25.1.2018

Equazioni d'onda relativistiche

(Appunti per il corso di Fisica Teorica 1 - a.a. 2017/18)

Fiorenzo Bastianelli

1 Introduzione

L'equazione di Schrödinger è un'equazione d'onda che descrive la meccanica quantistica di particelle non relativistiche. Il tentativo di generalizzare questa equazione al caso relativistico portò alla formulazione di varie equazioni d'onda (Klein-Gordon, Dirac, Maxwell-Proca, etc.). Purtroppo risultò subito chiaro che queste equazioni d'onda relativistiche presentavano diversi problemi interpretativi: alcune non ammettevano un'ovvia interpretazione probabilistica e tutte includevano stati di singola particella con energie negative. Queste equazioni, spesso chiamate equazioni d'onda di "prima quantizzazione", possono essere reintrepretate come equazioni di campi "classici" che devono essere a loro volta quantizzati (da cui il nome di "seconda quantizzazione" dato alla teoria quantistica dei campi). Tutti i problemi interpretativi sopra menzionati sono risolti coerentemente nell'ambito della teoria quantistica dei campi. Ciononostante, molte situazioni fisiche possono essere trattate efficacemente, e spesso in maniera più semplice, nell'ambito della prima quantizzazione.

Le diverse equazioni d'onda relativistiche corrispondono alla meccanica quantistica di particelle con determinata *massa* e *spin*. Ad esempio, l'equazione di Klein-Gordon è un'equazione relativistica che descrive particelle scalari, cioè con spin $s = 0$. È indubbiamente l'equazione relativistica più semplice. Tiene conto della corretta relazione relativistica tra energia ed impulso e contiene già l'essenza di tutte le equazioni relativistiche (come la presenza di soluzioni con energie negative, da reinterpretare come dovute ad antiparticelle con energia positiva). Le equazioni d'onda corrette per descrivere particelle relativistiche dipendono dal valore dello spin s e sono conosciute come:

spin 0 $\rightarrow$ equazione di Klein-Gordon
spin $\frac{1}{2}$ $\rightarrow$ equazione di Dirac
spin 1 senza massa $\rightarrow$ equazioni (libere) di Maxwell
spin 1 con massa $\rightarrow$ equazioni di Proca
spin $\frac{3}{2}$ $\rightarrow$ equazione di Rarita-Schwinger
spin 2 $\rightarrow$ equazioni di Fierz-Pauli (o eq. di Einstein linearizzate se con massa nulla).

In generale, le particelle relativistiche sono classificate da massa m e spin s, dove il valore dello spin indica che ci sono $2s + 1$ componenti fisiche indipendenti della funzione d'onda, a meno che $m = 0$, nel qual caso esistono solo due componenti fisiche, quelle con elicità massima e minima (l'elicità è definita come la proiezione dello spin lungo la direzione del moto). Questa classificazione segue dallo studio fatto da Wigner nel 1939 sulle rappresentazioni unitarie ed irriducibili del gruppo di Poincaré, che non descriveremo in queste note.

Qui di seguito, dopo un breve richiamo all'equazione di Schrödinger, vengono descritte le proprietà salienti delle equazioni d'onda di Klein-Gordon, Dirac e Proca-Maxwell.

2 Equazione di Schrödinger

Dopo l'introduzione del quanto d'azione h da parte di Planck (1900) e l'uso che ne fece Einstein (1905) nello spiegare l'effetto fotoelettrico (fotoni come quanti d'onda elettromagnetica con energia $E = h\nu$), e dopo l'introduzione del modello atomico di Bohr (1913) con livelli di energia quantizzati, rimaneva ancora da capire quali leggi fondamentali potessero organizzare quanto andava emergendo dal mondo subatomico, cioè quali fossero le vere leggi della meccanica quantistica. Un contributo importante venne da de Broglie, che nel 1923 suggerì un'estensione dell'idea di Einstein, congetturando un comportamento ondulatorio per le particelle di materia, assegnando una lunghezza d'onda $\lambda = \frac{h}{p}$ a particelle con momento $p = |\vec{p}|$. Questa visione rese interpretabile l'assunzione di Bohr di livelli energetici atomici quantizzati come i soli possibili per l'elettrone, perché corrispondenti a traiettorie contenenti un numero intero di lunghezze d'onda dell'elettrone, quindi stabili per interferenza costruttiva. De Broglie si ispirò per questa sua idea alla meccanica relativistica: un campo d'onda con frequenza $\nu = \frac{1}{T}$, dove T è il periodo (periodocità temporale), e con numero d'onda $\vec{k}$, dove $|\vec{k}| = \frac{1}{\lambda}$, con λ la lunghezza d'onda (periodicità spaziale), ha la forma

$$\psi(\vec{x}, t) \sim e^{2\pi i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \nu t)} \, . \tag{1}$$

Assumendo che la fase $2\pi(\vec{k}\cdot\vec{x} - \nu t)$ fosse un invariante di Lorentz, e sapendo che le coordinate spazio-temporali $(\vec{x}, t)$ formano un quadrivettore, de Broglie dedusse che anche $(\vec{k}, \nu)$ doveva essere un quadrivettore, e quindi trasformarsi per cambio di sistema di riferimento inerziale come $(\vec{x}, t)$ o $(\vec{p}, E)$. Poiché nel caso dei fotoni valeva $E = h\nu$, risultò naturale assumere una proporzionalità tra i quadrivettori $(\vec{k}, \nu)$ e $(\vec{p}, E)$ per particelle materiali con la stessa costante di proporzionalità h valida per i fotoni

$$\vec{p} = h\vec{k} \, , \quad E = h\nu \tag{2}$$

e cioè $\lambda = \frac{h}{|\vec{p}|}$ come lunghezza d'onda per particelle di materia con momento $\vec{p}$. Quindi un'onda piana associata a particelle libere materiali, con determinati energia ed impulso, deve assumere la forma

$$\psi(\vec{x}, t) \sim e^{2\pi i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \nu t)} = e^{\frac{2\pi i}{h}(\vec{p}\cdot\vec{x} - Et)} = e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x} - Et)} \, . \tag{3}$$

A questo punto Schrödinger si chiese: che tipo di equazione soddisfa tale funzione? Iniziò direttamente con il caso relativistico, ma siccome non gli fu possibile riprodurre alcuni risultati sperimentali per l'atomo d'idrogeno, si accontentò del limite non-relativistico che sembrava funzionare meglio (oggi sappiamo che alcune correzioni relativistiche sono parzialmente compensate da effetti dovuti allo spin dell'elettrone, di cui non si teneva conto). Per una particella libera non-relativistica vale $E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$, quindi la funzione d'onda (3) postulata da de Broglie soddisfa

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x}, t) = E\psi(\vec{x}, t) = \frac{\vec{p}^2}{2m}\psi(\vec{x}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\vec{x}, t) \tag{4}$$

e risolve l'equazione differenziale

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\vec{x}, t) \tag{5}$$

che è detta equazione di Schrödinger libera. Questo esempio suggerisce che la prescrizione per ottenere una equazione d'onda dal modello classico di particella libera è la seguente:

- considerare la relazione classica tra energia ed impulso $E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$
- sostituire $E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ e $\vec{p} \to -i\hbar\vec{\nabla}$ (regole di corrispondenza)
- interpretare questi operatori differenziali come agenti su una funzione d'onda ψ:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\vec{x},t) \ .$$

Naturalmente Schrödinger estese queste sue considerazioni ad una particella immersa nel campo coulombiano di un nucleo per dedurre analiticamente le conseguenze della meccanica quantistica ondulatoria, riproducendo il modello atomico di Bohr ed ottenendo un notevole successo.

Seppur dedotta originariamente dal limite non-relativistico di una particella puntiforme, quando scritta nella forma

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi \tag{6}$$

con H l'operatore hamiltoniano, l'equazione di Schrödinger acquista una validità universale per la descrizione dei sistemi quantistici.

Conservazione della probabilità. Se una particella non-relativistica è descritta da una funzione d'onda normalizzabile $\psi(\vec{x},t)$ (l'onda piana non è normalizzabile, per cui occorre considerare pacchetti d'onda), allora si può interpretare la grandezza $\rho(\vec{x},t) = |\psi(\vec{x},t)|^2$ come densità di probabilità di trovare la particella nel punto $\vec{x}$ al tempo t. In particolare, si può provare che ρ soddisfa una equazione di continuità della forma

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0 \tag{7}$$

con una opportuna corrente $\vec{J}$ (per completezza: $\vec{J} = \frac{\hbar}{2im}(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*)$). Questo equivale alla conservazione della probabilità: la particella si trova da qualche parte nello spazio ad ogni instante di tempo. In particolare è consistente assumere che una particella non-relativistica non possa essere ne creata ne distrutta. Questo è comprensibile fisicamente pensando al limite non-relativistico di una particella relativistica, formalmente ottenuto mandando $c \to \infty$ (velocità limite di propagazione delle interazioni molto grande, tendente all'infinito come limite matematico): infatti dalla formula relativistica dell'energia

$$E = \sqrt{\vec{p}^2c^2 + m^2c^4} = mc^2\sqrt{1 + \frac{\vec{p}^2}{m^2c^2}} \quad \Longrightarrow \quad mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m} + \cdots \tag{8}$$

si vede che per $c \to \infty$ occorrerebbe un'energia infinita per creare una particella di massa m.

3 Spin 0: il campo scalare di Klein Gordon

L'equazione di Klein-Gordon può essere ottenuta dalla prima quantizzazione di una particella relativistica. Però la funziona d'onda di Klein-Gordon non ammette una interpretazione probabilistica come nel caso della funzione d'onda dell'equazione di Schroedinger. La consistenza con la meccanica quantistica sarà recuperata trattando la funzione d'onda di Klein-Gordon come un campo dinamico classico descrivente un numero infinito di gradi di libertà (che successivamente dovrà essere quantizzato, come nel caso del campo elettromagnetico che storicamente fu il primo esempio di campo quantizzato) e non come un usuale funzione d'onda quantistica.

Spesso ci si riferisce alla quantizzazione del campo come alla seconda quantizzazione. Con la seconda quantizzazione il campo di Klein-Gordon permette di descrivere un numero arbitrario di particelle ed antiparticelle identiche di spin zero. Ciononostante, anche rimanendo nell'ambito della prima quantizzazione, l'equazione di Klein-Gordon, interpretata appunto come equazione d'onda di singola particella, permette di ottenere molte informazioni sulla meccanica quantistica di particelle di spin 0.

Equazione d'onda libera

Come ottenere una equazione d'onda relativistica? Un' idea semplice è quella di usare la corretta relazione relativistica tra energia ed impulso. Sappiamo che per una particella relativistica di massa m vale

$$p_\mu p^\mu = -m^2c^2 \qquad \Longrightarrow \qquad -\frac{E^2}{c^2} + \vec{p}^2 = -m^2c^2 \qquad \Longrightarrow \qquad E^2 = \vec{p}^2c^2 + m^2c^4 \; . \tag{9}$$

Quindi si potrebbe pensare di usare $E = \sqrt{\vec{p}^2c^2 + m^2c^4}$, ma l'equazione che emerge con le sostituzioni $E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ e $\vec{p} \to -i\hbar\vec{\nabla}$ produce un'equazione complicatissima, contenente una radice quadrata di operatori differenziali

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi(\vec{x},t) = \sqrt{-\hbar^2c^2\nabla^2 + m^2c^4}\;\phi(\vec{x},t) \; . \tag{10}$$

Questa equazione è di difficile interpretazione, e sembra descrivere fenomeni non-locali, in cui punti distanti tra loro si influenzano istantaneamente. Per questo fu presto abbandonata. Klein e Gordon proposero una equazione più semplice, considerando la relazione quadratica tra energia ed impulso. Partendo da $E^2 = \vec{p}^2c^2 + m^2c^4$, ed usando $E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ e $\vec{p} \to -i\hbar\vec{\nabla}$, ottennero l'equazione

$$\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\phi(\vec{x},t) = 0 \tag{11}$$

conosciuta oggi come equazione di Klein-Gordon. In notazioni relativistiche si può scrivere come

$$(\partial_\mu\partial^\mu - \mu^2)\phi(x) = 0 \; , \qquad \mu \equiv \frac{mc}{\hbar} \; . \qquad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{12}$$

o anche come

$$(\Box - \mu^2)\phi(x) = 0 \tag{13}$$

dove $\Box \equiv \partial_\mu\partial^\mu = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2$ indica l'operatore di d'Alembert (il d'alembertiano). Secondo Dirac, Schrödinger considerò questa equazione ancor prima di dedurre la sua equazione, ma insoddisfatto dei risultati che sembrava produrre per l'atomo d'idrogeno, si accontentò del caso non relativistico. Quando piú tardi si decise a pubblicarla, era già stato preceduto da Klein e Gordon. Per semplicità notazionale useremo da ora in poi unità di misura con $\hbar = c = 1$, per cui possiamo identificare $\mu = m$.

Soluzioni di onda piana

Per costruzione le onde piane con la corretta relazione tra energia ed impulso sono soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon

$$(\Box - m^2)\phi(x) = 0 \; . \tag{14}$$

Possiamo facilmente riderivare queste soluzioni da un' analisi diretta dell'equazione. Si possono cercare soluzioni di onda piana con un ansatz del tipo

$$\phi_p(x) \sim e^{ip_\mu x^\mu} \qquad \text{con } p_\mu \text{ arbitrario} \tag{15}$$

che inserite in (14) producono

$$-\left(p^\mu p_\mu + m^2\right) e^{ip_\nu x^\nu} = 0\,. \tag{16}$$

L'onda piana è quindi una soluzione se il quadrimomento p_μ soddisfa la condizione di mass-shell

$$p^\mu p_\mu = -m^2 \tag{17}$$

che è risolta da

$$(p^0)^2 = \vec{p}^{\,2} + m^2 \qquad \Longrightarrow \qquad p^0 = \pm \underbrace{\sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}}_{E_p} = \pm E_p\,. \tag{18}$$

Vediamo che emergono delle soluzioni con energia negativa, la cui interpretazione fisica non è immediata. Queste non possono essere trascurate: interazioni possono portare a transizioni su questi stati ad energia negativa. Il modello, non avendo un'energia limitata inferiormente, non sembra stabile (le soluzioni con energia negativa $p^0 = -E_p$ saranno poi reinterpretate in teoria dei campi quantistici come dovute alle antiparticelle con energia positiva).

