

Lezione 4:

LA TEORIA QUANTISTICA: problema o risorsa?

Problemi con la teoria quantistica (?)

- il paradosso EPR
- la teoria delle variabili nascoste
- la disuguaglianza di Bell

Risorse della teoria quantistica

- un computer quantistico
- crittografia, teletrasporto, ...

Il paradosso EPR

Nel 1935, Einstein, Podolsky e Rosen pubblicano un articolo, giungendo a conclusioni che influenzeranno moltissimo il dibattito della comunità internazionale e anche le ricerche future nel campo.

E.P.R. partono da due ipotesi:

1. *Realismo*:

ogni teoria fisica, per essere completa, deve contenere tutti gli “elementi di realtà”: ovvero deve essere possibile attribuire a un sistema una determinata proprietà se siamo in grado (almeno in linea di principio) di prevederla prima di fare un esperimento su di esso.

2. *Località*:

gli elementi di realtà posseduti da un sistema non possono venire influenzati istantaneamente a distanza.

Analizzano quindi l'esperimento precedente con una coppia di fotoni entangled, supponendo per esempio che Alice misuri -1. Si può concludere che: poichè Alice dopo la misura sul fotone A sa con certezza che il fotone B ha polarizzazione verticale, il fotone B deve avere la proprietà “reale” di essere polarizzato verticalmente anche prima della misura di Alice (su A) e quindi deve passare con assoluta certezza attraverso un filtro con asse verticale anche prima che Alice effettui la sua misura.

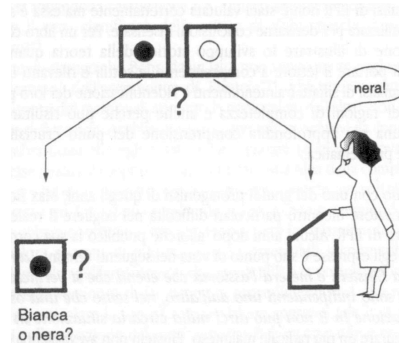
Ma questo è contraddetto sia dalla teoria (prima della misura B è in una sovrapposizione di stati con polarizzazione verticale e orizzontale), sia dagli esperimenti che si possono compiere su di esso.

E.P.R. concludono:

la teoria quantistica non è una teoria completa.

Osservazioni.

- Questo tipo di ragionamento non può essere applicato al mondo classico, dove possiamo considerare un esperimento simile: lo sperimentatore sa che nelle due scatole ci sono due palline di colore diverso (b/n) e guardando in una sola delle scatole ha accesso anche all'informazione relativa al colore dell'altra.



Ma il punto del paradosso E.P.R. sta nel fatto che, secondo la logica e gli esperimenti della meccanica quantistica, non possiamo sostenere che la seconda pallina avesse un colore definito prima dell'osservazione del colore dell'altra, cosa che invece facciamo seguendo la logica classica.

- Le conclusioni di E.P.R. si basano postulando due principi che, messi insieme, vengono definiti: *realismo locale*.

È evidente che l'analisi dell'entanglement porta a concludere che tale ipotesi di realismo locale non è valida nella teoria quantistica che abbiamo presentato.

- Einstein (e P. e R.) non vogliono rinunciare ad esso e possono quindi solo concludere che la teoria è incompleta. Deve esserci qualche altra cosa, che ci sta sfuggendo, in grado di risolvere questo paradosso (teoria delle variabili nascoste, Bell).

- La scuola "ortodossa", capitanata da Heisenberg e Bohr, non accetta questa conclusione e continua ad insistere sul fatto che nel mondo quantistico non è possibile attribuire una certa proprietà ad un sistema prima di avere fatto delle misure su di esso: si preferisce in questo caso abbandonare l'ipotesi di realismo.

- Ma la questione è a tutt'oggi ancora irrisolta.

Feynman: << *Tutto ciò mi rende estremamente confuso, specialmente quando consideriamo che anche se possiamo consistentemente considerarci osservatori esterni quando guardiamo il resto del mondo, il resto del mondo allo stesso tempo ci sta osservando ... Vuol forse dire che le mie osservazioni diventano reali solo quando osservo un osservatore che osserva qualcosa che accade? Questo è veramente un punto di vista orribile. Ritieni seriamente che senza un osservatore non ci sia una realtà? Quale osservatore? Una mosca è un osservatore? Una stella è un osservatore? C'era qualche realtà antecedente all'anno 109 prima di Cristo, prima che si sviluppasse la vita? Oppure sei tu l'osservatore? Allora ci sarà qualche realtà per il mondo dopo che sarai morto? Conosco un certo numero di fisici rispettabili che ha stipulato un'assicurazione sulla vita.>>*

Forse, la risposta maggioritaria è sempre stata quella secondo la quale un fisico non dovrebbe occuparsi di tali questioni, visto anche gli enormi successi che la teoria quantistica ha accumulato in questo secolo di storia ... ma qui il problema è diventato quello di dimostrare che la meccanica quantistica è una teoria consistente e completa.

