dal meccanismo di Higgs gli autostati di massa dei campi di gauge. Esprimiamo ora gli accoppiamenti di gauge in termini di questi campi. Trascurando la dipendenza dai gluoni, un semplice calcolo mostra che

$$\begin{aligned} D_\mu &= \partial_\mu - igW_\mu^a I^a - iyB_\mu Y \\ &= \partial_\mu - ieA_\mu Q - i\frac{g}{\cos\theta} Z_\mu (I^3 - \sin^2\theta \ Q) - i\frac{g}{\sqrt{2}}(W_{\mu+}I^+ + W_{\mu-}I^-) \end{aligned} \tag{20}$$

dove $e \equiv g\sin\theta$ è la costante di accoppiamento dell'elettromagnetismo, $Q \equiv I^3 + Y$, e $I^\pm \equiv I^1 \pm iI^2$ che nella rappresentazione di isospin 1/2 diventano

$$I^\pm = \frac{1}{2}(\sigma^1 \pm i\sigma^2) = \sigma^\pm \ , \qquad \sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad \sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{21}$$

Questa riscrittura rende evidente gli accoppiamenti di gauge dei vari fermioni con il fotone e con le particelle $W^\pm$ e Z_0. Consideriamo alcuni esempi espliciti.

Prendiamo i leptoni della prima famiglia e studiamone i termini della lagrangiana. Per $E_L \sim \binom{\nu_{eL}}{e_L} \sim (1,2)_{-\frac{1}{2}}$ abbiamo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= -\overline{E_L}\gamma^\mu D_\mu E_L \\ &= -\overline{\nu_{eL}}\partial\!\!\!/\nu_{eL} - \overline{e_L}\partial\!\!\!/ e_L - ieA_\mu \, \overline{e_L}\gamma^\mu e_L + i\frac{g}{\sqrt{2}} W_{\mu+} \, \overline{\nu_{eL}}\gamma^\mu e_L + i\frac{g}{\sqrt{2}} W_{\mu-} \, \overline{e_L}\gamma^\mu \nu_{eL} \\ &\quad + i\frac{g}{\cos\theta} Z_\mu \Big(\frac{1}{2}\overline{\nu_{eL}}\gamma^\mu\nu_{eL} + (\sin^2\theta - \frac{1}{2})\overline{e_L}\gamma^\mu e_L\Big) \ , \end{aligned} \tag{22}$$

per $\nu_{eR} \sim (1,1)_0$

$$\mathcal{L}_2 = -\overline{\nu_{eR}}\gamma^\mu D_\mu \nu_{eR} = -\overline{\nu_{eR}}\partial\!\!\!/\nu_{eR} \ , \tag{23}$$

per $e_R \sim (1,1)_{-1}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 &= -\overline{e_R}\gamma^\mu D_\mu e_R \\ &= -\overline{e_R}\partial\!\!\!/ e_R - ieA_\mu \, \overline{e_R}\gamma^\mu e_R + i\frac{g\sin^2\theta}{\cos\theta} Z_\mu \overline{e_R}\gamma^\mu e_R \ . \end{aligned} \tag{24}$$

Sommando questi termini vediamo che l'accoppiamento con A_μ dei leptoni della I famiglia non è chirale, mentre lo sono gli accoppiamenti con $W_{\mu\pm}$ e Z_μ

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{lept,\ Ifam} &= -\overline{\nu_e}\partial\!\!\!/\nu_e - \overline{e}\partial\!\!\!/ e - \mathrm{i}eA_\mu \, \overline{e}\gamma^\mu e + i\frac{g}{\sqrt{2}} W_{\mu+} \overline{\nu_{eL}}\gamma^\mu e_L + i\frac{g}{\sqrt{2}} W_{\mu-} \, \overline{e_L}\gamma^\mu \nu_{eL} \\ &\quad + i\frac{g}{\cos\theta} Z_\mu \Big(\frac{1}{2}\overline{\nu_{eL}}\gamma^\mu\nu_{eL} - \frac{1}{2}\overline{e_L}\gamma^\mu e_L + \sin^2\theta \overline{e}\gamma^\mu e\Big) \end{aligned} \tag{25}$$

dove per evitare confusione abbiamo qui indicato con "e" la costante d'accoppiamento della QED e con "e" il campo di Dirac dell'elettrone.

In generale, gli accoppiamenti di gauge dei fermioni nel settore elettrodebole assumono la seguente forma

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{ed} &= -\sum_f \overline{\psi_f}\gamma^\mu D_\mu \psi_f \qquad (26)\\ &= -\sum_f \overline{\psi_f}\gamma^\mu \partial_\mu \psi_f + ieA_\mu\, J^\mu_{em} + i\frac{g}{\sqrt{2}}W_{\mu+}J^{\mu+} + i\frac{g}{\sqrt{2}}W_{\mu-}\, J^{\mu-} + i\frac{g}{\cos\theta}Z_\mu J^\mu_{(Z)}\end{aligned}$$

dove le varie correnti fermioniche sono definite da

$$\begin{aligned}J^\mu_{em} &= \sum_f \overline{\psi_f}\gamma^\mu Q\psi_f\\ J^{\mu\pm} &= \sum_f \overline{\psi_f}\gamma^\mu I^\pm \psi_f\\ J^\mu_{(Z)} &= \sum_f \overline{\psi_f}\gamma^\mu (I^3 - \sin^2\theta\ Q)\psi_f \qquad (27)\end{aligned}$$

con $Q = I^3 + Y$.

1.5 Teoria efficace di Fermi delle interazioni deboli

Vediamo ora come la teoria efficace di Fermi, che descrive le interazioni deboli a basse energie, emerge dal Modello Standard (MS). Nella lagrangiana del MS il meccanismo di Higgs produce masse per le particelle $W^\pm$ e Z_0. In fenomeni di interazione debole con in gioco energie E molto più basse della massa delle particelle $W^\pm$ e Z_0 ($E << m_W$) questi mediatori non possono essere creati e non si possono propagare come particelle reali, infatti non c'è energia sufficiente che permetta la creazione di queste particelle. Quindi nella lagrangiana si possono trascurare i termini cinetici (i termini con le derivate) che descrivono la propagazione libera dei campi W e Z. Rimangono solo i seguenti contributi per quanto riguarda l'interazione debole per processi di bassa energia

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{eff}_{int.\ deb.} \sim\ & -\frac{1}{2}m_Z^2 Z^\mu Z_\mu - m_W^2 W^\mu_+ W_{\mu-}\\ & -\sum_f \overline{\psi_f}\gamma^\mu\partial_\mu\psi_f + i\frac{g}{\sqrt{2}}W_{\mu+}J^{\mu+} + i\frac{g}{\sqrt{2}}W_{\mu-}\, J^{\mu-} + i\frac{g}{\cos\theta}Z_\mu J^\mu_{(Z)}\ . \qquad (28)\end{aligned}$$