Tutte le soluzioni sono quindi indicizzate dal valore del momento spaziale $\vec{p} \in R^3$, oltre che dal segno di $p^0 = \pm E_p$. Le soluzioni ad energia positiva sono quindi

$$\phi_{(\vec{p},+)}(x) = e^{-iE_p t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} \tag{19}$$

e quelle ad energia negativa

$$\phi_{(\vec{p},-)}(x) = e^{iE_p t + i\vec{p}\cdot\vec{x}}\,. \tag{20}$$

Una soluzione generale si può scrivere come combinazione lineare di queste onde piane

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}\Big(a(\vec{p})\, e^{-iE_p t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} + b^*(\vec{p})\, e^{iE_p t - i\vec{p}\cdot\vec{x}}\Big) \tag{21}$$

con relativo complesso coniugato

$$\phi^*(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}\Big(b(\vec{p})\, e^{-iE_p t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a^*(\vec{p})\, e^{iE_p t - i\vec{p}\cdot\vec{x}}\Big) \tag{22}$$

Per campi reali ($\phi^* = \phi$) i coefficienti di Fourier a e b coincidono, $a(\vec{p}) = b(\vec{p})$.

Equazione di continuità

Dall'equazione di KG si può facilmente derivare un'equazione di continuità. Quest'ultima peró non è interpretabile come dovuta alla conservazione di una probabilità, come nel caso dell'eq. di Schrödinger. Vediamo i dettagli di questa affermazione.

Un modo di ottenere l'equazione di continuità annunciata è quello di prendere l'equazione di KG moltiplicata per il campo d'onda complesso coniugato ϕ^*, sottraendone l'equazione complesso coniugata moltiplicata per ϕ. Si ottiene

$$0 = \phi^*(\Box - m^2)\phi - \phi(\Box - m^2)\phi^* = \partial_\mu(\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*)\,. \tag{23}$$

La corrente J^μ definita da

$$J^\mu = \frac{1}{2im}(\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*) \tag{24}$$

soddisfa quindi ad una equazione di continuità, $\partial_\mu J^\mu = 0$ (la normalizzazione di J^μ è stata scelta per renderla reale e per far coincidere $\vec{J}$ con con la corrente di probabilità associata all'equazione di Schroedinger). La componente temporale

$$J^0 = \frac{i}{2m}(\phi^* \partial_0 \phi - \phi \partial_0 \phi^*) \tag{25}$$

sebbene reale, non è definita positiva. Infatti può assumere valori sia positivi che negativi: questo è deducibile dal fatto che si possono fissare liberamente sia i valori del campo che le sue derivate temporali come condizioni iniziali, essendo l'eq. di KG un'equazione del secondo ordine nelle derivate temporali. Di conseguenza la corrispondente grandezza conservata non può essere associata ad una probabilità, che deve necessariamente essere definita positiva.

Possiamo testare esplicitamente quando dedotto valutando J^0 sulle onde piane

$$J^0(\phi_{(\vec{p},\pm)}) = \pm \frac{E_p}{m} \tag{26}$$

che evidentemente assume sia valori positivi che valori negativi.

Possiamo concludere che l'equazione di Klein-Gordon non ammette una interpretazione probabilistica. Questo fatto stimolò Dirac alla ricerca di una diversa equazione relativistica che potesse ammettere tale interpretazione. Si può comunque reinterpretare l'equazione di Klein Gordon come un campo d'onda relativistico classico, che quando trattato quantisticamente descrive particelle scalari di massa m, in modo simile alla interpretazione del campo elettromagnetico suggerita da Einstein per spiegare l'effetto fotoelettrico. Questa interpretazione fu sfruttata da Yukawa nel 1935 per proporre una teoria delle interazioni nucleari con forze di corto raggio.

Potenziale di Yukawa

Consideriamo l'eq. di KG in presenza di una sorgente puntiforme statica

$$(\Box - m^2)\phi(x) = g\delta^3(\vec{x}) \tag{27}$$

dove la sorgente puntiforme è localizzata nell'origine degli assi cartesiani e la costante g indica il valore della carica (l'intensità con cui una particella si accoppia al campo d'onda di KG). Siccome la sorgente è statica, possiamo cercare una soluzione indipendente dal tempo, per cui l'equazione si semplifica

$$(\vec{\nabla}^2 - m^2)\phi(\vec{x}) = g\delta^3(\vec{x}) \ . \tag{28}$$

Questa equazione può essere risolta con una trasformata di Fourier. Si ottiene cosi il potenziale di Yukawa

$$\phi(\vec{x}) = -\frac{g}{4\pi}\frac{e^{-mr}}{r} \ . \tag{29}$$

Per derivarlo, si può scrivere la soluzione in trasformata di Fourier

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tilde{\phi}(\vec{k}) \tag{30}$$

e tenendo conto che la trasformata di Fourier della delta di Dirac (che è una distribuzione o "funzione generalizzata") è data da

$$\delta^3(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tag{31}$$

si trova subito che

$$\tilde{\phi}(\vec{k}) = -\frac{g}{k^2 + m^2} \tag{32}$$

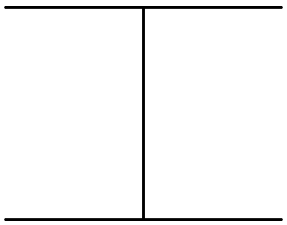
dove k è il modulo di $\vec{k}$. Un calcolo diretto, in coordinate sferiche e con l'uso del teorema dei residui per percorsi chiusi nel piano complesso, produce

$$\phi(\vec{x}) = -g \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{k^2 + m^2} = -\frac{g}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r} \tag{33}$$

dove $r = \sqrt{\vec{x}^2}$. Questo è un potenziale che risulta essere attrattivo tra cariche dello stesso segno. Ha un raggio d'azione $\lambda \sim \frac{1}{m}$ corrispondente alla lunghezza d'onda Compton di una particella di massa m. Per questo il campo di KG può essere usato per modellare forze di corto raggio, come le forze nucleari.

Si può verificare direttamente che (33) soddisfa (28): basta usare il laplaciano scritto in coordinate sferiche ($\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\partial_r r^2 \partial_r +$ derivate sugli angoli) per vedere che, al di fuori della singolarità $r = 0$, (33) soddisfa (28), inoltre il comportamento singolare per $r = 0$ è collegato all'intensità della carica puntiforme, proprio come nel caso coulombiano, dal cui confronto si estrae la corretta normalizzazione.

Un modo grafico che descrive l'interazione tra una carica g_1 ed una carica g_2 mediato dal campo di KG (interpretato come uno scambio di un quanto virtuale del campo scalare) è dato dal seguente "diagramma di Feynman"



e si può dimostrare che corrisponde al seguente potenziale d'interazione tra le due cariche

$$V(r) = -\frac{g_1 g_2}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r} \ , \tag{34}$$

che risulta essere attrattivo per cariche dello stesso segno. Nel 1935 Yukawa introdusse una simile particella scalare per descrivere le forze nucleari e la chiamò mesone. Con una stima dell'ordine di $\lambda \sim \frac{1}{3}$ fm si ottiene una massa $m \sim 150$ MeV, ed infatti il mesone π^0 (il pione, che fu successivamente scoperto studiando le interazioni dei raggi cosmici) ha una massa di questo ordine di grandezza, $m_{\pi^0} \sim 135$ MeV.

Dettagli del calcolo: Usando coordinate sferiche possiamo calcolare l'integrale in (33) come

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{x}) &= -g\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{k^2+m^2} \\
&= -\frac{g}{(2\pi)^3}\int_0^\infty k^2dk\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi}\,\frac{e^{ikr\cos\theta}}{k^2+m^2} \\
&= -\frac{g}{(2\pi)^2}\int_0^\infty \frac{k^2dk}{k^2+m^2}\underbrace{\int_{-1}^{1} dy\; e^{-ikry}}_{\frac{2\sin(kr)}{kr}} \qquad (y=-\cos\theta) \\
&= -\frac{g}{(2\pi)^2 r}\int_{-\infty}^\infty dk\;\frac{k}{k^2+m^2}\sin(kr) \qquad (funzione\ pari) \\
&= -\frac{g}{(2\pi)^2 r}\int_{-\infty}^\infty dk\;\frac{k}{k^2+m^2}\frac{e^{ikr}}{i} \qquad (parte\ dispari\ non\ contribuisce) \\
&= -\frac{g}{(2\pi)^2 r}\,2\pi i\,\mathrm{Res}\Big[\frac{k\,e^{ikr}}{i(k+im)(k-im)}\Big]_{k=im} = -\frac{g}{4\pi}\frac{e^{-mr}}{r}
\end{aligned} \tag{35}$$

dove si è usato un cambio di variabile ($y=-\cos\theta$), una estensione del limite d'integrazione ($\int_{-\infty}^{\infty}$) in k per l'integrale di una funzione pari, l'aggiunta di una funzione dispari che non cambia il valore dell'integrale, l'estensione dell'integrale al piano complesso con l'aggiunta di un contributo nullo per avere un circuito chiuso nel semipiano superiore, ed infine il teorema di Cauchy sui residui per valutare l'integrale.

Funzione di Green e propagatore

La funzione di Green dell'equazione di KG assume una particolare importanza nella interpretazione quantistica ed è associata al cosiddetto propagatore (propaga un quanto da un punto dello spazio tempo ad un'altro punto). La funzione di Green $G(x)$ è definita come la soluzione dell'equazione di KG in presenza di una sorgente puntiforme ed istantanea di carica unitaria, per semplicità localizzata nell'origine del sistema di coordinate dello spazio-tempo. In formule

$$(-\Box+m^2)G(x)=\delta^4(x)\ . \tag{36}$$

Si noti che conoscendo la funzione di Green $G(x)$, si può rappresentare una soluzione dell'equazione non omogenea di KG

$$(-\Box+m^2)\phi(x)=J(x) \tag{37}$$

con $J(x)$ sorgente arbitraria come

$$\phi(x)=\phi_0(x)+\int d^4y\; G(x-y)J(y)\ . \tag{38}$$

dove $\phi_0(x)$ è una soluzione dell'equazione omogenea associata. Questo si verifica facilmente inserendo (38) in (37) ed usando la proprietà (36).

In generale la funzione di Green non è unica per equazioni iperboliche, ma dipende dalle condizioni al contorno imposte. Nell'interpretazione quantistica si usano le condizioni causali di Feynman-Stueckelberg, che prevede che si propaghino avanti nel tempo le sole frequenze

positive generate dalla sorgente $J(x)$, ed indietro nel tempo le rimanenti frequenze negative. In trasformata di Fourier la soluzione si scrive come ($d^4p \equiv dp^0 d^3p$)

$$G(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, e^{ip_\mu x^\mu} \tilde{G}(p) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, \frac{e^{ip_\mu x^\mu}}{p^2 + m^2 - i\epsilon} \tag{39}$$

dove $\epsilon \to 0^+$ è un parametro infinitesimo positivo che implementa le condizioni al contorno (prescrizione causale di Feynman-Stueckelberg). In una interpretazione particellare la funzione di Green descrive sia la propagazione di "particelle reali" che gli effetti di "particelle virtuali", tutte identificate con i quanti del campo scalare. Queste particelle possono propagarsi a distanze macroscopiche solo se vale la relazione $p^2 = -m^2$ (il polo che compare nell'integrando compensa gli effetti di interferenza distruttiva dell'integrale di Fourier sulle onde piane) e sono dette "particelle reali". Gli effetti quantistici dovuti alle fluttuazioni con $p^2 \neq -m^2$ sono invece considerati come dovuti a "particelle virtuali" che non sono visibili come stati asintotici (non riescono a propagarsi su distanze macroscopiche, ma sono "nascoste" dal principio di indeterminazione).

Come anticipato, la prescrizione $i\epsilon$ per spostare i poli dell'integrando corrisponde ad una scelta ben precisa delle condizioni al contorno da dare alla funzione di Green: corrisponde a propagare in avanti nel tempo le onde piane con energia positiva ($p^0 = E_p$), mentre propaga indietro nel tempo le fluttuazioni con energia negativa ($p^0 = -E_p$). Questa prescrizione è anche detta causale, perchè non permette la propagazione nel futuro di stati ad energia negativa. Tali particelle con energia negativa che si propagano indietro nel tempo sono interpretate come antiparticelle con energia positiva che si propagano avanti nel tempo. Vediamo esplicitamente come questo emerge matematicamente dal calcolo dell'integrale in p^0 del propagatore, che mostra anche come il campo libero si possa interpretare come una collezione di oscillatori armonici. Per convenzione il propagatore $\Delta(x-y)$ è $(-i)$ volte la funzione di Green $G(x-y)$, ed otteniamo

$$\begin{aligned}
\Delta(x-y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, \frac{-i}{p^2 + m^2 - i\epsilon} e^{ip\cdot(x-y)} \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \int \frac{dp^0}{2\pi}\, e^{-ip^0(x^0-y^0)} \frac{i}{(p^0 - E_p + i\epsilon')(p^0 + E_p - i\epsilon')} \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \left[\theta(x^0-y^0)\, \frac{e^{-iE_p(x^0-y^0)}}{2E_p} + \theta(y^0-x^0)\, \frac{e^{-iE_p(y^0-x^0)}}{2E_p}\right] \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\, \frac{e^{-iE_p|x^0-y^0|}}{2E_p}
\end{aligned} \tag{40}$$

dove $E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ ed $\epsilon \sim \epsilon' \to 0^+$. Gli integrali sono stati fatti usando l'integrazione su un circuito del piano complesso p^0, scegliendo di chiudere il circuito sul semicerchio di raggio infinito che dà un contributo nullo e valutando l'integrale col teorema dei residui. Ricordando la forma del propagatore dell'oscillatore armonico ($\sim \frac{e^{-i\omega|t-t'|}}{2\omega}$) si vede come il campo d'onda possa essere interpretato come una collezione infinita di oscillatori armonici parametrizzati dalla frequenza E_p.