La teoria delle variabili nascoste

Se si accetta la conclusione di EPR, secondo i quali la teoria quantistica non è completa, si deve affrontare il problema di come completarla (in senso deterministico).

Sarà necessario ipotizzare l'esistenza di una serie di parametri, che potrebbero essere sperimentalmente inaccessibili (da cui il nome di *variabili nascoste*), tali che:

- specificano in modo completo lo stato di un qualunque sistema fisico, rendendolo deterministico;
- sono determinate con un certo grado di incertezza in un qualunque esperimento, sicchè l'esito di quest'ultimo diventa probabilistico;

Inoltre è necessario che:

- fissato lo stato del sistema tramite la conoscenza delle variabili nascoste, tutte le osservabili assumano un valore preciso;
- il procedimento di preparazione di uno stato per un esperimento, deve introdurre una incertezza tale per cui la statistica dei valori delle osservabili coincida con le previsioni della meccanica quantistica.

⇒ EPR (1935): è necessario aggiungere elementi di realtà;

⇒ Von Neumann (1932- I fondamenti matematici della meccanica quantistica): un completamento deterministico della teoria non risulta possibile. È un teorema, ma ...

⇒ Bohm (1952, ...): introduce una teoria con variabili nascoste *non-locali* (onda pilota di de Broglie, ...)

⇒ Bell (1964): si accorge che il teorema di von Neumann ha una validità limitata (assume un'ipotesi che non è sempre verificata in un sistema quantistico) e definisce rigorosamente cosa si deve intendere per **variabili nascoste locali**.

Ipotesi di Bell:

- Esiste un modo di specificare completamente lo stato di un sistema;
- Tale specificazione assegna le probabilità degli esiti di una qualunque misura.
- Dato un sistema composto da due sottosistemi A,B che vengono osservati con due apparati sperimentali che misurano l'osservabile "a" e "b" rispettivamente, assumiamo che *la probabilità di ottenere una coppia di risultati (a=Q,b=R) in una misura congiunta deve essere il prodotto delle probabilità di ottenere ciascuno di essi indipendentemente dal fatto che l'altra misura venga eseguita o meno:*

$$p(a,b;Q,R) = p(a,*,Q) \times p(b,*,R)$$

La disuguaglianza di Bell

(Bell 1964, nella versione CHSH, Clauser-Horne-Shimony-Holt 1969)

Consideriamo il seguente esperimento.

- Ad Alice e Bob vengono inviati una coppia di fotoni (A e B) su cui possono fare esperimenti con filtri polaroid, collegati ad una lancetta che segna -1 se il fotone non passa, +1 se il fotone passa. Le due misure sono simultanee, in modo che non possa esserci scambio d'informazione.

- Supponiamo prima di tutto che Alice decida di usare un filtro "a" con asse verticale ($\theta_a=0$) e Bob un filtro "b" con asse ad un angolo θ_b .

Ci sono quattro possibili esiti:

$Q =$ risultato a		$S =$ risultato b		prodotto QS
-1		-1		+1
-1		+1		-1
+1		-1		-1
+1		+1		+1

- Alice e Bob ripetono questo esperimento molte volte, mantenendo gli stessi assi dei filtri. Se denominiamo la probabilità che l'esito della misura congiunta di Alice lungo l'asse A e di Bob lungo l'asse b sia una coppia di numeri (Q,S) con $Q,S = -1,+1$ con $p(a,b;Q,S)$.

Allora il valore medio $E(a,b) = \langle QS \rangle$ del prodotto QS è:

$$E(a,b) = \langle QS \rangle = (+1) p(a,b;-1,-1) + (-1) p(a,b;-1,+1) + (-1) p(a,b;+1,-1) + (+1) p(a,b;+1,+1) \\ = p(a,b;-1,-1) - p(a,b;-1,+1) - p(a,b;+1,-1) + p(a,b;+1,+1)$$

- Supponiamo ora che Alice possa, in ogni esperimento, scegliere tra due possibili assi del filtro polarizzatore: "a" e "c"; analogamente Bob può scegliere da due possibili assi "b" e "d". Se indichiamo, come prima, con Q l'esito della misura di Alice con il filtro "a" e S quello di Bob con filtro "b", e inoltre con R l'esito della misura di Alice con il filtro "c" e S quello di Bob con filtro "d", allora abbiamo ora quattro valori medi corrispondenti alle quattro possibili combinazioni di assi:

$$E(a,b) = \langle QS \rangle \quad E(a,d) = \langle QT \rangle \quad E(c,b) = \langle RS \rangle \quad E(c,d) = \langle RT \rangle$$

per le quali valgono espressioni analoghe a quella precedente per $E(a,b)$.