Le equazioni del moto dei campi W e Z sono ora molto semplici: non sono equazioni differenziali, ma equazioni algebriche che possono essere risolte immediatamente

$$\begin{aligned}-m_Z^2 Z_\mu + i\frac{g}{\cos\theta}J_{\mu(Z)} &= 0\\ -m_W^2 W_{\mu-} + i\frac{g}{\sqrt{2}}J_\mu{}^+ &= 0\\ -m_W^2 W_{\mu+} + i\frac{g}{\sqrt{2}}J_\mu{}^- &= 0 \qquad (29)\end{aligned}$$

da cui

$$Z_\mu = \frac{ig}{m_Z^2 \cos\theta} J_{\mu(Z)}$$
$$W_{\mu\mp} = \frac{ig}{m_W^2 \sqrt{2}} J_\mu{}^{\pm} \ . \tag{30}$$

Queste soluzioni possono essere reinserite nell'azione (28) per ottenere

$$\mathcal{L}^{eff}_{int.\ deb.} = -\sum_f \overline{\psi_f} \gamma^\mu \partial_\mu \psi_f - \frac{4G_F}{\sqrt{2}} (J^{\mu+} J_\mu{}^- + J^\mu_{(Z)} J_{\mu(Z)}) \tag{31}$$

dove $G_F = \frac{g^2}{4\sqrt{2} m_W^2}$ è la costante di Fermi. Questa azione riproduce infatti la teoria efficace di Fermi delle interazioni deboli. Riconosciamo anche l'origine delle dimensioni di massa della costante di accoppiamento di Fermi G_F. Ha dimensioni di massa negative, per cui G_F identifica una teoria non-rinomalizzabile. La massa che genera questa dimensionalità è la massa m_W delle particelle $W^\pm$, che come abbiamo discusso è da considerare come il cut-off energetico oltre il quale la teoria efficace non è più affidabile. Tale cut-off segnala la scala a cui occorre introdurre un miglioramento della teoria: il Modello Standard svolge proprio questo scopo.

Sperimentalmente si può misurare la costante di Fermi, ottenendo $G_F = 1,17 \times 10^{-5} \text{GeV}^{-2}$. Ricordando l'espressione di m_W^2 in (17), possiamo esprimere questo valore in termini del valore di aspettazione nel vuoto del campo di Higgs

$$v = (\sqrt{2} G_F)^{-\frac{1}{2}} = 246 \text{ GeV} \ . \tag{32}$$

1.6 Massa dell'Higgs ed autointerazioni

Per analizzare più in dettaglio la lagrangiana del campo di Higgs che innesca la rottura spontanea di simmetria, eq. (7), si può utilizzare l'invarianza di gauge per fissare un gauge opportuno, il gauge unitario, come descritto nel modello di Higgs abeliano. Si possono utilizzare tre delle quattro simmetrie locali contenute in $SU(2) \times U(1)$ per fissare tre condizioni

$$\eta_i(x) = 0 \qquad i = 1, 2, 3 \tag{33}$$

sulle componenti del campo di Higgs in eq. (6), e parametrizzare il rimanente campo reale (il campo di Higgs fisico) come

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix} \ . \tag{34}$$

Il vuoto che rompe la simmetria è ora localizzato in $H(x) = 0$, e le fluttuazioni del campo $H(x)$ attorno a questo vuoto identificano le fluttuazioni fisiche. Inserendo (34) nella lagrangiana in (7) otteniamo la forma esplicita della lagrangiana che descrive la massa dell'Higgs, la struttura delle autointerazioni dell'Higgs e gli accoppiamenti dell'Higgs con i campi di gauge. Trascurando momentaneamente questi ultimi otteniamo

$$\mathcal{L}_{Higgs} = -\frac{1}{2} \partial_\mu H \partial^\mu H - \lambda v^2 H^2 - \lambda v H^3 - \frac{\lambda}{4} H^4 + \Delta\mathcal{L}_{Higgs-gauge} \tag{35}$$

da cui possiamo estrarre la massa dell'Higgs $m_H = \sqrt{2\lambda}\, v$ e riconoscere i vari vertici che descrivono le autointerazioni dell'Higgs. Il valore della costante λ è ignoto, per cui non si conosce il vero valore di m_H: sperimentalmente si è certi che $m_H > 114$ GeV circa.

Passiamo ora ad analizzare i termini di accoppiamento Higgs – campi di gauge. Esplicitando il termine dell'azione con le derivate covarianti (scritte in termini dei campi autostati di massa) agenti sul campo di Higgs nel gauge unitario otteniamo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Higgs-gauge} &= -(D^\mu\phi)^\dagger D_\mu\phi = -|D_\mu\phi|^2 = -\left|\begin{pmatrix} -i\frac{g}{2}W_{\mu+}(v+H) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\mu H + i\frac{g}{2\sqrt{2}\cos\theta}Z_\mu(v+H) \end{pmatrix}\right|^2 \\ &= -\frac{1}{2}\partial^\mu H\partial_\mu H - \frac{1}{8}\frac{g^2v^2}{\cos^2\theta}Z^\mu Z_\mu\Big(1+\frac{H}{v}\Big)^2 - \frac{g^2v^2}{4}W_{\mu+}W_-^\mu\Big(1+\frac{H}{v}\Big)^2 \\ &= -\frac{1}{2}\partial^\mu H\partial_\mu H - \frac{1}{2}m_Z^2 Z_\mu Z^\mu\Big(1+\frac{H}{v}\Big)^2 - m_W^2 W_{\mu+}W_-^\mu\Big(1+\frac{H}{v}\Big)^2 \end{aligned} \tag{36}$$

da cui si riderivano di nuovo le masse delle particelle $W^\pm$ e Z_0 ed in più si leggono le interazioni di queste particelle con l'Higgs. Si noti come la forza di queste interazioni sia proporzionale alla massa della particella con cui l'Higgs interagisce. Da questo calcolo riconosciamo il termine mancante in (35)

$$\Delta\mathcal{L}_{Higgs-gauge} = -\frac{1}{2}m_Z^2 Z_\mu Z^\mu\Big(1+\frac{H}{v}\Big)^2 - m_W^2 W_{\mu+}W_-^\mu\Big(1+\frac{H}{v}\Big)^2 . \tag{37}$$

1.7 Autointerazioni dei campi di gauge

Le autointerazioni dei campi di gauge sono naturalmente incluse in (5) come dettato dalla struttura dei gruppi di gauge. Ricordiamo infatti che per un campo di gauge generico W_μ^a basato su un gruppo semplice, il tensore campo di forza è dato da

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + gf^{abc}W_\mu^b W_\nu^c$$

e quindi il termine dell'azione dovuto al campo di gauge prende la forma

$$-\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2 = -\frac{1}{4}(\partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a)^2 - gf^{abc}\partial^\mu W^{\nu a}W_\mu^b W_\nu^c - \frac{1}{4}g^2 f^{abc}f^{ade}W_\mu^b W_\nu^c W^{\mu d}W^{\nu e} .$$

Per quanto riguarda il settore elettrodebole si possono esprimere questi accoppiamenti in termini dei campi autostati di massa $(A, Z, W^\pm)$. La riscrittura è semplice, sebbene un poco laboriosa, ed è qui sufficiente indicare solo la struttura schematica dei vari termini che emergono

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{gauge-autoint.} &\sim AW_+W_- + ZW_+W_- \\ &+ AAW_+W_- + AZW_+W_- + ZZW_+W_- + W_+W_-W_+W_- \end{aligned} \tag{38}$$

che indicano i possibili vertici presenti nei diagrammi di Feynman.