Altre prescrizioni per aggirare i poli e definire correttamente l'integrale portano a definire altre funzioni di Green $G(x-y)$ soddisfacenti

$$(-\Box_x + m^2) G(x-y) = \delta^4(x-y) \tag{41}$$

(in (36) avevamo posto $y^\mu = 0$, che può essere sempre ottenuto sfruttando l'invarianza per traslazioni). In particolare, la funzione di Green ritardata $G_R(x-y)$ propaga tutte le frequenze eccitate nel punto y^μ dello spazio-tempo avanti nel tempo (ed è quindi nulla per tempi $x^0 < y^0$), mentre la funzione di Green avanzata $G_A(x-y)$ propaga tutte le frequenze eccitate nel punto y^μ indietro nel tempo, (ed è nulla per tempi $x^0 > y^0$). Nel caso di massa $m = 0$ (ponendo per semplicità $y^\mu = 0$) è facile ottenere

$$G_R(x) = \frac{1}{4\pi r}\delta(t-r) \ , \qquad G_A(x) = \frac{1}{4\pi r}\delta(t+r) \ , \tag{42}$$

dove $t = x^0$ e $r = \sqrt{\vec{x}^2}$, come noto dagli studi dell'elettromagnetismo classico.

Azione

L'equazione di Klein-Gordon per un campo scalare complesso $\phi(x)$ può essere convenientemente ottenuta da un principio d'azione

$$S[\phi,\phi^*] = \int d^4x\, \mathcal{L} \ , \qquad \mathcal{L} = \Big(-\partial^\mu\phi^*\partial_\mu\phi - m^2\phi^*\phi \Big) \ . \tag{43}$$

Variando indipendentemente ϕ e ϕ^* ed imponendo il principio di minima azione si ottengono le equazioni del moto:

$$\frac{\delta S[\phi,\phi^*]}{\delta\phi^*(x)} = (\Box - m^2)\phi(x) = 0 \ , \qquad \frac{\delta S[\phi,\phi^*]}{\delta\phi(x)} = (\Box - m^2)\phi^*(x) = 0 \ . \tag{44}$$

Per un campo scalare reale $\phi^* = \phi$, l'azione convenientemente normalizzata è data da

$$S[\phi] = \int d^4x \Big(-\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2 \Big) \tag{45}$$

da cui

$$\frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi(x)} = (\Box - m^2)\phi(x) = 0 \ . \tag{46}$$

Il campo complesso può naturalmente essere visto come la collezione di due campi reali con la stessa massa. Ponendo

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2) \ , \qquad \phi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 - i\varphi_2) \tag{47}$$

dove φ_1 e φ_2 costituiscono la parte reale e la parte immaginaria, si vede infatti che la lagrangiana in (43) assume la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\partial^\mu\phi^*\partial_\mu\phi - m^2\phi^*\phi \\ &= -\frac{1}{2}\partial^\mu\varphi_1\partial_\mu\varphi_1 - \frac{1}{2}\partial^\mu\varphi_2\partial_\mu\varphi_2 - \frac{m^2}{2}\varphi_1^2 - \frac{m^2}{2}\varphi_2^2 \ . \end{aligned} \tag{48}$$

Simmetrie

L'azione permette di sfruttare le analisi fatte da Noether per collegare principi di simmetria (invarianze) a leggi di conservazione (equazioni di continuità nel caso di teorie di campo).

Il campo complesso di Klein-Gordon libero (cioè senza interazioni) possiede simmetrie rigide generate dal gruppo di Poincaré (simmetrie di spazio-tempo) e simmetrie rigide per trasformazioni di fase generate dal gruppo $U(1)$ (simmetrie interne).

La simmetria $U(1)$ è data da

$$\begin{array}{rcl} \phi(x) & \longrightarrow & \phi'(x) = e^{i\alpha}\phi(x) \\ \phi^*(x) & \longrightarrow & \phi^{*\prime}(x) = e^{-i\alpha}\phi^*(x) \end{array} \tag{49}$$

ed è facile vedere che l'azione (43) è invariante. Per trasformazioni infinitesime

$$\begin{array}{rcl} \delta\phi(x) & = & i\alpha\phi(x) \\ \delta\phi^*(x) & = & -i\alpha\phi^*(x)\ . \end{array} \tag{50}$$

Considerando il parametro locale, $\alpha \to \alpha(x)$, si calcola

$$\delta S[\phi,\phi^*] = \int d^4x\, \partial_\mu\alpha \underbrace{\Big(i\phi^*\partial^\mu\phi - i(\partial^\mu\phi^*)\phi\Big)}_{J^\mu} \tag{51}$$

da cui verifichiamo di nuovo la simmetria $U(1)$ (per α costante si ha $\delta S = 0$), ottenendo allo stesso tempo la relativa corrente di Noether

$$J^\mu = i\phi^*\partial^\mu\phi - i(\partial^\mu\phi^*)\phi \equiv i\phi^* \overset{\leftrightarrow}{\partial^\mu}\, \phi \tag{52}$$

che soddisfa un'equazione di continuità, $\partial_\mu J^\mu = 0$, verificata usando le equazioni del moto. La corrispondente carica conservata

$$Q \equiv \int d^3x\, J^0 = -i \int d^3x\, \phi^* \overset{\leftrightarrow}{\partial_0}\, \phi \tag{53}$$

non è definita positiva: come già descritto non può essere interpretata come una probabilità.

Prendendo spunto da questa legge di conservazione, si può definire un prodotto scalare tra due soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon χ e ϕ come

$$\langle\chi|\phi\rangle \equiv \int d^3x\, i\chi^* \overset{\leftrightarrow}{\partial_0}\, \phi\ . \tag{54}$$

Questo prodotto scalare è conservato grazie alle equazioni del moto.

Le trasformazioni generate dal gruppo di Poincaré

$$\begin{array}{rcl} x^\mu & \longrightarrow & x^{\mu\prime} = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \\ \phi(x) & \longrightarrow & \phi'(x') = \phi(x) \\ \phi^*(x) & \longrightarrow & \phi^{*\prime}(x') = \phi^*(x) \end{array} \tag{55}$$

trattano il campo di Klein-Gordon come uno scalare. È facile verificare l'invarianza dell'azione sotto queste trasformazioni finite. È anche utile studiare il caso delle trasformazioni infinitesime, da cui estrarre con il metodo di Noether le correnti conservate associate a queste simmetrie. Consideriamo in particolare il caso di traslazioni spazio-temporali infinitesime, che possiamo scrivere come

$$\delta\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x) = -a^\mu\partial_\mu\phi(x) \tag{56}$$

con relativo complesso coniugato (ora a^μ è da considerare infinitesimo). Considerando il parametro infinitesimo a^μ come funzione arbitraria dello spazio-tempo otteniamo dalla variazione dell'azione le corrispondenti correnti di Noether conservate (il tensore energia-impulso)

$$\delta S[\phi,\phi^*] = \int d^4x\, (\partial_\mu a_\nu)\Big(\underbrace{\partial^\mu\phi^*\partial^\nu\phi + \partial^\nu\phi^*\partial^\mu\phi + \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}}_{T^{\mu\nu}}\Big) \tag{57}$$

dove abbiamo trascurato derivate totali e dove $\mathcal{L}$ indica la densità di lagrangiana (l'integrando della (43)). Il tensore $T^{\mu\nu}$ è chiamato tensore energia-impulso ed è conservato (più precisamente soddisfa ad un'equazione di continuità, $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$). In particolare sono conservate le cariche

$$P^\mu = \int d^3x\, T^{0\mu} \tag{58}$$

corrispondenti al quadrimomento totale portato del campo. In particolare, la densità di energia trasportata del campo è

$$\mathcal{E}(x) = T^{00} = \partial_0\phi^*\partial_0\phi + \vec{\nabla}\phi^* \cdot \vec{\nabla}\phi + m^2\phi^*\phi \tag{59}$$

e l'energia totale conservata è data da $P^0 \equiv E = \int d^3x\, \mathcal{E}(x)$ (ed è manifestamente definita positiva).

4 Spin $\frac{1}{2}$: l'equazione di Dirac

Storicamente Dirac trovò la corretta equazione per descrivere particelle di spin $\frac{1}{2}$ cercando un'equazione relativistica che potesse avere un'interpretazione probabilistica ed essere consistente con i principi della meccanica quantistica, a differenza dell' equazione di Klein-Gordon che non ammette questa interpretazione. Sebbene un'interpretazione probabilistica non sarà tenibile in presenza di interazioni, e la funzione d'onda di Dirac dovrà essere trattata come un campo classico da quantizzare (seconda quantizzazione), è utile ripercorrere la deduzione che portò Dirac alla formulazione di un'equazione del primo ordine nel tempo, l'equazione di Dirac

$$(\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi(x) = 0 \tag{60}$$

dove la funzione d'onda $\psi(x)$ ha quattro componenti complesse (spinore di Dirac) e le γ^μ sono matrici 4×4. Poichè le quattro componenti del campo di Dirac $\psi(x)$ non sono componenti di un quadrivettore, ma sono di natura spinoriale e si mescolano in modo differente per trasformazioni di Lorentz, occorre usare indici diversi per indicarne le componenti senza ambiguità. In questo contesto usiamo indici $\mu, \nu, .. = 0, 1, 2, 3$ per indicare le componenti di un quadrivettore ed indici $a, b, .. = 1, 2, 3, 4$ per indicare le componenti di uno spinore di Dirac. L'equazione (60) si scrive in modo più esplicito come

$$\Big((\gamma^\mu)_a{}^b\,\partial_\mu + m\,\delta_a{}^b\Big)\psi_b(x) = 0\ . \tag{61}$$

e contiene quattro equazioni distinte ($a = 1, .., 4$). In genere gli indici spinoriali sono sottointesi e al loro posto si usa una notazione matriciale: γ^μ sono matrici e ψ un vettore colonna.

Equazione di Dirac
La relazione relativistica tra energia ed impulso di una particella libera

$$p^\mu p_\mu = -m^2c^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad E^2 = c^2\vec{p}^{\,2} + m^2c^4 \tag{62}$$

con le sostituzioni

$$E = cp^0 \ \rightsquigarrow\ i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\ , \quad \vec{p}\ \rightsquigarrow\ -i\hbar\frac{\partial}{\partial\vec{x}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad p_\mu\ \rightsquigarrow\ -i\hbar\partial_\mu \tag{63}$$

porta all'equazione di Klein Gordon che è del secondo ordine nelle derivate temporali: come conseguenza la corrente conservata $U(1)$ associata non ha una densità di carica definita positiva

da interpretare come densità di probabilità. Dirac allora propose una relazione lineare della forma

$$E = c\vec{p}\cdot\vec{\alpha} + mc^2\beta \tag{64}$$

dove $\vec{\alpha}$ e β sono matrici hermitiane tali da rendere consistente la relazione lineare con la relazione quadratica in (62). Elevando al quadrato la relazione lineare si ottiene

$$\begin{aligned} E^2 &= (cp^i\alpha^i + mc^2\beta)(cp^j\alpha^j + mc^2\beta) \\ &= c^2p^ip^j\alpha^i\alpha^j + m^2c^4\beta^2 + mc^3p^i(\alpha^i\beta + \beta\alpha^i) \\ &= c^2p^ip^j\frac{1}{2}(\alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i) + m^2c^4\beta^2 + mc^3p^i(\alpha^i\beta + \beta\alpha^i) \end{aligned} \tag{65}$$

e consistenza con (62) per momenti arbitrari p^i produce le relazioni

$$\alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i = 2\delta^{ij}\mathbb{1}\ , \qquad \beta^2 = \mathbb{1}\ , \qquad \alpha^i\beta + \beta\alpha^i = 0 \tag{66}$$

dove $\mathbb{1}$ è la matrice identità. Spesso la matrice identità è sottintesa, come nel lato sinistro di (64) e (65). Queste relazioni sono note anche come algebra di Clifford. Dirac ottenne una soluzione minimale per le matrici $\vec{\alpha}$ e β con matrici 4×4. Una soluzione esplicita in termini di blocchi 2×2 è data da

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}\ , \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{67}$$

dove le matrici σ^i sono le matrici di Pauli, matrici 2×2 date da

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ , \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ , \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{68}$$

che sotto moltiplicazione soddisfano $\sigma^i\sigma^j = \delta^{ij}\mathbb{1} + i\epsilon^{ijk}\sigma^k$. Questa soluzione è detta rappresentazione di Dirac. Si noti inoltre che $\vec{\alpha}$ e β sono matrici a traccia nulla.

Un teorema, che non dimostreremo, afferma che tutte le altre rappresentazioni di dimensione quattro sono unitariamente equivalenti alla rappresentazione di Dirac, mentre quelle di dimensioni maggiori sono riducibili.