- Consideriamo la quantità: $K = QS + RS + RT - QT = (Q+R)S + (R-Q)T$.

Poichè $Q,R,S,T = -1,+1$ si ha la tabella seguente

$Q+R$	$Q-R$	K
0	± 2	± 2
± 2	0	± 2

Vogliamo ora trovare una stima per il valore medio di K, quando ripetiamo l'esperimento molte volte con Alice e Bob che possono scegliere a piacere l'asse del polarizzatore:

$$E(K) = E(QS + RS + RT - QT) = \langle QS \rangle + \langle RS \rangle + \langle RT \rangle - \langle QT \rangle$$

⊛ Secondo la fisica classica

Anche prima della misura, la coppia di fotoni è in uno stato che può essere (univocamente) determinato dai valori che assumo le variabili Q,S,R,T, in quanto valori possibili dell'esito di misure indipendenti.

Sia $p(Q,S,R,T)$ la probabilità che la coppia di fotoni sia in tale stato (essa dipende da come vengono preparate le coppie di fotoni), allora:

$$E(K) = \sum (QS + RS + RT - QT) p(Q,S,R,T)$$

Poichè $K = \pm 2$, si ha sempre:

$$E(K) \leq \sum |K| p(Q,S,R,T) = 2 \sum p(Q,S,R,T) \quad \text{con} \quad \sum p(Q,S,R,T) = 1$$

ovvero:

$$E(K) \leq 2$$

⊛ Secondo la fisica quantistica

Entrambi i fotoni possono non trovarsi in uno stato definito: ciò succede ad esempio in uno stato entangled: in tale stato c'è una correlazione tra le polarizzazioni dei due fotoni, l'esito della misura su uno influenza quella dell'altro.

Non è difficile vedere che si ha:

$$p(a,b;-1,-1) = p(a,b;+1,+1) = \frac{1}{2} \cos^2(\theta_a - \theta_b) \quad \text{e} \quad p(a,b;-1,+1) = p(a,b;+1,-1) = \frac{1}{2} \sin^2(\theta_a - \theta_b)$$

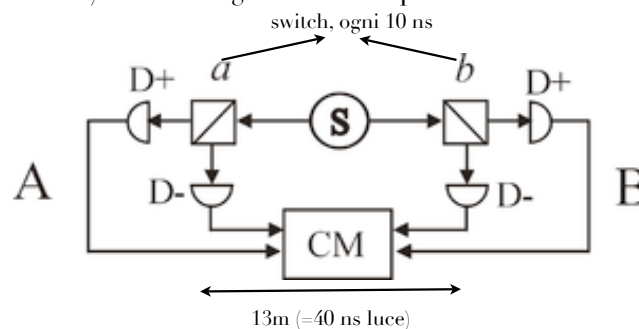
Date le direzioni dei quattro assi a,b,c,d, si calcolano facilmente le quattro quantità $E(a,b)$, $E(a,d)$, $E(c,b)$, $E(c,d)$ e quindi $E(K)$.

Nel caso particolare in cui: $\theta_a=0$, $\theta_b=22.5^\circ$, $\theta_c=45^\circ$, $\theta_d=67.5^\circ$ si ottiene:

$$E(K) = 2\sqrt{2} \approx 2.828$$

⊛ Gli esperimenti

L'esperimento (conclusivo) è stato eseguito da A. Aspect e collaboratori nel 1982.



La disuguaglianza di Bell è violata, ben aldilà degli errori sperimentali.

La teoria che descrive il mondo microscopico NON può basarsi su variabili nascoste (locali)

★ La compressione.

In questo semplice algoritmo, che consente di scambiarsi 4 messaggi distinti utilizzando un solo q-bit (contariamente al caso classico in cui è necessario scambiarsi due bits, $2^2=4$), gioca un ruolo il concetto di entanglement.

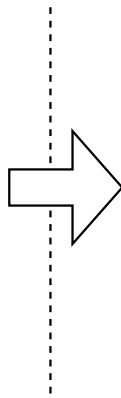
Bob vuole mandare un messaggio tra 4 possibili ad Alice.