1.8 Accoppiamenti di Yukawa e masse dei fermioni

I fermioni del modello standard hanno accoppiamenti chirali con i campi di gauge, per cui un termine esplicito di massa non sarebbe gauge invariante. Però si possono includere vertici di interazione trilineari tra due fermioni ed il campo di Higgs, vertici di tipo Yukawa, rinomalizzabili e gauge invarianti. Come vederemo queste interazioni di Yukawa permettono di produrre masse per tutti i fermioni grazie alla rottura spontanea di simmetria, che assegna al campo di Higgs un valore di vuoto non nullo.

Il meccanismo è semplice da capire. Un vertice di Yukawa del tipo $\lambda\overline{\psi}\psi\phi$, con λ costante d'accoppiamento e dove $\phi = v + H$ è il campo di Higgs con valore di aspettazione nel vuoto uguale a v, genera termini del tipo $\lambda v\overline{\psi}\psi + \lambda\overline{\psi}\psi H$, con l'effetto di produrre una massa del fermione ψ proporzionale a λv.

Consideriamo più esplicitamente il caso dell'elettrone, le cui parti sinistrorse e destrorse sono contenute in $E_L \sim \binom{\nu_{eL}}{e_L} \sim (1,2)_{-\frac{1}{2}}$ e $e_R \sim (1,1)_{-1}$. Moltiplicando questi due campi non si può formare un termine bilineare che sia singoletto di $SU(2)$, ma utilizzando il campo di Higgs $\phi \sim (1,2)_{\frac{1}{2}}$ possiamo costruire un termine invariante per $SU(2)$,

$$\overline{E_L} \cdot \phi = (\overline{\nu_{eL}}, \overline{e_L}) \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \overline{\nu_{eL}}\phi^+ + \overline{e_L}\phi^0 \ .$$

Però non è invariante per $U(1)$, infatti il termine ha una carica totale data da $(1,1)_1$. Moltiplicandolo per e_R otteniamo un termine trilinare invariante per l'intero gruppo di gauge, cioè con numeri quantici $(1,1)_0$,

$$\overline{E_L} \cdot \phi\, e_R \ .$$

Inserendo una costante d'accoppiamento λ_e, ed aggiungendo il complesso coniugato per avere termine reale nella lagrangiana, otteniamo un vertice reale e gauge invariante

$$\Delta\mathcal{L}_{e,Yuk} = -\lambda_e \overline{E_L} \cdot \phi\, e_R + c.c. \tag{39}$$

che può essere aggiunto all'azione del MS. Questa interazione di Yukawa fa acquisire una massa all'elettrone. Infatti si può scegliere λ_e reale e positiva, e nel gauge unitario

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{L}_{e,Yuk} &= -\frac{\lambda_e v}{\sqrt{2}}\overline{e_L}e_R\Big(1+\frac{H}{v}\Big) + c.c. = -\frac{\lambda_e v}{\sqrt{2}}(\overline{e_L}e_R + \overline{e_R}e_L)\Big(1+\frac{H}{v}\Big) \\ &= -m_e\overline{e}e\Big(1+\frac{H}{v}\Big) \end{aligned} \tag{40}$$

dove $m_e = \frac{\lambda_e v}{\sqrt{2}}$ è una massa di Dirac per l'elettrone. Oltre al termine di massa si ha un termine di interazione di Yukawa dell'elettrone con il campo di Higgs proporzionale alla massa dell'elettrone.

Si può procedere similmente per il quark d. Usando $Q_L \sim \binom{u_L}{d_L} \sim (3,2)_{\frac{1}{6}}$, $d_R \sim (3,1)_{-\frac{1}{3}}$, e $\phi \sim (1,2)_{\frac{1}{2}}$ possiamo costruire il termine gauge invariante

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{L}_{d,Yuk} &= -\lambda_d\overline{Q_L} \cdot \phi\, d_R + c.c. \\ &= -\frac{\lambda_d v}{\sqrt{2}}\overline{d_L}d_R\Big(1+\frac{H}{v}\Big) + c.c. = -m_d\overline{d}d\Big(1+\frac{H}{v}\Big) \ . \end{aligned} \tag{41}$$

La massa del quark down è data quindi da $m_d = \frac{\lambda_d v}{\sqrt{2}}$ e di nuovo l'interazione di Yukawa del down con l'Higgs è proporzionale alla sua massa.

Come procedere per il quark u? Sappiamo che $u_R \sim (3,1)_{\frac{2}{3}}$. Inoltre $\phi \sim (1,2)_{\frac{1}{2}}$ per cui $\phi^* \sim (1,\bar{2})_{-\frac{1}{2}}$. Ma per $SU(2)$, la 2 e la $\bar{2}$ sono rappresentazioni equivalenti. Infatti abbiamo visto esplicitamente che per $g \in SU(2)$, vale $g^* = \epsilon g \epsilon^{-1}$ con $\epsilon = i\sigma^2$, dove σ^2 è la seconda matrice di Pauli. Quindi g e g^* sono collegate da una trasformazione di similitudine e sono dunque equivalenti. In notazione tensoriale, se v^a indica la 2 (cioè i vettori trasformati da g) e w_a indica la $\bar{2}$ (i vettori trasformati da g^*), allora $w^a = \epsilon^{ab} w_b$ si trasforma nella 2 se ϵ^{ab} è il tensore invariante completamente antisimmetrico di $SU(2)$. Il tensore ϵ^{ab} è scritto come $i\sigma^2$ in forma matriciale. Quindi

$$\tilde{\phi} \equiv i\sigma^2 \phi^* \sim (1,2)_{-\frac{1}{2}}$$

e si può costruire il termine gauge invariante

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{L}_{u,Yuk} &= -\lambda_u \overline{Q_L} \cdot \tilde{\phi}\, u_R + c.c. \\ &= -\frac{\lambda_u v}{\sqrt{2}} \overline{u_L} u_R \Big(1 + \frac{H}{v}\Big) + c.c. = -m_u \overline{u} u \Big(1 + \frac{H}{v}\Big) \end{aligned} \tag{42}$$

che genera la massa $m_u = \frac{\lambda_u v}{\sqrt{2}}$ per il quark up.