Quantizzando la relazione (64) con le (63) si ottiene l'equazione di Dirac nella forma "hamiltoniana"

$$i\hbar\partial_t\,\psi = (\underbrace{-i\hbar c\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + mc^2\beta}_{H_D})\psi \tag{69}$$

dove l'hamiltoniana H_D è una matrice 4×4 di operatori differenziali. La hermiticità delle matrici α^i e β garantisce la hermiticità della hamiltoniana H_D e quindi una evoluzione temporale unitaria. Moltiplicando questa equazione con la matrice invertibile $\frac{1}{\hbar c}\beta$ e definendo le matrici gamma

$$\gamma^0 \equiv -i\beta\ , \qquad \gamma^i \equiv -i\beta\alpha^i \tag{70}$$

si ottiene l'equazione di Dirac nella forma "covariante"

$$(\gamma^\mu\partial_\mu + \mu)\psi = 0 \tag{71}$$

con $\mu = \frac{mc}{\hbar}$ inverso della lunghezza d'onda Compton associata alla massa m. Le relazioni fondamentali che definiscono le matrici gamma sono ottenibili dalle relazioni (66) e si possono scrivere usando l'anticommutatore ($\{A, B\} \equiv AB + BA$) nella seguente forma

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \ . \tag{72}$$

Nella rappresentazione di Dirac le matrici gamma assumono la forma

$$\gamma^0 = -i\beta = -i \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} , \qquad \gamma^i = -i\beta\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^i \\ i\sigma^i & 0 \end{pmatrix} . \tag{73}$$

In seguito useremo unità di misura con $\hbar = c = 1$, per cui $\mu = m$ e l'equazione di Dirac è scritta come in (60). Una notazione molto in uso impega la definizione introdotta da Feynman ($\not{\partial} \equiv \gamma^\mu \partial_\mu$) per cui l'equazione di Dirac si scrive come

$$(\not{\partial} + m)\psi = 0 \ . \tag{74}$$

Equazione di continuità

Scritta nella forma hamiltoniana con l'operatore H_D hermitiano, è immediato derivare una equazione di continuità che descriva la conservazione di una carica definita positiva. Dirac tentativamente identificò la relativa densità di carica, opportunamente normalizzata, con una densità di probabilità.

Vediamo come ottenere algebricamente l'equazione di continuità. Moltiplichiamo (69) per $\psi^\dagger$ sulla sinistra e sottraiamo l'equazione hemitiano-coniugata moltiplicata per ψ sulla destra. Otteniamo (ricordando che $\vec{\alpha}$ e β sono matrici hermitiane)

$$\psi^\dagger \Big(i\hbar\partial_t \, \psi - (-i\hbar c \, \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + mc^2\beta)\psi \Big) - \Big(- i\hbar\partial_t \, \psi^\dagger - (i\hbar c \, \vec{\nabla}\psi^\dagger \cdot \vec{\alpha} + \psi^\dagger mc^2\beta \Big)\psi = 0 \ ,$$

il termine di massa si semplifica ed il resto è riscrivibile come un'equazione di continuità

$$\partial_t(\psi^\dagger\psi) + \vec{\nabla} \cdot (c\psi^\dagger\vec{\alpha}\psi) = 0 \ . \tag{75}$$

La densità di carica è definita positiva $\psi^\dagger\psi > 0$, e fu inizialmente collegata ad una densità di probabilità.

Alcune proprietà delle matrici gamma

Le matrici β ed α^i sono hermitiane e garantiscono l'hermiticita della hamiltoniana di Dirac. Sono matrici 4×4 (in quattro dimensioni) e con traccia nulla. Le corrispondenti matrici γ^μ ($\gamma^0 = -i\beta$ e $\gamma^i = -i\beta\alpha^i$) soddisfano l'algebra di Clifford scritta nella forma

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \tag{76}$$

con

$$(\gamma^0)^\dagger = -\gamma^0 \ , \qquad (\gamma^i)^\dagger = \gamma^i \tag{77}$$

Dunque le γ^i con indici spaziali sono hermitiane, mentre γ^0 è antihermitiana. Queste relazioni di hermiticità possono essere descritte in modo compatto da

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 \tag{78}$$

o equivalentemente da

$$(\gamma^\mu)^\dagger = -\beta\gamma^\mu\beta. \tag{79}$$

Si può facilmente provare che anche le matrici gamma hanno traccia nulla. Ad esempio,

$$\mathrm{tr}\,\gamma^1 = \mathrm{tr}\,\gamma^1(\gamma^2)^2 = -\mathrm{tr}\,\gamma^2\gamma^1\gamma^2 = -\mathrm{tr}\,\gamma^1(\gamma^2)^2 = -\mathrm{tr}\,\gamma^1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tr}\,\gamma^1 = 0 \tag{80}$$

dove si è usato il fatto che γ^1 e γ^2 anticommutano, e la proprietà di ciclicità della traccia.

Molte proprietà delle matrici gamma sono derivabili usando solamente l'algebra di Clifford, come fatto qui sopra, senza ricorrere ad una loro rappresentazione esplicita.

Conviene inoltre introdurre la matrice di chiralità γ^5, definita da

$$\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{81}$$

che soddisfa alle seguenti proprietà:

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0\ , \quad (\gamma^5)^2 = 1\ , \quad (\gamma^5)^\dagger = \gamma^5\ , \quad \mathrm{tr}(\gamma^5) = 0\ . \tag{82}$$

Nella rappresentazione di Dirac (67) essa assume la forma (usando blocchi 2×2)

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\ . \tag{83}$$

Questa matrice permette di introdurre i proiettori di chiralità

$$P_L = \frac{1-\gamma_5}{2}\ , \qquad P_R = \frac{1+\gamma_5}{2} \tag{84}$$

(sono proiettori poiché $P_L + P_R = 1$, $P_L^2 = P_L$, $P_R^2 = P_R$, $P_L P_R = 0$) che permettono di dividere lo spinore di Dirac nelle sue componenti sinistrorse e destrorse: $\psi = \psi_L + \psi_R$ dove $\psi_L = P_L\psi$ e $\psi_R = P_R\psi$. Come vedremo successivamente, queste componenti chirali (dette spinori di Weyl) si trasformano in modo indipendente per trasformazioni di Lorentz (connesse all'identità) $SO^+(1,3)$.

Le matrici gamma agiscono nello spazio spinoriale, un spazio vettoriale complesso a quattro dimensioni. Gli operatori lineari sono matrici 4×4, e le matrici gamma ne sono un esempio. È utile considerare una base di questi operatori, che possono essere considerati a loro volta appartenenti ad uno spazio vettoriale 16-dimensionale (il numero di componenti indipendenti di una matrice 4×4). Un base è la seguente

$$(1, \gamma^\mu, \Sigma^{\mu\nu}, \gamma^\mu\gamma^5, \gamma^5) \tag{85}$$

dove $\Sigma^{\mu\nu} \equiv -\frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$, che difatti formano 1+4+6+4+1 = 16 matrici linearmente indipendenti. Alternativamente, questa base si può presentare in una forma che si generalizza a tutte le dimensioni spazio-temporali

$$(1, \gamma^\mu, \gamma^{\mu\nu}, \gamma^{\mu\nu\lambda}, \gamma^{\mu\nu\lambda\rho}) \tag{86}$$

dove si sono introdotte le combinazioni completamente antisimmetriche delle matrici gamma

$$\gamma^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} \equiv \frac{1}{n!}(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\ldots\gamma^{\mu_n} \pm \mathit{permutazioni}) \tag{87}$$

deve le permutazioni pari sono sommate mentre quelle dispari sono sottratte.

Soluzioni

L'equazione libera ammette soluzioni di onda piana che, oltre alla fase $e^{ip_\mu x^\mu}$ che descrive l'onda che si propaga nello spaziotempo, possiedono anche una polarizzazione $w(p)$ collegata allo spin. Infatti immettendo come ansatz un'onda piana della forma

$$\psi_p(x) \sim w(p) e^{ip_\mu x^\mu} \ , \qquad w(p) = \begin{pmatrix} w_1(p) \\ w_2(p) \\ w_3(p) \\ w_4(p) \end{pmatrix} \ , \qquad p_\mu \ \text{ arbitrario} \tag{88}$$

nell'equazione di Dirac, si vede che la polarizzazione deve soddisfare l'equazione algebrica $(i\gamma^\mu p_\mu + m)w(p) = 0$ con momento on-shell, $p_\mu p^\mu = -m^2$. Ci sono quattro soluzioni, due ad "energia positiva" (elettrone con spin su e spin giù) e due ad "energia negativa" (positrone con spin su e spin giù). Possiamo dimostrarlo più in dettaglio, inserendo l'ansatz di onda piana nell'equazione di Dirac. Si ottiene ($\not{p} \equiv \gamma^\mu p_\mu$)

$$(i\not{p} + m)w(p) = 0 \tag{89}$$

da cui moltiplicando per $(-i\not{p} + m)$

$$(-i\not{p} + m)(i\not{p} + m)w(p) = (\not{p}^2 + m^2)w(p) = (p_\mu p^\mu + m^2)w(p) = 0 \tag{90}$$

che implica che $p_\mu p^\mu + m^2 = 0$, come preannunciato. Ne segue che esistono soluzioni sia con energia positiva che con energia negativa, come in Klein Gordon.

Per sviluppare un pò d'intuizione consideriamo il caso semplice di particella a riposo con $p^\mu = (E, 0, 0, 0)$, e studiamone le relative polarizzazioni. La (89) diventa

$$0 = (i\gamma^0 p_0 + m)w(p) = (-i\gamma^0 E + m)w(p) = (-\beta E + m)w(p) \tag{91}$$

da cui segue $Ew(p) = m\beta w(p)$. Esplicitando le matrici questa equazione diventa

$$E\, w(p) = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m \end{pmatrix} w(p) \tag{92}$$

Vediamo quindi che esistono due soluzioni indipendenti ad energia positiva $E = m$

$$\psi_1(x) \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt} \ , \qquad \psi_2(x) \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt} \tag{93}$$

e due soluzioni indipendenti ad energia negativa $E = -m$

$$\psi_3(x) \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{imt} \ , \qquad \psi_4(x) \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{imt} \ . \tag{94}$$

Queste ultime saranno reintepretate da Dirac nella sua teoria delle buche come descriventi una antiparticella. Il caso generale con momento arbitrario può essere derivato con calcoli

simili, o ottenuto tramite una trasformazione di Lorentz della soluzione precedente. Per usare quest'ultimo metodo occorre studiare la covarianza dell'eq. di Dirac.

Limite non-relativistico ed equazione di Pauli

Per studiare il limite non relativistico dell'equazione di Dirac reinseriamo $\hbar$ e c. È conveniente usare la forma hamiltoniana

$$i\hbar\partial_t\,\psi = (c\,\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + mc^2\beta)\psi \tag{95}$$

con $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$, traduzione della relazione classica $E = c\,\vec{\alpha}\cdot\vec{p}+mc^2\beta$. Per procedere è conveniente porre la funziona d'onda nella forma

$$\psi(\vec{x},t) = e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2t}\begin{pmatrix}\varphi(\vec{x},t)\\ \chi(\vec{x},t)\end{pmatrix} \tag{96}$$

fattorizzando cioè una dipendenza temporale attesa a causa dell'energia dovuta alla massa della particella, e descrivendo lo spinore di Dirac con due spinori a due componenti φ e χ. Inserendo (96) in (95), ed usando (67), si ottiene per i due spinori bidimensionali

$$i\hbar\partial_t\,\varphi = c\,\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\chi \tag{97}$$

$$mc^2\chi + i\hbar\partial_t\,\chi = c\,\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\varphi - mc^2\chi\,. \tag{98}$$

Nella seconda equazione si può trascurare il termine con la dipendenza temporale $\partial_t\,\chi$, che si presume sia dovuta essenzialmente all'energia cinetica che nel limite nonrelativistico è piccola rispetto alla massa, ottenendo così un'equazione algebrica risolta da

$$\chi = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{2mc}\varphi\,. \tag{99}$$

Inserendo questa soluzione nella prima equazione produce

$$i\hbar\partial_t\,\varphi = \frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2}{2m}\varphi\,. \tag{100}$$

Poichè $(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2 = \vec{p}^2$, si ottiene come limite nonrelativistico un'equazione di Schroedinger libera per tutte e due le componenti dello spinore φ

$$i\hbar\partial_t\,\varphi = \frac{\vec{p}^2}{2m}\varphi\,. \tag{101}$$

Questa analisi può essere ripetuta considerando un accoppiamento al campo elettromagnetico, per studiare meglio gli effetti dello spin. Introduciamo l'accoppiamento al campo elettromagnetico con la sostituzione minimale $p_\mu \to p_\mu - \frac{e}{c}A_\mu(x)$, dove e indica la carica elettrica ($e<0$ per l'elettrone). Tenendo conto che $p^\mu = (\frac{E}{c},\vec{p})$ e $A^\mu = (\Phi,\vec{A})$, con Φ potenziale scalare ed $\vec{A}$ potenziale vettore, questa relazione si traduce in

$$E \to E - e\Phi\,, \qquad \vec{p}\to\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \equiv \vec{\pi} \tag{102}$$

che inserita nella relazione lineare di Dirac produce

$$E = c\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\pi} + mc^2\beta + e\Phi \tag{103}$$

e quindi la seguente equazione di Dirac accoppiata al campo elettromagnetico descritto dal quadripotenziale A_μ

$$i\hbar\partial_t\,\psi = (c\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\pi} + mc^2\beta + e\Phi)\psi \tag{104}$$

dove ora $\vec{\pi} = -i\hbar(\vec{\nabla} - \frac{ie}{\hbar c}\vec{A})$. Inseriamo di nuovo la parametrizzazione di ψ riportata (96) ottenendo per i due spinori bidimensionali