I due sperimentatori hanno accesso ad una coppia di q-bits A e B che si trova nello stato:

$$|in\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_A |0\rangle_B + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle_A |1\rangle_B$$

Nel suo laboratorio Bob può decidere di trasformare il q-bit in uno dei 4 seguenti modi:

- 1) $|0\rangle \rightarrow |0\rangle$ e $|1\rangle \rightarrow |1\rangle$
- 2) $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ e $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$
- 3) $|0\rangle \rightarrow |0\rangle$ e $|1\rangle \rightarrow -|1\rangle$
- 4) $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ e $|1\rangle \rightarrow -|0\rangle$



e poi trasmettere indietro il (singolo) q-bit ad Alice che ora possiede 2 q-bits nello stato:

$$|out_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_A |0\rangle_B + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle_A |1\rangle_B$$

$$|out_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_A |1\rangle_B + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle_A |0\rangle_B$$

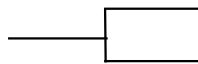
$$|out_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_A |0\rangle_B - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle_A |1\rangle_B$$

$$|out_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_A |1\rangle_B - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle_A |0\rangle_B$$

Ora Alice può eseguire una misura per sapere in quale stato si trova la coppia di q-bits e quindi decifrare il messaggio di Bob.

★ Il teorema di no-cloning

In un computer classico è assai facile duplicare un bit: basta sdoppiare il filo che trasporta il segnale (*fanout*)



In fisica quantistica vale però un teorema che impedisce di fare questo:

è impossibile realizzare una trasformazione che abbia come unico risultato quello di duplicare un q-bit incognito.

(ovviamente siamo in grado di preparare tutte le volte che vogliamo un q-bit in uno stato fissato)

- C'è un risultato, che già conosciamo che ci suggerisce che la duplicazione non è possibile.

Quale?

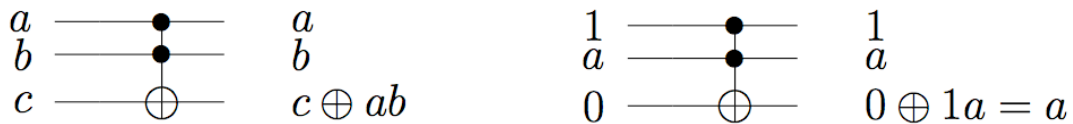
È il principio di indeterminazione:

se fosse possibile clonare uno stato quantistico qualunque, potremmo compiere in simultanea misure di una coppia di osservabili incompatibili, con la precisione desiderata.

✳ Allora, un computer quantistico non riesce neppure a riprodurre le operazioni di un computer classico?

No: questo è possibile.

Tramite il cosiddetto gate di Toffoli è possibile duplicare uno stato incognito classico ($|a\rangle=|0\rangle$ o $|1\rangle$) se lo si accoppia ad altri due q-bits: per alcuni valori precisi in input degli altri due q-bits (ancella) lo stato $|a\rangle$ del terzo input viene clonato.



Il gate di Toffoli è particolarmente importante perchè il suo uso permette di dimostrare che con un computer quantistico è possibile simulare un qualsiasi algoritmo classico.

✳ Perchè il teletrasporto non viola il teorema di no cloning?

Il teletrasporto entanglement-assistito è un protocollo che permette di *trasferire da Alice a Bob lo stato di un q-bit incognito* (viene trasferito solo lo stato, non il q-bit!).

Questo è possibile se Alice e Bob condividono una coppia di q-bit entangled.

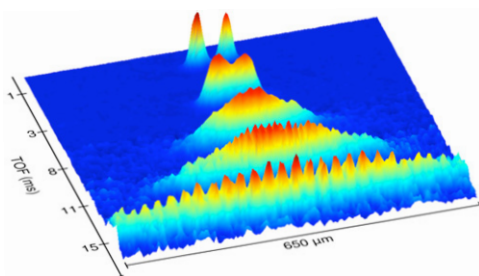
Il teorema di no-cloning non è violato perchè il q-bit non è duplicato: alla fine del processo, infatti, Bob ha nel suo laboratorio un q-bit nello stesso stato di quello che aveva Alice all'inizio, ma alla fine Alice ne ha uno diverso.

REFERENZE:

- G.C. Ghirardi:
Un'occhiata alle carte di Dio

- M.A. Nielsen, I.L. Chuang:
Quantum Computation and Quantum Information

COPIA delle LEZIONI:



[http://www-th.bo.infn.it/
activities/na41/
lectures_and_seminars.html](http://www-th.bo.infn.it/activities/na41/lectures_and_seminars.html)