Una procedura simile può essere usata per dare massa al neutrino elettronico ν_e, infatti anche i neutrini sembrano avere massa

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{L}_{\nu_e,Yuk} &= -\lambda_{\nu_e} \overline{E_L} \cdot \tilde{\phi}\, \nu_{eR} + c.c. \\ &= -\frac{\lambda_{\nu_e} v}{\sqrt{2}} \overline{\nu_{eL}} \nu_{eR} \Big(1 + \frac{H}{v}\Big) + c.c. = -m_{\nu_e} \overline{\nu_e} \nu_e \Big(1 + \frac{H}{v}\Big) \end{aligned} \tag{43}$$

che $m_{\nu_e} = \frac{\lambda_{\nu_e} v}{\sqrt{2}}$. In generale non sarebbe soddisfacente escludere un termine del genere: è rinormalizzabile, gauge invariante e non viola nessuna simmetria conosciuta. Viceversa sarebbe piuttosto problematico spiegare perchè un termine del genere debba essere esattamente nullo: fissare $\lambda_{\nu_e} = 0$ sembra essere una scelta innaturale. Considerazioni simili sembrano piuttosto suggerire la necessità di dover includere anche un termine di massa di Majorana per il neutrino destrorso ν_{eR}, della forma $M \nu_{eR}^T C^{-1} \nu_{eR} + c.c.$, con C matrice coniugazione di carica che funge da metrica spinoriale e produce uno scalare di Lorentz dallo spinore ν_{eR}. Questo termine è gauge invariante, anche se viola una simmetria globale di numero leptonico (trasformazione di fase $U(1)$ del campo ν_{eR}) che potrebbe effettivamente essere violata in natura.

1.8.1 Matrice di CKM

Nella sezione precedente abbiamo visto come le masse per la prima famiglia di fermioni possano essere introdotte tramite le interazioni di Yukawa. Certamente si possono scrivere termini simili anche per i fermioni delle altre famiglie, ma questo non sarebbe la cosa più generale possibile. Non c'è ragione di escludere possibili accoppiamenti e quindi occorre scrivere il termine di Yukawa più generale: questo in effetti è confermato dai dati sperimentali.

Iniziamo dalle tre famiglie dei quark, che possiamo indicare collettivamente introducendo un indice di famiglia $i = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} Q_L^i \sim \begin{pmatrix} u_L^i \\ d_L^i \end{pmatrix} &= \left\{ \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix} \right\} \sim (3,2)_{\frac{1}{6}} \\ u_R^i &= \{u_R, c_R, t_R\} \sim (3,1)_{\frac{2}{3}} \\ d_R^i &= \{d_R, s_R, b_R\} \sim (3,1)_{-\frac{1}{3}} \end{aligned} \tag{44}$$

Si nota immediatamente che il termine gauge invariante più generale possibile per interazioni tipo Yukawa assume la forma

$$\Delta\mathcal{L}_{quarks,Yuk} = -\lambda_d^{ij}\overline{Q_L^i} \cdot \phi\, d_R^j - \lambda_u^{ij}\overline{Q_L^i} \cdot \tilde{\phi}\, u_R^j + c.c. \tag{45}$$

dove le costanti d'accoppiamento λ_d^{ij} e λ_u^{ij} formano matrici complesse arbitrarie che mescolano i quarks delle differenti famiglie. Nel gauge unitario tale termine assume la forma

$$\Delta\mathcal{L}_{quarks,Yuk} = -\frac{\lambda_d^{ij} v}{\sqrt{2}}\overline{d_L^i} d_R^j \Big(1 + \frac{H}{v}\Big) - \frac{\lambda_u^{ij} v}{\sqrt{2}}\overline{u_L^i} u_R^j \Big(1 + \frac{H}{v}\Big) + c.c. \tag{46}$$

Molte di queste costanti d'accoppiamento non sono osservabili e si possono eliminare con una ridefinizione dei campi. Infatti possiamo operare delle trasformazioni unitarie dei campi dei quark

$$\begin{aligned} u_L^i &\to (L_u)^i_j u_L^j\,, \qquad & u_R^i &\to (R_u)^i_j u_R^j \\ d_L^i &\to (L_d)^i_j d_L^j\,, \qquad & d_R^i &\to (R_d)^i_j d_R^j \end{aligned} \tag{47}$$

dove L_u, L_d, R_u, R_d sono matrici unitarie 3×3. Queste trasformazioni lasciano invariati i termini liberi dell'azione: in notazione matriciale

$$\mathcal{L}_0 = -\overline{u_L}\partial\!\!\!/ u_L \quad \to \quad -\overline{u_L} L_u^\dagger \partial\!\!\!/ L_u u_L = -\overline{u_L}\partial\!\!\!/ u_L \tag{48}$$

dove si è usata la proprietà $L_u^\dagger L_u = 1$ delle matrici unitarie. Similmente per i termini liberi degli altri quarks. In tal modo si vede che l'eq. (46) è equivalente a

$$\Delta\mathcal{L}_{quarks,Yuk} = -\frac{(L_d^\dagger \lambda_d R_d)^{ij} v}{\sqrt{2}}\overline{d_L^i} d_R^j \Big(1 + \frac{H}{v}\Big) - \frac{(L_u^\dagger \lambda_u R_u)^{ij} v}{\sqrt{2}}\overline{u_L^i} u_R^j \Big(1 + \frac{H}{v}\Big) + c.c.\ . \tag{49}$$

La libertà di scegliere le matrici L ed R permette di diagonalizzare le matrici λ degli accoppiamenti di Yukawa con elementi reali e positivi sulla diagonale. Quindi si può sempre scegliere di diagonalizzare gli accoppiamenti di Yukawa ed i rispettivi termini di massa

$$\Delta\mathcal{L}_{quarks,Yuk} = -\sum_{i=1}^{3} \frac{\lambda_d^i v}{\sqrt{2}}\overline{d^i} d^i \Big(1 + \frac{H}{v}\Big) - \sum_{i=1}^{3} \frac{\lambda_u^i v}{\sqrt{2}}\overline{u^i} u^i \Big(1 + \frac{H}{v}\Big) \tag{50}$$

dove le masse dei quarks sono naturalmente identificate da $m_d^i = \frac{\lambda_d^i v}{\sqrt{2}}$ e $m_u^i = \frac{\lambda_u^i v}{\sqrt{2}}$.

Le trasformazioni unitarie che ci hanno permesso di diagonalizzare le masse lasciano però delle tracce negli accoppiamenti di gauge. Ricordando la struttura generale riportata nelle eq. (26) e (27): tutte le correnti rimangono invariate tranne $J^{\pm}_{\mu}$. Infatti il contributo dei quarks a $J^{\mu +}$ diventa

$$J^{\mu +}_{quarks} = \overline{u^i_L}\gamma^\mu d^i_L \quad \rightarrow \quad \overline{u^i_L}\gamma^\mu (L^\dagger_u L_d)^{ij} d^i_L \tag{51}$$

e similmente per la corrente $J^{\mu -} = (J^{\mu +})^\dagger$. Vediamo comparire nelle interazioni di gauge la matrice unitaria 3×3 definita da $V \equiv L^\dagger_u L_d$, denominata matrice CKM (Cabibbo-Kobayashi-Maskawa) e descritta da quattro parametri osservabili: 3 angoli ed 1 fase (una matrice matrice unitaria 3×3 contiene in tutto 9 parametri, 3 angoli e 6 fasi; con trasformazioni di fase dei 6 quarks si hanno 5 differenze di fase che possono essere utilizzate per ridurre i parametri della matrice di CKM ad un totale di 3 angoli ed 1 fase).