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t\,\varphi &= c\,\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\chi + e\Phi\varphi & (105)\\ mc^2\chi + i\hbar\partial_t\,\chi &= c\,\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\varphi - mc^2\chi + e\Phi\chi\,. & (106)\end{aligned}$$

Nella seconda equazione possiamo trascurare nel lato sinistro la dipendenza temporale, trascurabile nel limite nonrelativistico rispetto a quella esplicitata in (96), e nel lato destro il contributo del termine dovuto al potenziale elettrico, trascurabile rispetto all'energia dovuta alla massa (detto in altro modo si trascurano i termini che sono piccoli quando $c \to \infty$). Otteniamo di nuovo una equazione algebrica per χ, ora risolta da

$$\chi = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}}{2mc}\varphi \tag{107}$$

che sostituita nella prima equazione produce

$$i\hbar\partial_t\,\varphi = \left(\frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})^2}{2m} + e\Phi\right)\varphi\,. \tag{108}$$

L'algebra delle matrici di Pauli ($\sigma^i\sigma^j = \delta^{ij}\mathbb{1} + i\epsilon^{ijk}\sigma^k$) permette di calcolare

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})^2 = \pi^i\pi^j\sigma^i\sigma^j = \vec{\pi}^2 + i\epsilon^{ijk}\pi^i\pi^j\sigma^k \tag{109}$$

e quindi

$$i\epsilon^{ijk}\pi^i\pi^j\sigma^k = i\epsilon^{ijk}\frac{1}{2}[\pi^i,\pi^j]\sigma^k = i\epsilon^{ijk}\frac{1}{2}\frac{i\hbar e}{c}(\partial^i A^j - \partial^j A^i)\sigma^k = -\frac{\hbar e}{c}B^k\sigma^k \tag{110}$$

per cui, introducendo l'operatore di spin $\vec{S} = \frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma}$, si ha

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})^2 = \vec{\pi}^{\,2} - \frac{2e}{c}\vec{S}\cdot\vec{B} \tag{111}$$

e l'equazione sopra diventa

$$i\hbar\partial_t\,\varphi = \left(\frac{\vec{\pi}^{\,2}}{2m} - \frac{e}{mc}\vec{S}\cdot\vec{B} + e\Phi\right)\varphi \tag{112}$$

nota come equazione di Pauli. Questa equazione fu introdotta da Pauli per tener conto dello spin di un elettrone non relativistico nell'equazione di Schroedinger. Essa emerge naturalmente come limite non relativistico dell'equazione di Dirac. Descrive in particolare un rapporto giromagnetico con $g = 2$. A tal proposito è utile ricordare che un dipolo magnetico $\vec{\mu}$ si accoppia al campo magnetico $\vec{B}$ con un termine nell'hamiltoniana della forma

$$H = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}\,.$$

Una carica e in moto con momento angolare $\vec{L}$ produce un dipolo magnetico $\vec{\mu}$ con

$$\frac{|\vec{\mu}|}{|\vec{L}|} = \frac{e}{2mc}\, g$$

dove $g = 1$ è il fattore giromagnetico classico. L'eq. di Dirac produce invece un fattore giromagnetico $g = 2$ associato allo spin intrinseco dell'elettrone.

Queste considerazioni posso essere dedotte anche nel seguente modo. Si consideri un campo magnetico costante $\vec{B}$, descritto dal potenziale vettore $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}$. Esplicitando il termine $\vec{\pi}^2$ nella (112) si riconosce un termine proporzionale al momento angolare $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ e l'equazione di Pauli assume la forma

$$i\hbar\partial_t\, \varphi = \left(\frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e}{2mc}(\vec{L} + 2\vec{S}) \cdot \vec{B} + \frac{e^2}{2mc^2}\vec{A}^2 + e\Phi \right) \varphi \tag{113}$$

da cui si riconosce di nuovo il fattore giromagnetico $g = 2$ del momento di dipolo associato allo spin, differente da $g = 1$ associato al momento magnetico generato dal moto orbitale.

Momento angolare e spin

Abbiamo visto dal limite non relativistico che lo spinore di Dirac descrive una particella di spin 1/2 come l'elettrone, con l'operatore di spin agente sulla componente φ proporzionale alle matrici di Pauli $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$. Questo permette di dedurre che l'operatore di spin agente sull'intero spinore di Dirac a quattro componenti è dato da

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\Sigma} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \tag{114}$$

nella rappresentazione di Dirac (ritorniamo ora ad utilizzare $\hbar = 1$). Le matrici $\vec{\Sigma}$ possono essere scritte anche come

$$\Sigma^i = -\frac{i}{2}\epsilon^{ijk}\alpha^j\alpha^k \tag{115}$$

formula valida in qualunque rappresentazione delle matrici di Dirac.

Il momento angolare orbitale $\vec{L}$ è invece dato come al solito dalla versione operatoriale di

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}\,. \tag{116}$$

Il momento angolare totale $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ è conservato se la simmetria rotazionale è preservata, ad esempio in presenza di potenziali a simmetria sferica. Verifichiamolo per il caso libero. Utilizzando la forma hamiltoniana dell'equazione di Dirac (69) possiamo calcolare

$$[H_D, L^i] = [\alpha^m p_m + \beta m, \epsilon^{ijk}x^j p^k] = -i\epsilon^{ijk}\alpha^j p^k \tag{117}$$

ed anche[1]

$$[H_D, S^i] = [\alpha^m p_m + \beta m, -\frac{i}{4}\epsilon^{ijk}\alpha^j\alpha^k] = -i\epsilon^{ijk}p^j\alpha^k \tag{118}$$

per cui si ha che il momento angolare totale è conservato

$$[H_D, J^i] = [H_D, L^i + S^i] = 0\,. \tag{119}$$

[1] Usando l'identità $[A, BC] = \{A, B\}C - B\{A, C\}$.

Atomo d'idrogeno ed equazione di Dirac

Un test cruciale per l'equazione di Dirac fu quello di verificare le sue predizioni per i livelli energetici quantizzati nell'atomo d'idrogeno. Il problema è esattamente risolubile. È comunque utile presentare la soluzione anche in forma approssimata, per poterla paragonare con la soluzione non relativistica ottenuta dall'equazione di Schroedinger. I risultati ottenuti dalle equazioni di Schrödinger, Klein-Gordon e Dirac sono

$$E_{nl}^{(S)} = -\frac{m\alpha^2}{2n^2} \tag{120}$$

$$E_{nl}^{(KG)} = m\left[1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{\alpha^4}{n^4}\left(\frac{n}{2l+1} - \frac{3}{8}\right) + O(\alpha^6)\right] \tag{121}$$

$$E_{nl}^{(D)} = m\left[1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{\alpha^4}{n^4}\left(\frac{n}{2j+1} - \frac{3}{8}\right) + O(\alpha^6)\right] \tag{122}$$

con $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \sim \frac{1}{137}$ costante di struttura fine, e dove nell'ultima formula compare $j = l \pm \frac{1}{2}$ se $l > 0$, o $j = l + \frac{1}{2}$ se $l = 0$. Il risultato non-relativistico ha numero quantico principale $n = 1, 2, 3, ..., \infty$, ed una degenerazione in $l = 0, 1, ..., n-1$. Infatti si può mostrare che $n - l$ deve essere un intero positovo, $n - l > 0$. La degenerazione[2] in l è rotta da effetti relativistici (struttura fine), ma la predizione di Klein-Gordon, dove $2l + 1$ può essere solo un numero intero dispari, è in contraddizione con i risultati sperimentali (serie spettroscopica di Pashen). La predizione ottenuta dall'equazione di Dirac, dove $2j + 1$ è pari, dà invece un risultato compatibile con gli esperimenti[3].

Non riporteremo qui una deduzione esplicita dello spettro e delle relative autofunzioni. Ricordiamo però che lo spettro può essere ottenuto partendo dalla soluzione del problema agli autovalori in Schrödinger ed operando delle sostituzioni che lo relazionano al problema agli autovalori in Klein-Gordon e Dirac (si veda ad esempio, Itzykson-Zuber, "QFT", pag 71-78, ed anche la discussione storica in Weinberg, "QFT-vol I" pag. 3-14 che è molto utile). Ecco alcuni cenni al riguardo.

Il problema agli autovalori con l'equazione di Schrödinger per elettrone nel campo coulombiano del protone (il nucleo dell'atomo d'idrogeno) assume la forma

$$\hat{H}\psi_{nlm} = E_{nl}\psi_{nlm} \qquad \hat{H} = -\frac{1}{2m}\nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi r} \tag{123}$$

dove nlm sono numeri quantici, e dove abbiamo anticipato la degenerazione nel numero quantico magnetico m, conseguenza della simmetria sferica. Esplicitando il laplaciano in coordinate sferiche $\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\partial_r r^2 \partial_r - \frac{\vec{L}^2}{r^2}$ con $\vec{L}$ l'operatore momento ($\vec{L}^2$ ha autovalori $l(l+1)$ con l intero non negativo) questa equazione agli autovalori assume la forma esplicita (usando $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$)

$$\left[-\frac{1}{2m}\frac{1}{r^2}\partial_r r^2 \partial_r + \frac{1}{2m}\frac{\vec{L}^2}{r^2} - \frac{\alpha}{r} - E_{nl}\right]\psi_{nlm} = 0 \tag{124}$$

[2]Naturalmente c'è anche una degenerazione in m, il numero quantico magnetico autovalore di L_3, comune ai tre casi.

[3]Altri effetti più piccoli sono, ad esempio, la struttura iperfine dovuta all'interazione con il momento magnetico del nucleo, o le correzioni note come "Lamb shift" che rompono la degenerazione in j, dovute a correzioni quantistiche ottenibili quantizzado il campo di Dirac.

Come noto, gli autovalori sono degeneri anche in l e sono dati da

$$E_{nl} = -\frac{m\alpha^2}{2}\frac{1}{n^2}\ , \qquad n = 1, 2, .., \infty\ , \quad l = 0, 1, 2, .., n-1\ , \quad m = l, l-1, .., -l \tag{125}$$

Studiamo ora il caso dell'eq. di Klein-Gordon. Con la sostituzione minimale, questa assume la forma

$$\left[-\left(E + \frac{e^2}{4\pi r}\right)^2 - \nabla^2 + m^2\right]\phi = 0 \tag{126}$$

che esplicitata in coordinate sferiche assume la forma

$$\left[-\frac{1}{r^2}\partial_r r^2 \partial_r + \frac{\vec{L}^2 - \alpha^2}{r^2} - \frac{2E\alpha}{r} - (E^2 - m^2)\right]\phi = 0 \tag{127}$$

Questa equazione può essere ottenuta da quella di Schrödinger con le sostituzioni

$$\begin{aligned} \vec{L}^2 = l(l+1) \quad &\rightarrow \quad \vec{L}^2 - \alpha^2 = l(l+1) - \alpha^2 = \lambda(\lambda+1) \\ \alpha \quad &\rightarrow \quad \frac{\alpha E}{m} \\ E \quad &\rightarrow \quad \frac{E^2 - m^2}{2m} \end{aligned} \tag{128}$$

come si verifica con un calcolo immediato. Possiamo quindi ottenerne gli autovalori. Poiché $l(l+1) \rightarrow \lambda(\lambda+1)$ possiamo porre $\lambda = l - \delta_l$ e calcolare

$$\delta_l = \left(l + \frac{1}{2}\right)\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{l+\frac{1}{2}}\right)^2}\right) = \frac{\alpha^2}{2l+1} + O(\alpha^4)\ . \tag{129}$$

Ora, sappiamo che $n - l$ deve essere un intero positivo, e poichè $l \rightarrow \lambda = l - \delta_l$, anche n subirà uno shift analogo $n \rightarrow \tilde{n} = n - \delta_l$, cosicché $\tilde{n} - \lambda$ rimanga un intero positivo. Operando infine le sostituzioni (128) in (125) otteniamo

$$\frac{E_{nl}^2 - m^2}{2m} = -\frac{m}{2}\frac{\alpha^2 E_{nl}^2}{m^2}\frac{1}{(n-\delta_l)^2}\ , \qquad n = 0, 1, 2, ..., \infty \tag{130}$$

da cui si ricava

$$E_{nl} = m\left(1 + \frac{\alpha^2}{(n-\delta_l)^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{131}$$

che sviluppata per δ_l piccoli come in (129) produce la (121).

Una procedura analoga si può seguire per l'eq. di Dirac. Dall'eq. di Dirac con accoppiamento minimale $(\gamma^\mu D_\mu + m)\psi = 0$ con $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$, si ottiene che ψ soddisfa anche una equazione di Klein-Gordon, ma con un accoppiamento non-minimale aggiuntivo

$$(\gamma^\mu D_\mu - m)(\gamma^\mu D_\mu + m)\psi = \left[D^\mu D_\mu - \frac{ie}{2}F_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu - m^2\right]\psi = 0 \tag{132}$$

Il termine aggiuntivo (non-minimale) rispetto all'eq. di Klein-Gordon precedente è

$$-\frac{ie}{2}F_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu = -ie\vec{E}\cdot\vec{\alpha} \tag{133}$$

quando valutato sul campo coulombiano. Si può dimostrare che il suo effetto è quello di cambiare l in j nelle formule precedenti, dove naturalmente $j = l \pm \frac{1}{2}$ se $l > 0$, o $j = l + \frac{1}{2}$ se $l = 0$. Da questo segue la (122).

Covarianza

L'equazione di Dirac, derivata da considerazioni relativistiche, è consistente con l'invarianza relativistica. Per mostrarlo esplicitamente occorre far vedere che l'equazione è invariante in forma per cambio di sistema di riferimento generato da una trasformazione di Lorentz propria ed ortocrona. Infatti, per invarianza di Lorentz generalmente si intende la simmetria collegata alle trasformazioni di Lorentz connesse all'identità, che formano il gruppo di Lorentz proprio ed ortocrono $SO^+(1,3)$. Le trasformazioni discrete di inversione spaziale P e temporale T sono trattate separatamente.

Quindi occorre dedurre le corrette trasformazioni dello spinore di Dirac per una trasformazione di Lorentz Λ. Si può supporre che siano lineari e della forma

$$\psi(x) \quad \longrightarrow \quad \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) \tag{134}$$

per cui una trasformazione di Lorentz agisce come

$$\begin{array}{lcl} (\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi(x) = 0 & \Longleftrightarrow & (\gamma^\mu \partial'_\mu + m)\psi'(x') = 0 \\ x^\mu & & x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \\ \partial_\mu & & \partial'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu \\ \psi(x) & & \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) \quad . \end{array}$$

Eseguendo la trasformazione che collega il secondo sistema di riferimento al primo, e moltiplicando per $S^{-1}(\Lambda)$, vediamo che un' equazione implica l'altra se $S(\Lambda)$ soddisfa la relazione

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)\Lambda_\mu{}^\nu = \gamma^\nu \tag{135}$$

o equivalentemente

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu \tag{136}$$

(è sufficiente moltiplicare la prima relazione per $\Lambda^\rho{}_\nu$, ed usare la proprietà $\Lambda_\mu{}^\nu \Lambda^\rho{}_\nu = \delta^\rho_\mu$ soddisfatta dalle matrici di Lorentz[4]). Per convicersi che esistono matrici $S(\Lambda)$ siffatte, è sufficiente considerare trasformazioni infinitesime, per cui

$$\begin{array}{l} \Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu \qquad \text{con} \;\; \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu} \qquad (\Lambda = \mathbb{1} + \omega \;\; \text{in forma matriciale}) \\ S(\Lambda) = \mathbb{1} + \dfrac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu} \end{array} \tag{137}$$

dove $\Sigma^{\mu\nu} = -\Sigma^{\nu\mu}$ descrivono 6 matrici 4×4 che agiscono sugli spinori come generatori delle trasformazioni di Lorentz. Sostituendo queste espressioni nella (135), o nella (136), si ottiene la relazione

$$[\Sigma^{\mu\nu}, \gamma^\rho] = i(\eta^{\mu\rho}\gamma^\nu - \eta^{\nu\rho}\gamma^\mu) \tag{138}$$

che rappresenta una equazione per le $\Sigma^{\mu\nu}$. La soluzione esiste ed è data da

$$\Sigma^{\mu\nu} = -\frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \; . \tag{139}$$

[4] In notazione matriciale questa relazione è tradotta in $\eta\Lambda\eta^{-1}\Lambda^T = I$, che è facilmente verificata.

Questo prova l'invarianza di Lorentz (trasformazioni finite possono infatti essere ottenute iterando trasformazioni infinitesime). La verifica di (139) è fatta con un calcolo esplicito.

Per fare esperienza si può iniziare testando la (138) per alcuni valori degli indici, ad esempio $(\mu, \nu, \rho) = (1, 2, 2)$, che produce

$$[\Sigma^{12}, \gamma^2] = -i\gamma^1 \ . \tag{140}$$

Per verificarla vediamo che da (139) possiamo scrivere

$$\Sigma^{12} = -\frac{i}{4}[\gamma^1, \gamma^2] = -\frac{i}{2}\gamma^1\gamma^2 \tag{141}$$

e calcolare

$$[\Sigma^{12}, \gamma^2] = -\frac{i}{2}[\gamma^1\gamma^2, \gamma^2] = -\frac{i}{2}(\gamma^1\gamma^2\gamma^2 - \gamma^2\gamma^1\gamma^2) = -i\gamma^1 \ . \tag{142}$$

In generale si può calcolare

$$\begin{aligned}
[\Sigma^{\mu\nu}, \gamma^\rho] &= -\frac{i}{4}[(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu), \gamma^\rho] = -\frac{i}{4}[\gamma^\mu\gamma^\nu, \gamma^\rho] - (\mu \leftrightarrow \nu) \\
&= -\frac{i}{4}\Big(\gamma^\mu\{\gamma^\nu, \gamma^\rho\} - \{\gamma^\mu, \gamma^\rho\}\gamma^\nu\Big) - (\mu \leftrightarrow \nu) \\
&= -\frac{i}{2}(\gamma^\mu\eta^{\nu\rho} - \eta^{\mu\rho}\gamma^\nu) - (\mu \leftrightarrow \nu) \\
&= i(\eta^{\mu\rho}\gamma^\nu - \eta^{\nu\rho}\gamma^\mu) \ .
\end{aligned} \tag{143}$$

Per trasformazioni finite, dove le $\omega_{\mu\nu}$ non sono piccole, si puo usare la parametrizzazione esponenziale

$$S(\Lambda) = e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}} \tag{144}$$

che può essere scritta anche nella forma

$$S(\Lambda) = e^{\frac{1}{4}\omega_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu} \ . \tag{145}$$

Esempi

Trasformazioni con $\omega_{12} = -\omega_{21} = \varphi$ sono rotazioni attorno all' asse z. Se il parametro è finito (non infinitesimo)

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos\varphi & \sin\varphi & \\ & -\sin\varphi & \cos\varphi & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \tag{146}$$

e dalla (144)

$$\begin{aligned}
S(\Lambda) &= \exp\left(\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}\right) = \exp\left(\frac{1}{4}\omega_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu\right) = \exp\left(\frac{\varphi}{2}\gamma^1\gamma^2\right) \\
&= \exp\left(\frac{i\varphi}{2}\begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\varphi}{2}} & & & \\ & e^{-\frac{i\varphi}{2}} & & \\ & & e^{\frac{i\varphi}{2}} & \\ & & & e^{-\frac{i\varphi}{2}} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{147}$$

che risulta essere una trasformazione unitaria $S^\dagger(\Lambda) = S^{-1}(\Lambda)$. Nell'esplicitare le matrici gamma abbiamo usato la rappresentazione di Dirac. Risulta evidente che si tratta di una trasformazione spinoriale, cioè a due valori, in quanto la rotazione con $\varphi = 2\pi$ che coincide con l'identità sui vettori, è rappresentata da -1 sugli spinori. Occorre fare un rotazione di 4π per ottenere l'identità .

In modo analogo, si ottiene che una rotazione di un angolo φ attorno all'asse identificato dal versore $\hat{n}$ è rappresentata sugli spinori da

$$S(\Lambda) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}\hat{n}\cdot\vec{\sigma}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\varphi}{2}\hat{n}\cdot\vec{\sigma}} \end{pmatrix} \tag{148}$$

e si verifica facilmente che tali matrici sono unitarie.

Un boost lungo l'asse x è generato da $\omega_{10} = -\omega_{01}$ che per valori finiti produce

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \cosh\omega_{10} & \sinh\omega_{10} & & \\ \sinh\omega_{10} & \cosh\omega_{10} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & & \\ -\beta\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \tag{149}$$

da cui $\gamma = \cosh\omega_{10}$ e $\beta = -\tanh\omega_{10}$. Sugli spinori questo boost è rappresentato da

$$\begin{aligned} S(\Lambda) &= \exp\left(\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}\right) = \exp\left(\frac{1}{4}\omega_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu\right) = \exp\left(\frac{\omega_{10}}{2}\gamma^1\gamma^0\right) \\ &= \exp\left(\frac{\omega_{10}}{2}\alpha^1\right) = \mathbb{1}\cosh\frac{\omega_{10}}{2} + \alpha^1\sinh\frac{\omega_{10}}{2} \end{aligned} \tag{150}$$

Si noti che questa trasformazione non è unitaria, ma soddisfa $S^\dagger(\Lambda) = S(\Lambda)$.

Pseudounitarietà

La rappresentazione spinoriale in (144) non è unitaria, $S^\dagger(\Lambda) \neq S^{-1}(\Lambda)$, come abbiamo visto negli esempi. Questo è comprensibile alla luce di un teorema secondo cui le rappresentazioni unitarie di gruppi compatti sono finito-dimensionali, mentre quelle di gruppi non-compatti sono infinito-dimensionali. Il gruppo di Lorentz è non-compatto per via dei boosts.

Le rappresentazioni spinoriali sono comunque pseudounitarie, nel senso che

$$S^\dagger(\Lambda) = \beta S^{-1}(\Lambda)\beta \ . \tag{151}$$

Infatti usando $\gamma^{\mu\dagger} = -\beta\gamma^\mu\beta$ si può calcolare

$$\Sigma^{\mu\nu\dagger} = \left(-\frac{i}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\right)^\dagger = \frac{i}{4}[\gamma^{\nu\dagger},\gamma^{\mu\dagger}] = -\frac{i}{4}[\gamma^{\mu\dagger},\gamma^{\nu\dagger}] = \beta\Sigma^{\mu\nu}\beta \tag{152}$$

da cui segue

$$S^\dagger(\Lambda) = \left(e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}}\right)^\dagger = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu\dagger}} = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\beta\Sigma^{\mu\nu}\beta} = \beta e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}}\beta = \beta S^{-1}(\Lambda)\beta \ . \tag{153}$$

Trasformazioni di bilineari fermionici

Visto il risultato precedente, risulta utile definire lo spinore $\overline{\psi}(x)$, detto coniugato di Dirac dello spinore $\psi(x)$, definito da

$$\overline{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\beta \tag{154}$$

che sotto trasformazioni di Lorentz cambia come

$$\overline{\psi}'(x') = \overline{\psi}(x) S^{-1}(\Lambda) \; , \tag{155}$$

infatti

$$\overline{\psi}'(x') = \psi'^{\dagger}(x')\beta = (S(\Lambda)\psi(x))^{\dagger}\beta = \psi^{\dagger}(x) S^{\dagger}(\Lambda)\beta = \psi^{\dagger}(x)\beta S^{-1}(\Lambda)\beta^2 = \overline{\psi}(x) S^{-1}(\Lambda) \; . \tag{156}$$

Ne segue immediatamente che il bilineare $\overline{\psi}(x)\psi(x)$ è uno scalare per $SO^+(1,3)$

$$\overline{\psi}'(x')\psi'(x') = \overline{\psi}(x) S(\Lambda) S^{-1}(\Lambda)\psi(x) = \overline{\psi}(x)\psi(x) \; . \tag{157}$$

La grandezza $\psi^{\dagger}\psi$ non è invece uno scalare, ma costituisce la componete temporale del quadrivettore $J^{\mu} = (J^0, \vec{J}) = (\psi^{\dagger}\psi, \psi^{\dagger}\vec{\alpha}\psi)$, la corrente nell'equazione di continuità (75), che può essere riscritta in maniera manifestamente covariante come

$$J^{\mu} = i\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi \; . \tag{158}$$

Le leggi di trasformazione di J^{μ} sono effettivamente quelle di un quadrivettore

$$\begin{aligned} J'^{\mu}(x') &= i\overline{\psi}'(x')\gamma^{\mu}\psi'(x') = i\overline{\psi}(x) S^{-1}(\Lambda)\gamma^{\mu} S(\Lambda)\psi(x) = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} i\overline{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x) \\ &= \Lambda^{\mu}{}_{\nu} J^{\nu}(x) \end{aligned} \tag{159}$$

dove si è usata la proprietà (136).

In generale, usando la base di operatori nello spazio spinoriale

$$\Gamma^A = (\mathbb{1}, \gamma^{\mu}, \Sigma^{\mu\nu}, \gamma^{\mu}\gamma^5, \gamma^5)$$

si possono definire bilineari fermionici della forma

$$\overline{\psi}\Gamma^A\psi \tag{160}$$

che si trasformano rispettivamente come scalare, vettore, tensore antisimmetrico a due indici, pseudovettore, pseudoscalare. Abbiamo già discusso i primi due casi. Per lo pseudoscalare (trascurando la dipendenza dal punto dello spaziotempo) si ha

$$(\overline{\psi}\gamma^5\psi)' = \overline{\psi} S(\Lambda)\gamma^5 S^{-1}(\Lambda)\psi = \overline{\psi}\gamma^5\psi \; . \tag{161}$$

uno scalare per trasformazioni di Lorentz proprie ed ortocrone (l'aggettivo "pseudo" si riferisce ad un comportamento diverso sotto riflessioni spaziali, i.e. trasformazioni di parità). Come ultimo esempio consideriamo il tensore antisimmetrico

$$\begin{aligned} (\overline{\psi}\Sigma^{\mu\nu}\psi)' &= \overline{\psi} S(\Lambda)\left(-\frac{i}{4}[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]\right) S^{-1}(\Lambda)\psi = \overline{\psi}\left(-\frac{i}{4}[S(\Lambda)\gamma^{\mu}S^{-1}, S(\Lambda)\gamma^{\nu}S^{-1}]\right)(\Lambda)\psi \\ &= \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}\,\overline{\psi}\Sigma^{\rho\sigma}\psi \; . \end{aligned} \tag{162}$$

dove si è usata la proprietà (136).