Non descriveremo qui una parametrizzazione esplicita della matrice V, e neppure ne descriveremo le conseguenze esplicite, come la violazione di CP indotta dalla fase presente nella matrice. Per avere un po' di intuizione studieremo il caso esplicito che si avrebbe se ci considerassero solo due famiglie, quelle dei quarks più leggeri. In tal caso la matrice V sarebbe una matrice unitaria 2×2 contenente 4 parametri: 1 angolo e e 3 fasi. Ora con trasformazioni di fase dei 4 quarks si possono utilizzare 3 differenze di fase che sono usate per ridurre i parametri della matrice V ad un solo angolo, detto angolo di Cabibbo,

$$V = \begin{pmatrix} \cos\theta_c & \sin\theta_c \\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c \end{pmatrix} \tag{52}$$

e la corrente debole carica $J^{\mu +}_{quarks}$ diventa

$$\begin{aligned} J^{\mu +}_{quarks} &= \overline{u_L}\gamma^\mu d_L \cos\theta_c + \overline{u_L}\gamma^\mu s_L \sin\theta_c \\ &\quad -\overline{c_L}\gamma^\mu d_L \sin\theta_c + \overline{c_L}\gamma^\mu s_L \cos\theta_c \\ &= \overline{u_L}\gamma^\mu d'_L + \overline{u_L}\gamma^\mu s'_L \end{aligned} \tag{53}$$

dove compaiono gli autostati di interazione debole

$$\begin{pmatrix} u_L \\ d'_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L\cos\theta_c + s_L \sin\theta_c \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} c_L \\ s'_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_L \\ s_L\cos\theta_c - d_L \sin\theta_c \end{pmatrix}$$

che sono i sapori collegati dai bosoni $W^{\pm}$ nei vertici elementari. Con tre famiglie si ha una struttura simile, sebbene un po' più complessa, con gli autostati di interazione debole definiti da

$$\begin{pmatrix} u^i_L \\ d^{i\,\prime}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_L \\ V^{ij} d^j_L \end{pmatrix}.$$

1.8.2 Matrice di PMNS

Una cosa simile avviene nel settore dei leptoni. Introducendo un indice di famiglia $i = 1, 2, 3$ per descrivere i vari leptoni

$$\begin{aligned} E^i_L \sim \begin{pmatrix} \nu^i_L \\ e^i_L \end{pmatrix} &= \left\{ \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix} \right\} \sim (1,2)_{-\frac{1}{2}} \\ \nu^i_R &= \{\nu_{eR}, \nu_{\mu R}, \nu_{\tau R}\} \sim (1,1)_0 \\ e^i_R &= \{e_R, \mu_R, \tau_R\} \sim (1,1)_{-1} \end{aligned} \tag{54}$$

possiamo scrivere il termine di Yuakawa gauge invariante più generale possibile

$$\Delta\mathcal{L}_{lept,Yuk} = -\lambda_e^{ij}\overline{E_L^i}\cdot\phi\, e_R^j - \lambda_\nu^{ij}\overline{E_L^i}\cdot\tilde{\phi}\,\nu_R^j + c.c. \tag{55}$$

dove λ_e^{ij} e λ_ν^{ij} sono le costanti d'accoppiamento scritte in forma di matrici complesse che mescolano i leptoni delle differenti famiglie. Nel gauge unitario tale interazione assume la forma

$$\Delta\mathcal{L}_{lept,Yuk} = -\frac{\lambda_e^{ij}v}{\sqrt{2}}\overline{e_L^i}e_R^j\Big(1+\frac{H}{v}\Big) - \frac{\lambda_\nu^{ij}v}{\sqrt{2}}\overline{\nu_L^i}\nu_R^j\Big(1+\frac{H}{v}\Big) + c.c. \tag{56}$$

da dove si possono estrarre le matrici di massa dei leptoni $m_e^{ij} = \frac{\lambda_e^{ij}v}{\sqrt{2}}$ e $m_\nu^{ij} = \frac{\lambda_\nu^{ij}v}{\sqrt{2}}$. Come nel caso dei quarks, molte di queste costanti d'accoppiamento non sono osservabili e si possono eliminare con una ridefinizione dei campi. Con trasformazioni unitarie della forma

$$\begin{aligned} \nu_L^i &\to (L_\nu)^i_j\nu_L^j\,, \qquad & \nu_R^i &\to (R_\nu)^i_j\nu_R^j \\ e_L^i &\to (L_e)^i_j e_L^j\,, \qquad & e_R^i &\to (R_e)^i_j e_R^j \end{aligned} \tag{57}$$

dove L_ν, L_e, R_ν, R_e sono matrici unitarie 3×3 che lasciano invariati i termini liberi dell'azione, si ottiene

$$\Delta\mathcal{L}_{lept,Yuk} = -\frac{(L_e^\dagger\lambda_e R_e)^{ij}v}{\sqrt{2}}\overline{e_L^i}e_R^j\Big(1+\frac{H}{v}\Big) - \frac{(L_\nu^\dagger\lambda_\nu R_\nu)^{ij}v}{\sqrt{2}}\overline{\nu_L^i}\nu_R^j\Big(1+\frac{H}{v}\Big) + c.c.\,. \tag{58}$$

Infine, scegliendo opportunamente le matrici L ed R possiamo diagonalizzare le matrici λ con elementi reali e positivi sulla diagonale, ottenendo

$$\Delta\mathcal{L}_{lept,Yuk} = -\sum_{i=1}^{3}\frac{\lambda_e^i v}{\sqrt{2}}\overline{e^i}e^i\Big(1+\frac{H}{v}\Big) - \sum_{i=1}^{3}\frac{\lambda_\nu^i v}{\sqrt{2}}\overline{\nu^i}\nu^i\Big(1+\frac{H}{v}\Big)\,. \tag{59}$$

Le masse dei leptoni sono date da $m_e^i = \frac{\lambda_e^i v}{\sqrt{2}}$ e $m_\nu^i = \frac{\lambda_\nu^i v}{\sqrt{2}}$.