Covarianza 2

Nella prova delle covarianza, abbiamo ottenuto una rappresentazione spinoriale[5] $S(\Lambda)$ del gruppo di Lorentz

$$\begin{array}{rcl} x^\mu & \longrightarrow & x^{\mu\prime} = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \\ \psi(x) & \longrightarrow & \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) \end{array} \tag{163}$$

che per trasformazioni infinitesime $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$ prende la forma

$$S(\Lambda) = \mathbb{1} + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu} \tag{164}$$

dove i generatori $\Sigma^{\mu\nu}$ sono costruiti con le matrici gamma, $\Sigma^{\mu\nu} = -\frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$. Questi generatori realizzano correttamente l'algebra di Lie del gruppo di Lorentz[6]

$$[\Sigma^{\mu\nu}, \Sigma^{\lambda\rho}] = -i\eta^{\nu\lambda}\Sigma^{\mu\rho} + i\eta^{\mu\lambda}\Sigma^{\nu\rho} + i\eta^{\nu\rho}\Sigma^{\mu\lambda} - i\eta^{\mu\rho}\Sigma^{\nu\lambda} \ . \tag{170}$$

Come esercizio si può verificare un caso particolare, ad esempio $[\Sigma^{01}, \Sigma^{12}] = -i\Sigma^{02}$. Possiamo esplicitare $\Sigma^{01} = -\frac{i}{4}[\gamma^0, \gamma^1] = -\frac{i}{2}\gamma^0\gamma^1$, e $\Sigma^{12} = -\frac{i}{2}\gamma^1\gamma^2$, $\Sigma^{02} = -\frac{i}{2}\gamma^0\gamma^2$, e calcolare

$$\begin{array}{rcl} [\Sigma^{01}, \Sigma^{12}] & = & \Big(-\frac{i}{2}\Big)^2 [\gamma^0\gamma^1, \gamma^1\gamma^2] = -\frac{1}{4}\Big(\gamma^0\gamma^1\gamma^1\gamma^2 - \gamma^1\gamma^2\gamma^0\gamma^1\Big) \\ & = & -\frac{1}{4}\Big(\gamma^0\gamma^2 - \gamma^2\gamma^0\Big) = -\frac{1}{2}\gamma^0\gamma^2 = -i\Sigma^{02} \ . \end{array} \tag{171}$$

Il calcolo generale procede essenzialmente allo stesso modo.

---

[5] Rappresentazione a due valori del gruppo di Lorentz.

[6] Ricordiamo un modo per identificare l 'algebra di Lie del gruppo di Lorentz. Possiamo scrivere le trasformazioni infinitesime

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu \tag{165}$$

in forma matriciale come

$$\Lambda = \mathbb{1} + \omega = \mathbb{1} + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu} \tag{166}$$

per esporre nel lato destro le 6 matrici 4×4 $M^{\mu\nu}$ (con $M^{\nu\mu} = -M^{\mu\nu}$) che moltiplicano i 6 coefficienti $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ parametrizzanti il gruppo di Lorentz. Queste 6 matrici hanno evidentemente i seguenti elementi di matrice

$$(M^{\mu\nu})^\lambda{}_\rho = -i(\eta^{\mu\lambda}\delta^\nu_\rho - \eta^{\nu\lambda}\delta^\mu_\rho) \tag{167}$$

(basta paragonare (165) con (166)). Ora con un calcolo esplicito si ottiene l'algebra di Lie del gruppo

$$\begin{array}{rcl} [M^{\mu\nu}, M^{\lambda\rho}] & = & -i\eta^{\nu\lambda}M^{\mu\rho} + i\eta^{\mu\lambda}M^{\nu\rho} + i\eta^{\nu\rho}M^{\mu\lambda} - i\eta^{\mu\rho}M^{\nu\lambda} \\ & = & -i\eta^{\nu\lambda}M^{\mu\rho} + 3 \text{ termini} \ . \end{array} \tag{168}$$

Pensata come algebra astratta, si pone il problema di identificare le sue rappresentazioni (possibilmente irriducibili), che sotto esponenziazione danno rappresentazioni del gruppo di Lorentz. Le $\Sigma^{\mu\nu}$ forniscono appunto una rappresentazione spinoriale (a due valori) su spinori complessi a 4 componenti.

Per trasformazioni finite possiamo scrivere

$$\begin{array}{rcl} \Lambda(\omega) & = & e^\omega = e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}} \\ S(\Lambda(\omega)) & = & e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}} \end{array} \tag{169}$$

dove le matrici $M^{\mu\nu}$ sono i generatori nella rappresentazione definente (rappresentazione vettoriale).

In termini gruppali la relazione (135) indica il fatto che le matrici γ^μ sono tensori invarianti (coefficienti di Clebsh-Gordon). Infatti, si può riscrivere la (135) come

$$\Lambda^\mu{}_\nu S(\Lambda)\gamma^\nu S^{-1}(\Lambda) = \gamma^\mu$$

che è interpretata come una trasformazione che opera su tutti gli indici di γ^μ (indici tensoriali espliciti e spinoriali sottointesi) e che lascia γ^μ invariante

$$\gamma^\mu \quad \longrightarrow \quad \gamma^{\mu\prime} = \Lambda^\mu{}_\nu S(\Lambda)\gamma^\nu S^{-1}(\Lambda) = \gamma^\mu \tag{172}$$

Questo ci dice che γ^μ è un tensore invariante proprio, come la metrica $\eta_{\mu\nu}$.

Con queste proprietà gruppali è facile mostrare di nuovo l'invarianza in forma dell'equazione di Dirac

$$(\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\gamma^\mu\partial'_\mu + m)\psi'(x') = 0 \tag{173}$$

nel seguente modo: sfruttando il fatto che le matrici gamma sono tensori invarianti, possiamo riscrivere il lato sinistro della seconda equazione con $\gamma^{\mu\prime}$ per cui trasformando tutti gli indici (sia tensoriali che spinoriali) e tenendo conto delle invarianze (contrazione di indici alti e bassi della stessa natura producono uno scalare) si ha

$$\begin{aligned}(\gamma^\mu\partial'_\mu + m)\psi'(x') &= (\gamma^{\mu\prime}\partial'_\mu + m)\psi'(x') \\ &= S(\Lambda)(\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi(x)\end{aligned} \tag{174}$$

da cui segue la (173). È lo stesso calcolo fatto precedentemente, ma semplificato perchè ora conosciamo le proprietà di trasformazione dei vari oggetti e relativi prodotti scalari: con questa reinterpretazione la covarianza è manifesta e corrisponde alla trasformazione dello spinore $\chi(x) \equiv (\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi(x)$ (che è uguale a zero in tutti i sistemi di riferimento).

Oltre alle trasformazioni di Lorentz connesse all'identità, si può mostare l'invarianza dell'equazione di Dirac libera per trasformazioni discrete quali la riflessione spaziale (o parità) P, la riflessione temporale T e la coniugazione di carica C che scambia particelle con antiparticelle.

Parità P

Discutiamo la trasformazione di parità che inverte l'orientamento degli assi spaziali

$$\begin{aligned} t \quad &\xrightarrow{P} \quad t' = t \\ \vec{x} \quad &\xrightarrow{P} \quad \vec{x}' = -\vec{x}\,. \end{aligned} \tag{175}$$

In notazione tensoriale

$$x^\mu \quad \xrightarrow{P} \quad x'^\mu = P^\mu{}_\nu x^\nu\,, \qquad\qquad P^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\,. \tag{176}$$

Questa è una operazione discreta con $\det(P^\mu{}_\nu) = -1$. Appartiene al gruppo di Lorentz $O(3,1)$ ma non è connessa all'identità. Insieme all'identità forma un sottogruppo isomorfo a $Z_2 = \{1, -1\}$. L'invarianza per parità si può studiare congetturando una opportuna trasformazione lineare dello spinore

$$\psi(x) \quad \xrightarrow{P} \quad \psi'(x') = \mathcal{P}\psi(x) \tag{177}$$

generata da una opportuna matrice $\mathcal{P}$. Richiedendo l'invarianza in forma dell'equazione di Dirac

$$
\begin{array}{lcl}
(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi(x) = 0 & \overset{P}{\Longleftrightarrow} & (\gamma^\mu \partial'_\mu + m)\psi'(x') = 0 \\
x^\mu & & x'^\mu = P^\mu{}_\nu x^\nu \\
\partial_\mu & & \partial'_\mu = P_\mu{}^\nu \partial_\nu \\
\psi(x) & & \psi'(x') = \mathcal{P}\psi(x)
\end{array}
$$

si determina la forma di $\mathcal{P}$. Procedendo in modo del tutto identico al caso delle trasformazioni di Lorentz $S(\Lambda)$ si trova la relazione

$$\mathcal{P}^{-1}\gamma^\mu \mathcal{P} P_\mu{}^\nu = \gamma^\nu \tag{178}$$

o equivalentemente

$$\mathcal{P}^{-1}\gamma^\mu \mathcal{P} = P^\mu{}_\nu \gamma^\nu = \begin{pmatrix} \gamma^0 \\ -\gamma^i \end{pmatrix} . \tag{179}$$

Una matrice $\mathcal{P}$ che commuti con γ^0 e anticommuti con le γ^i è data da γ^0 stessa o, equivalentemente, da $\beta = i\gamma^0$. Si può quindi scegliere come trasformazione di parità $\mathcal{P} = \eta_P \beta$:

$$\psi'(x') = \eta_P \, \beta \psi(x) \tag{180}$$

con η_P una fase fissata dalla richiesta che $\mathcal{P}^4$ coincida con l'indentità sui fermioni (da cui $\eta_P = (\pm 1, \pm i)$). Scegliamo $\eta_P = 1$ per semplicità e quindi abbiamo per lo spinore ed il suo coniugato di Dirac

$$
\begin{array}{rcl}
\psi(x) & \overset{P}{\longrightarrow} & \psi'(x') = \beta\psi(x) \\
\bar\psi(x) & \overset{P}{\longrightarrow} & \bar\psi'(x') = \bar\psi(x)\beta \, .
\end{array} \tag{181}
$$

Da queste trasformazioni basilari seguono le trasformazioni per i bilineari fermionici

$$
\begin{array}{rcll}
\overline{\psi}(x)\psi(x) & \overset{P}{\longrightarrow} & \overline{\psi}'(x')\psi'(x') = \overline{\psi}(x)\psi(x) & \text{scalare} \\
\overline{\psi}(x)\gamma^5\psi(x) & \overset{P}{\longrightarrow} & \overline{\psi}'(x')\gamma^5\psi'(x') = -\overline{\psi}(x)\gamma^5\psi(x) & \text{pseudoscalare}
\end{array} \tag{182}
$$

e in notazione più semplice (ignorando la dipendenza spaziale)

$$
\begin{array}{rcll}
\overline{\psi}\gamma^\mu\psi & \overset{P}{\longrightarrow} & \overline{\psi}'\gamma^\mu\psi' = P^\mu{}_\nu \, \overline{\psi}\gamma^\nu\psi & 4-\text{vettore polare} \\
\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi & \overset{P}{\longrightarrow} & \overline{\psi}'\gamma^\mu\gamma^5\psi' = -P^\mu{}_\nu \, \overline{\psi}\gamma^\nu\gamma^5\psi & 4-\text{vettore assiale} \\
\overline{\psi}\Sigma^{\mu\nu}\psi & \overset{P}{\longrightarrow} & \overline{\psi}'\Sigma^{\mu\nu}\psi' = P^\mu{}_\lambda P^\nu{}_\rho \, \overline{\psi}\Sigma^{\lambda\rho}\psi \, . &
\end{array} \tag{183}
$$

Proprietà chirali

Analizziamo la riducibilità dello spinore di Dirac sotto il gruppo di Lorentz proprio ed ortocrono $SO^+(1,3)$. Costruendo i proiettori[7]

$$P_L = \frac{1-\gamma_5}{2} \, , \qquad P_R = \frac{1+\gamma_5}{2} \tag{184}$$

[7]Sono proiettori poiché sono matrici hermitiane che soddisfano $P_L + P_R = \mathbb{1}$, $P_L^2 = P_L$, $P_R^2 = P_R$, $P_L P_R = 0$.

possiamo dividere lo spinore di Dirac nelle sue componenti sinistrorse e destrorse

$$\psi = \psi_L + \psi_R \ , \qquad \psi_L \equiv \frac{1-\gamma_5}{2}\psi \ , \qquad \psi_R \equiv \frac{1+\gamma_5}{2}\psi \ . \tag{185}$$

Queste componenti chirali costituiscono le due rappresentazioni irriducibili di spin 1/2 del gruppo di Lorentz proprio ed ortocrono. L'irrudicibilità segue dal fatto che i generatori infinitesimi $\Sigma^{\mu\nu}$ delle trasformazioni di Lorentz commutano con i proiettori P_L e P_R. Di conseguenza anche le trasformazioni finite commuteranno con i proiettori. Ad esempio, considerando P_L possiamo calcolare (sfruttando il fatto che la matrice γ^5 commuta con un numero pari di matrici gamma)

$$P_L\Sigma^{\mu\nu} = \frac{1-\gamma_5}{2}\Big(-\frac{i}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\Big) = \Big(-\frac{i}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\Big)\frac{1-\gamma_5}{2} = \Sigma^{\mu\nu}P_L \tag{186}$$

e similmente per P_R. Questo indica come lo spinore di Dirac sia riducibile nella sue parti destrorse e sinistrorse, che dunque si trasformano in modo indipendente sotto $SO^+(1,3)$. Infatti, dalla (186) segue che, considerando per semplicità trasformazioni di Lorentz infinitesime,

$$(\psi_L)' = \Big(1+\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}\Big)\psi_L = \Big(1+\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}\Big)P_L\psi_L = P_L\Big(1+\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}\Big)\psi_L = P_L(\psi_L)' \tag{187}$$

che evidenzia che il trasformato $(\psi_L)'$ rimane sinistrorso. Gli spinori destrorsi e sinistrorsi sono chiamati spinori di Weyl.