Le trasformazioni unitarie che ci hanno permesso di diagonalizzare le masse lasciano tracce negli accoppiamenti di gauge. Ricordando la struttura generale riportata nelle eq. (26) e (27) vediamo che tutte le correnti rimangono invariate tranne $J_\mu^\pm$: il contributo dei leptoni a $J^{\mu+}$ diventa

$$J^{\mu+}_{lept} = \overline{\nu_L^i}\gamma^\mu e_L^i \quad\to\quad \overline{\nu_L^i}\gamma^\mu P^{ij}e_L^i \tag{60}$$

dove la matrice unitaria 3×3 data da $P\equiv L_\nu^\dagger L_e$ è denominata matrice PMNS (Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata). Naturalmente anche la corrente $J^{\mu-} = (J^{\mu+})^\dagger$ viene modificata. In assenza di masse di Majorana per i neutrini destrorsi la matrice PMNS può essere parametrizzata da quattro parametri osservabili, 3 angoli ed 1 fase, proprio come nel caso della matrice CKM.

In realtà resta aperta la possibilità teorica di assegnare masse di Majorana ai neutrini destrorsi $\nu_R^i \sim (1,1)_0$. Per ciascun neutrino un termine libero della forma

$$\mathcal{L} = -\overline{\nu_R}\partial\!\!\!/\nu_R - M(\nu_R^T C^{-1}\nu_R + c.c.)$$

contiene un termine di massa di Majorana M che risulta essere gauge invariante, sebbene rompa la simmetria rigida $U(1)$ associata al numero fermionico $\nu_R \to e^{i\alpha}\nu_R$. Nel caso fisico di tre neutrini, una eventuale matrice di masse di Majorana può sempre essere diagonalizzata. Però una volta operata questa diagonalizzazione, non si possono più usare trasformazioni di fase perchè, come abbiamo descritto, queste non sono simmetrie del termine di massa di Majorana. In tal caso la matrice di PMNS conterrebbe 6 parametri fisici, 3 angoli e 3 fasi (2 fasi non sono più eliminabili con trasformazioni di fase). La possibile presenza di masse di Majorana rende forse più plausibile la piccolezza delle masse dei neutrini tramite il "meccanismo dell'altalena" ("see-saw-mechanism"): schematicamente masse di Dirac m e masse di Majorana M sono descritte da un termine di massa della forma

$$\mathcal{L}_\nu^{masse} \sim (\nu_L \;\; \nu_R) \left(\begin{array}{cc} 0 & m \\ m & M \end{array} \right) \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R \end{pmatrix}$$

ed assumendo masse di Dirac m dell'ordine di grandezza delle masse degli altri leptoni e quarks (sono masse che derivano dal settore di Yukawa con il meccanismo di Higgs) e masse di Majorana $M \sim \mathcal{O}(\text{TeV})$, si ottengono autostati di massa con autovalori $m_1 \sim M$ e $m_2 \sim \frac{m^2}{M}$, producendo masse m_2 naturalmente piccole, ad esempio $\mathcal{O}(10^{-2}\text{eV})$.

1.8.3 Oscillazioni dei neutrini

La matrice di mixing di PMNS descrive gli autostati di interazione debole dei leptoni come combinazioni lineari degli autostati di massa. Questo spiega facilmente il fenomeno di oscillazione dei neutrini, congetturato da Pontecorvo ed usato, ad esempio, per spiegare il problema dei neutrini solari. Schematicamente possiamo indicare con $|\nu_\alpha\rangle$ con $\alpha = e, \mu, \tau$ gli autostati di interazione debole (sapore), e con $|\nu_i\rangle$ con $i = 1, 2, 3$ gli autostati di massa. Ora sappiamo che

$$|\nu_i\rangle = P_{i\alpha}|\nu_\alpha\rangle \; , \qquad |\nu_\alpha\rangle = P^\dagger_{\alpha i}|\nu_i\rangle \; , \qquad P \equiv L_\nu^\dagger L_e$$

dove la matrice unitaria P è la matrice di PMNS. Con queste notazioni possiamo studiare la propagazione libera dei neutrini. In assenza di interazioni la propagazione libera di un fascio di neutrini prodotti nel punto $x^\mu = 0$ dello spaziotempo è descritto da

$$|\nu_i(x)\rangle = e^{-i(E_i t - \vec{p}_i \cdot \vec{x})}|\nu_i\rangle \tag{61}$$

Nel limite ultrarelativistico $p_i = |\vec{p}_i| >> m_i$. Con un fascio di neutrini approssimativamente monocromatici possiamo porre $p_i = E$ e valutare

$$E_i = \sqrt{\vec{p}_i^{\,2} + m_i^2} = p_i + \frac{m_i^2}{2p_i} + ... \sim E + \frac{m_i^2}{2E} \tag{62}$$

Per una propagazione ad una distanza L, e con velocità ultrarelativistiche $v_i \sim c = 1 \to |\vec{x}| = L = t$, possiamo valutare

$$|\nu_i(L)\rangle = e^{-i(E + \frac{m_i^2}{2E} - E)L}|\nu_i\rangle = e^{-i\frac{m_i^2 L}{2E}}|\nu_i\rangle \; . \tag{63}$$

La probabilità di produrre neutrini di sapore α e osservare neutrini β ad una distanza L è quindi data da

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\alpha\to\beta} &= |\langle\nu_\beta|\nu_\alpha(L)\rangle|^2 = \Big|\sum_{ij}\langle\nu_j|P_{j\beta}P^\dagger_{\alpha i}|\nu_i\rangle e^{-i\frac{m_i^2 L}{2E}}\Big|^2 \\
&= \Big|\sum_i P^\dagger_{\alpha i}P_{i\beta}e^{-i\frac{m_i^2 L}{2E}}\Big|^2 . \qquad (64)
\end{aligned}$$

Per masse identiche $m_1 = m_2 = m_3$ non si hanno oscillazioni, $\mathcal{P}_{\alpha\to\beta} = \delta_{\alpha\beta}$. Differenze di massa producono oscillazioni di neutrino.

Nel caso di solo due neutrini si ha una formula piuttosto semplice. In tal caso la matrice di PMNS assume la forma

$$P = \begin{pmatrix} \cos\theta_p & \sin\theta_p \\ -\sin\theta_p & \cos\theta_p \end{pmatrix}$$

e per $\alpha \neq \beta$ si calcola da (64)

$$\mathcal{P}_{\alpha\to\beta} = \sin^2(2\theta_p)\,\sin^2\Big(\frac{\Delta m^2 L}{4E}\Big) \qquad (65)$$

con θ_p angolo di mixing e $\Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$. Questa approssimazione a due neutrini è appropriata per il caso dei "neutrini solari", che comporta il mescolamento di ν_e e di ν_X, dove ν_X indica una combinazione lineare di ν_μ e ν_τ, e per i "neutrini atmosferici", dove si mescolano ν_μ e ν_τ. Con tre neutrini, le oscillazioni contengono anche possibili violazioni di CP.

2 Oltre il Modello Standard

Il modello standard è incredibilmente accurato nel descrivere la fisica del microcosmo. Tuttavia si pensa che sia una teoria efficace, valida ad energie più basse di qualche TeV, che necessita di modifiche ultraviolette per risolvere alcuni problemi teorici e di principio. In prima istanza non è completo, in quanto non include la gravità, interazione fondamentale trascurabile nella fisica delle particelle quando le energie in gioco sono sufficientemente più basse della massa di Planck, $M_{Pl} \sim 10^{19}$ GeV. L'inclusione della gravità porta ad una teoria di campo (modello standard più gravità) non-rinormalizzabile. Probabilmente questo indica che tale modello debba essere completato da una teoria ancor più fondamentale, emergente alla scala di Planck. L'intuizione fisica proviene dalla teoria efficace delle interazioni deboli di Fermi, che è una teoria non-rinormalizzabile: ha infatti una costante d'accoppiamento G_F con dimensioni di massa negative che identifica una scala di massa (la massa dei bosoni $W^\pm$ e Z_0) a cui emerge nuova fisica. Similmente la gravità ha una costante d'accoppiamento con dimensioni di massa negative, che la rende non-rinormalizzabile, ma che al tempo stesso indica una scala energetica (la massa di Planck) a cui dovrebbero emergere nuovi meccanismi fisici.

Problemi più cogenti ed immediati sono collegati al problema della gerarchia (perchè la massa dell'Higgs è piccola rispetto a scale energetiche più alte, come ad esempio la massa di Planck? Infatti correzioni radiative tendono a rendere le masse degli scalari molto grandi).

Inoltre il MS sembra generare una costante cosmologica enorme, e per di più non sembra possedere buoni candidati per descrivere la materia oscura. Inoltre, potrebbero esistere delle unificazioni tra le diverse forze del modello standard, proprio come l'elettromagnetismo unifica fenomeni elettrici e magnetici.

Varie teorie sono state sviluppate al riguardo. Gli esempi più conosciuti includono:
- teorie con settore di Higgs non minimale e con più campi scalari;
- teorie di grande unificazione (GUT), che tentano di unificare le tre forze di gauge presenti nel MS;
- teorie tipo "technicolor", che ipotizzano costituenti ancor più elementari (preoni) della particella di Higgs e dei fermoni, legati da forze molto forti ("technicolor", perchè ispirate alla QCD che descrive cariche di "colore");
- teorie supersimmetriche, che includono una nuova simmetria, la supersimmetria, che relaziona bosoni e fermioni, e che deve essere necessariamente rotta (non è manifestamente visibile nello spettro fisico), il suo punto di forza è di proporre soluzioni al problema della gerarchia;
- teorie di supergravità, che sono modelli di gravità con supersimmetria;
- teoria delle superstringhe, che include automaticamente la gravità quantistica: interpreta le particelle come oggetti unidimensionali e non come oggetti puntiformi, prevede tra l'altro dimensioni spaziali extra e si riduce a basse energie a teorie di supergravità.

Come breve esempio di una teoria che estende il modello standard descriviamo alcuni elementi della teoria GUT basata sul gruppo $SU(5)$, che descrive l'unificazione delle tre forze di gauge in una sola forza di gauge basata sul gruppo $SU(5)$

2.1 GUT $SU(5)$

Innanzi tutto conviene descrivere i fermioni del modello standard in termini dei soli campi sinistrosi (campi destrorsi sono presenti come coniugati di Dirac dei campi sinistrorsi) come segue

$\begin{pmatrix} \nu^i_{eL} \\ e^i_L \end{pmatrix}$	$\nu^{c,i}_{eL}$	$e^{c,i}_L$	$\begin{pmatrix} u^i_L \\ d^i_L \end{pmatrix}$	$u^{c,i}_L$	$d^{c,i}_L$
$(1,2)_{-\frac{1}{2}}$	$(1,1)_0$	$(1,1)_1$	$(3,2)_{\frac{1}{6}}$	$(\overline{3},1)_{-\frac{2}{3}}$	$(\overline{3},1)_{\frac{1}{3}}$

dove i campi "coniugati di carica" sono indicati con un indice "c" e descrivono antiparticelle sinistrorse (ed esempio, e^c_L indica ii positrone sinistrorso e similmente u^c_L l'antiquark up sinistrorso). La trasformazione "coniugazione di carica" scambia particelle con antiparticelle. Ad esempio, possiamo definire la "coniugazione di carica" per un campo scalare ϕ ed il suo complesso coniugato ϕ^*, carichi per $U(1)$, che è data da $\phi^c = \phi^*$ e $(\phi^c)^* = \phi$. Chiaramente questa operazione scambia particelle con antiparticelle. Per un campo di Dirac ψ tale trasformazione assume la forma $\psi^c = C\overline{\psi}^T$, dove C è la matrice coniugazione di carica che soddisfa $C\gamma^{\mu T}C^{-1} = -\gamma^\mu$. Per il momento questi dettagli algebrici non sono importanti e possono essere tralasciati.[1]

Come vedremo il gruppo $SU(5)$ unifica tutte le forze descritte da $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$. Si avrà una sola costante di accoppiamento invece che tre. Inoltre i sei tipi di rappresentazioni del gruppo di gauge del MS, che sono presenti in ciascuna famiglia, saranno raggruppati in solo tre rappresentazioni di $SU(5)$, le rappresentazioni $\overline{5}$, 10 ed 1.

Innanzi tutto vediamo come $SU(3)\times SU(2)\times U(1)\subset SU(5)$. Un elemento $g\in SU(5)$ è dato da una matrice unitaria 5×5 con determinante uguale ad 1. In notazione ovvia il sottogruppo $SU(3)\times SU(2)$ è dato da

$$g=\begin{pmatrix} SU(3) & 0 \\ 0 & SU(2) \end{pmatrix}$$

mentre $U(1)$ da

$$g=\begin{pmatrix} e^{-\frac{i\alpha}{3}}I_{3\times 3} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\alpha}{2}}I_{2\times 2} \end{pmatrix}$$

dove $I_{n\times n}$ indica la matrice identità $n\times n$.

Consideriamo la rappresentazione fondamentale, la 5, descritta da un vettore v^m, che si trasforma come $v^m\rightarrow v^{m\prime}=g^m{}_n v^n$. La trasformazioni infinitesime sono generate dai

[1]L'equazione di Dirac per il campo dell'elettrone in un campo elettromagnetico A_μ

$$\Big[\gamma^\mu(\partial_\mu+ieA_\mu)+m\Big]\psi=0 \tag{66}$$

descrive automaticamente anche le corrispondenti antiparticelle, i positroni. Naturalmente si potrebbe descrivere la stessa fisica usando il campo del positrone ψ^c che soddisfa l'equazione

$$\Big[\gamma^\mu(\partial_\mu-ieA_\mu)+m\Big]\psi^c=0 \tag{67}$$

e include gli elettroni come antiparticelle del positrone. La relazione che collega il campo dell'elettrone ψ con il campo del positrone ψ^c è conosciuta come "coniugazione di carica". Per derivarla esplicitamente occorre dedurre la (67) dalla (66), mostrando così che sono formulazioni equivalenti della stessa fisica. Questo può essere fatto prendendo il complesso coniugato dell'equazione (66)

$$\Big[\gamma^{\mu *}(\partial_\mu-ieA_\mu)+m\Big]\psi^*=0\ . \tag{68}$$

Ricordando le relazioni $\overline{\psi}\equiv\psi^\dagger\beta=\psi^\dagger i\gamma^0$ e

$$\beta\gamma^\dagger\beta=-\gamma^\mu\ , \qquad (\beta \text{ matrice simmetrica}) \tag{69}$$

si può cercare una matrice C tale che

$$C\beta\gamma^{\mu *}(C\beta)^{-1}=\gamma^\mu \tag{70}$$

ed ottenere da (68)

$$\Big[C\beta\gamma^{\mu *}(C\beta)^{-1}(\partial_\mu-ieA_\mu)+m\Big]C\beta\psi^*=0 \tag{71}$$

che corrisponde alla (67) se definiamo $\psi^c\equiv C\beta\psi^*=C\overline{\psi}^T$. Si noti che utilizzando la (69) la (70) diventa

$$C\gamma^{\mu T}C^{-1}=-\gamma^\mu\ . \tag{72}$$

Che tale matrice esista può essere verificato tramite una costruzione esplicita.

generatori infinitesimi, che per le parti di $SU(3) \times SU(2) \times U(1) \subset SU(5)$ sono dati da

$$T^A = \begin{pmatrix} \frac{\lambda^A}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad SU(3)$$

$$I^a = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^a}{2} \end{pmatrix} \qquad\qquad SU(2)$$

$$Y = \sqrt{\frac{3}{5}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} I_{3\times 3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} I_{2\times 2} \end{pmatrix} \qquad\qquad U(1)$$

La 5 di $SU(5)$ si decompone come $v^m = (v^\alpha, v^i)$, con $\alpha = 1, 2, 3$ ed $i = 4, 5$. Quindi la 5 si decompone sotto il sottogruppo $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ come

$$5 \to (3, 1)_{-\frac{1}{3}} \oplus (1, 2)_{\frac{1}{2}} \ .$$

Come conseguenza

$$\overline{5} \sim v_m = (v_\alpha, v_i) \to (\overline{3}, 1)_{\frac{1}{3}} \oplus (1, 2)_{-\frac{1}{2}}$$

ed un fermione in questa rappresentazione descrive naturalmente i fermioni d_L^c e E_L.

La 10 può essere descritta da un tensore antisimmetrico a^{mn} ($5 \times 5 = 10 + 15$). Quindi

$$10 \sim a^{mn} = (a^{\alpha\beta}, a^{\alpha i}, a^{ij}) \to (\overline{3}, 1)_{-\frac{2}{3}} \oplus (3, 2)_{\frac{1}{6}} \oplus (1, 1)_1$$

e può descrivere u_L^c, Q_L e e_L^c.

Infine lo scalare $1 \sim (1, 1)_0$ descrive l'antineutrino sinistrorso ν_L^c.

Tre fermioni nelle rappresentazioni $\overline{5}, 10$ ed 1 descrivono una unificazione parziale dei fermioni di una famiglia. Tre copie di questi fermioni descrivono le tre famiglie del MS.

Passiamo ora ad analizzare i bosoni di gauge del gruppo $SU(5)$. Ce ne sono 24, tanti quante le dimensioni del gruppo o, equivalentemente, le dimensioni della rappresentazione aggiunta

$$W_\mu^a \sim (W_\mu)^m{}_n$$

Ricordiamo infatti che $5 \times \overline{5} = 1 \oplus 24$, con la 24 che corrisponde ad un tensore $W^m{}_n$ senza traccia. Tralasciando l'indice di spaziotempo, la rappresentazione aggiunta si decompone in

$$\begin{aligned} W^m{}_n &= (\tilde{W}^\alpha{}_\beta, \quad \tilde{W}^i{}_j, \quad W, \quad W^\alpha{}_i, \quad W_\alpha{}^i) \\ &\to (8, 1)_0 \oplus (1, 3)_0 \oplus (1, 1)_0 \oplus (3, 2)_{-\frac{5}{6}} \oplus (\overline{3}, 2)_{\frac{5}{6}} \end{aligned} \tag{73}$$

dove la tilde su $\tilde{W}$ indica "senza traccia", e W rappresenta la parte tolta nelle traccie. Vediamo quindi come i bosoni di gauge di $SU(3)$, $SU(2)$ ed $U(1)$ sono unificati nei bosoni di gauge di $SU(5)$. I bosoni di gauge rimanenti sono detti "lepto-quark", perchè permettono la trasformazione di leptoni in quarks e viceversa, permettendo in particolare il decadimento del protone. Un meccanismo di Higgs opportuno dovrà rendere questi ultimi molto massivi. Scegliendo questa scala dell'ordine di 10^{15} GeV, porta ad una vita media del protone di circa 10^{30} anni. Il fatto che sperimentalmente il protone abbia una vita media maggiore di 10^{32} anni pone dei vincoli molto stretti a questo modello, che deve essere modificato per tener conto di questo fatto.

La teoria $SU(5)$ predice anche il valore dell'angolo debole θ. Nel settore elettrodebole l'interazione di gauge dei fermioni è della forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{int} &\sim gW_\mu^A\overline{\psi}\gamma^\mu T^A\psi \\
&= gW_\mu^a\overline{\psi}\gamma^\mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^a}{2} \end{pmatrix}\psi + \underbrace{\sqrt{\frac{3}{5}}g}_{y}\, B_\mu\overline{\psi}\gamma^\mu \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}I_{3\times 3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}I_{2\times 2} \end{pmatrix}\psi + ... \qquad (74)
\end{aligned}$$

da cui

$$\tan\theta = \frac{y}{g} = \sqrt{\frac{3}{5}} \qquad \rightarrow \qquad \sin^2\theta = \frac{3}{8} \sim 0,385\ .$$

Questo valore è valutato alla scale di unificazione ($\sim 10^{15}$ GeV). Calcoli teorici con il gruppo di rinormalizzazione portano a basse energie ($\sim$ GeV) ad un valore di $\sin^2\theta = 0,214$. Questo risultato non sembra molto compatibile con il valore sperimentale di $\sin^2\theta = 0,232$, anche se non è poi così male, e forse qualcosa di vero c'è in $SU(5)$.

Teorie GUT basate sul gruppo $SO(10)$ sono anche molto interessanti. Tale gruppo possiede una rappresentazione, la 16, che può unificare tutti i fermioni di una famiglia. Il settore di Higgs risulta però molto complicato. Una catena di gruppi molto interessante è data da

$$SU(3)\times SU(2)\times U(1) \subset SU(5) \subset SO(10) \subset E_6 \subset E_7 \subset E_8$$

con E_8 che emerge molto naturalmente nella teoria delle stringhe.