Includendo la parità, lo spinore di Dirac non è più riducibile: la parità trasforma la sua parte sinistrorsa nella sua parte destrorsa e viceversa:

$$\psi_L \xrightarrow{P} (\psi_L)' = \Big(\frac{1-\gamma_5}{2}\psi\Big)' = \beta\Big(\frac{1-\gamma_5}{2}\psi\Big) = \frac{1+\gamma_5}{2}\beta\psi = \frac{1+\gamma_5}{2}\psi' = (\psi')_R \ . \tag{188}$$

Nota: si possono costruire sistematicamente le rappresentazioni del gruppo di Lorentz sfruttando il fatto che la sua algebra di Lie può essere scritta in termini di due algebre di Lie di SU(2) commutanti tra loro, $SO(1,3) \sim SU(2)\times SU(2)$. Si possono quindi assegnare due numeri quantici interi o seminiteri (j,j') per indicare una rappresentazione irriducibile, sfruttando la conoscenza delle rappresentazioni di $SU(2)$. Le rappresentazioni irriducibili inequivalenti $(\frac{1}{2},0)$ e $(0,\frac{1}{2})$ corrispondono agli spinori chirali descritti sopra (spinori di Weyl). Lo spinore di Dirac forma una rappresentazione riducibile di $SO^+(1,3)$ data dalla somma diretta $(\frac{1}{2},0)\oplus(0,\frac{1}{2})$, che diventa irriducibile se si considera il gruppo $O(1,3)$ includente la trasformazione di parità. Teorie chirali (non invarianti per parità) possono essere costruite usando fermioni di Weyl, piuttosto che fermioni di Dirac.

Inversione temporale T

Discutiamo ora la trasformazione di inversione temporale

$$\begin{aligned} t \quad &\xrightarrow{T} \quad t' = -t \\ \vec{x} \quad &\xrightarrow{T} \quad \vec{x}' = \vec{x} \end{aligned} \tag{189}$$

che in notazione tensoriale diventa

$$x^\mu \quad \xrightarrow{T} \quad x'^\mu = T^\mu{}_\nu x^\nu \ , \qquad\qquad T^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ . \tag{190}$$

Anche questa è una operazione discreta con $\det(T^\mu{}_\nu) = -1$. Appartiene al gruppo di Lorentz $O(3,1)$, ma non è connessa all'identità. Insieme all'identità forma un sottogruppo isomorfo a $Z_2 = \{1, -1\}$. L'invarianza per inversione temporale si può studiare congetturando una opportuna trasformazione antilineare dello spinore

$$\psi(x) \quad \xrightarrow{T} \quad \psi'(x') = \mathcal{T}\psi^*(x) \tag{191}$$

generata da una matrice $\mathcal{T}$. Si usa il complesso coniugato nella congettura perchè suggerito dal limite non relativistico. Infatti il limite non relativistico produce un'eq. di Schroedinger (l'eq. di Pauli) che possiede un'invarianza per inversione temporale che collega la funzione d'onda alla sua complessa coniugata.

Richiedendo l'invarianza in forma dell'equazione di Dirac

$$\begin{array}{lcl} (\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi(x) = 0 & \overset{T}{\Longleftrightarrow} & (\gamma^\mu\partial'_\mu + m)\psi'(x') = 0 \\ x^\mu & & x'^\mu = T^\mu{}_\nu x^\nu \\ \partial_\mu & & \partial'_\mu = T_\mu{}^\nu \partial_\nu \\ \psi(x) & & \psi'(x') = \mathcal{T}\psi^*(x) \quad , \end{array}$$

esplicitando le trasformazioni descritte a destra e comparando con il complesso coniugate dell'eq. a sinistra, si ottiene

$$\mathcal{T}^{-1}\gamma^\mu\mathcal{T} = T^\mu{}_\nu\gamma^{\nu\,*} = \begin{pmatrix} -\gamma^{0\,*} \\ \gamma^{1\,*} \\ \gamma^{2\,*} \\ \gamma^{3\,*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^0 \\ -\gamma^1 \\ \gamma^2 \\ -\gamma^3 \end{pmatrix} \tag{192}$$

L'ultima uguaglianza è ottenuta usando la rappresentazione esplicita di Dirac delle matrici gamma. Occore quindi trovare una matrice $\mathcal{T}$ che commuti con γ^0 e γ^2 e anticommuti con γ^1 e γ^3. Questa matrice è proporzionale al prodotto $\gamma^1\gamma^3$. Aggiungendo una fase arbitraria η_T si ha

$$\mathcal{T} = \eta_T\,\gamma^1\gamma^3 \tag{193}$$

ma per semplicità si può porre $\eta_T = 1$. Si noti che sullo spinore $T^2 = -1$, per cui vale $T^4 = 1$.

Teoria delle buche

Per superare il problema delle soluzioni ad energia negativa, Dirac sviluppò la teoria delle buche, abbandonando l'interpretazione di equazione d'onda di singola particella, e predicendo l'esistenza delle antiparticelle. Egli suppose che lo stato di vuoto, lo stato con energia più bassa, consistesse in una configurazione in cui tutti i livelli energetici ad energia negativa fossero occupati da elettroni (situazione a cui si da il nome di "mare di Dirac"). Il principio di Pauli garantisce che non si possono aggiungere altri elettroni nei livelli energetici negativi. Questo stato di vuoto ha energia e carica nulle per definizione

$$E(vuoto) = 0\,, \qquad Q(vuoto) = 0\,. \tag{194}$$

Lo stato di un elettrone contiene in aggiunta un livello ad energia positiva occupato

$$E(elettrone) = E_p > 0\,, \qquad Q(elettrone) = e\,. \tag{195}$$

Questo elettrone di carica $e < 0$ non può transire negli stati ad energia negativa a causa del principio di esclusione di Pauli: tutti gli stati con energia negativa sono occupati, ed il sistema

è stabile. In aggiunta, una configurazione in cui un livello ad energia negativa manca del suo elettrone (una buca nel mare di Dirac) è equivalente ad una configurazione in cui è presente una particella con energia positiva e carica $-e$: infatti mettendo nella buca un elettrone con energia negativa $-E_p$ e carica e fornisce lo stato di vuoto con energia e carica nulle

$$\begin{aligned} E(buca) + (-E_p) = 0 \quad &\rightarrow \quad E(buca) = E_p > 0 \\ Q(buca) + e = 0 \quad &\rightarrow \quad Q(buca) = -e \ . \end{aligned} \tag{196}$$

Queste considerazioni portarono Dirac alla predizione dell'esistenza di una antiparticella associata all'elettrone, il positrone. Una fenomeno possibile a questo punto è la creazione di coppie elettrone-positrone: un fotone che interagisce con lo stato di vuoto può cedere la sua energia ad un elettrone del mare di Dirac e portarlo ad energie positive: si è così creato un elettrone ed una buca.

Questa interpretazione è stata di grande aiuto per l'intuizione fisica, sebbene non sia estendibile a sistemi bosonici (dove non vale il principio di Pauli). La corretta realizzazione di queste idee è comunque ottenibile in seconda quantizzazione (teoria quantistica dei campi) sia per fermioni che per bosoni.

Coniugazione di carica C

L'eq. di Dirac, accoppiata all'elettromagnetismo con la sostituzione minimale $p_\mu \rightarrow p_\mu - eA_\mu$, assume la forma

$$(\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) + m)\psi = 0 \tag{197}$$

e descrive particelle con carica e ed antiparticelle con stessa massa (e spin) ma con carica $-e$, come suggerito dalla teoria delle buche di Dirac. Dovrebbe essere possibile descrivere la stessa fisica in termini di un'equazione che descriva direttamente le antiparticelle, facendo emergere le particelle originarie come anti-antiparticelle. Evidentemente quest'equazione assume la forma

$$(\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu) + m)\psi_c = 0 \tag{198}$$

dove ψ_c indica il coniugato di carica di ψ. Ci si aspetta quindi che esista una trasformazione discreta, che non agisce sulle coordinate, ma che collega ψ a ψ_c. Questa trasformazione è chiamata *coniugazione di carica*. Essa scambia particelle con antiparticelle. Per identificarla procediamo come segue.

La (197) può essere scritta prendendone il complesso coniugato come

$$(\gamma^{\mu\,*}(\partial_\mu + ieA_\mu) + m)\psi^* = 0 \tag{199}$$

e se si trova una matrice $\mathcal{A}$, tale che

$$\mathcal{A}\gamma^{\mu\,*}\mathcal{A}^{-1} = \gamma^\mu \tag{200}$$

allora l'identificazione

$$\psi_c = \mathcal{A}\psi^* \tag{201}$$

realizza la trasformazione cercata. È comodo scrivere $\mathcal{A}$ nella forma

$$\mathcal{A} = \mathcal{C}\beta \tag{202}$$

dove $\mathcal{C}$ è detta matrice coniugazione di carica. Ricordando che $\gamma^{\mu\dagger} = -\beta\gamma^\mu\beta$ con β simmetrica, e prendendone il trasposto, si vede che $\gamma^{\mu *} = -\beta\gamma^{\mu T}\beta$, o equivalentemente $\beta\gamma^{\mu *}\beta = -\gamma^{\mu T}$, per cui la relazione (200) assume la forma

$$\mathcal{C}\gamma^{\mu\,T}\mathcal{C}^{-1} = -\gamma^\mu \tag{203}$$

Usando la rappresentazione esplicita di Dirac (73) si vede che γ^0 e γ^2 sono simmetriche ($\gamma^{0\,T} = \gamma^0$ e $\gamma^{2\,T} = \gamma^2$), mentre γ^1 e γ^3 sono antisimmetriche ($\gamma^{1\,T} = -\gamma^1$ e $\gamma^{3\,T} = -\gamma^3$). Si deduce che $\mathcal{C}$ deve commutare con γ^1 e γ^3 ed anticommutare con γ^0 e γ^2. Quindi, a meno di una fase, si può prendere

$$\mathcal{C} = \gamma^0\gamma^2 \ . \tag{204}$$

Si noti che $\mathcal{C}$ è antisimmetrica ($\mathcal{C}^T = -\mathcal{C}$) e coincide con la sua inversa ($\mathcal{C}^{-1} = \mathcal{C}$). Aggiungendo una fase arbitraria η_C si ha la seguente trasformazione di coniugazione di carica

$$\psi \quad \stackrel{C}{\longrightarrow} \quad \psi_c = \eta_C \mathcal{A}\psi^* = \eta_C \mathcal{C}\beta\psi^* = \eta_C \mathcal{C}\overline{\psi}^T \tag{205}$$

che come indicato può essere scritta in vari modi equivalenti. La fase arbitraria può essere posta per semplicita uguale ad 1.

Quella che abbiamo descritto non è una simmetria in presenza dell'interazione con il background A_μ, a meno che non si trasformi anche il background $A_\mu \to A^c_\mu = -A_\mu$ (simmetria di background). Questa diventa una vera simmetria quando anche il campo elettromagnetico è trattato dinamicamente (simmetria coniugazione di carica della QED).

Simmetria CPT

Sebbene le simmetrie discrete C, P e T della teoria libera possano essere rotte da alcune interazioni (in modo particolare dall' interazione debole), la combinazione CPT risulta essere sempre valida in teorie invarianti sotto il gruppo di Lorentz proprio ed ortocrono. Il teorema che prova questa affermazione è noto come teorema CPT, e non sarà trattato in queste note. Nel caso del fermione di Dirac la trasformazione CPT assume la forma

$$\begin{aligned} x^\mu \quad &\longrightarrow \quad x'^\mu = -x^\mu \\ \psi(x) \quad &\longrightarrow \quad \psi_{CPT}(x') = \eta_{CPT}\gamma^5\psi(x) \end{aligned} \tag{206}$$

con η_{CPT} eventuale fase arbitraria. Sotto questa trasformazione l'eq. di Dirac libera è evidentemente invariante.

Azione

Per scrivere l'azione è utile usare il coniugato di Dirac $\overline{\psi}$ del campo ψ, definito come $\overline{\psi} \equiv \psi^\dagger\beta = \psi^\dagger i\gamma^0$, che come abbiamo visto ha la proprietà di trasformarsi in modo da rendere il prodotto $\overline{\psi}\psi$ uno scalare. L'azione è uno scalare ed è data da

$$S[\psi, \overline{\psi}] = \int d^4x\, \mathcal{L} \ , \qquad \mathcal{L} = -\overline{\psi}(\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi \ . \tag{207}$$

Variando $\overline{\psi}$ e ψ ed usando il principio di minima azione si ottengono l'equazione di Dirac e la sua coniugata

$$(\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi(x) = 0 \ , \qquad \overline{\psi}(x)(\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu - m) = 0 \ . \tag{208}$$

Simmetrie addizionali

Le simmetrie sotto il gruppo di Lorentz sono state già descritte sopra, mentre quelle addizionali per traslazioni spazio-temporali sono facilmente verificabili: in questo caso il campo spinoriale $\psi(x)$ si trasforma come uno scalare ($\psi(x) \to \psi'(x') = \psi(x)$ sotto $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + a^\mu$ con a^μ costante). Da questa ultima si può ottenere il tensore energia-impulso come corrente di Noether. L'unione delle trasformazioni di Lorentz con le traslazioni spazio-temporali genera il gruppo di trasformazioni di Poincarè, che formano le simmetrie di spazio-tempo.

Consideriamo ora la simmetria interna generata dalle trasformazioni di fase del gruppo $U(1)$

$$\begin{array}{lcl} \psi(x) & \longrightarrow & \psi'(x) = e^{i\alpha}\psi(x) \\ \overline{\psi}(x) & \longrightarrow & \bar{\psi}'(x) = e^{-i\alpha}\overline{\psi}(x) \ . \end{array} \tag{209}$$

È facile vedere che l'azione (207) è invariante. Per trasformazioni infinitesime

$$\begin{array}{rcl} \delta\psi(x) & = & i\alpha\,\psi(x) \\ \delta\overline{\psi}(x) & = & -i\alpha\,\overline{\psi}(x) \end{array} \tag{210}$$

e considerando un parametro locale $\alpha(x)$ si calcola

$$\delta S[\psi,\overline{\psi}] = -\int d^4x\,(\partial_\mu\alpha)\,\underbrace{i\overline{\psi}\gamma^\mu\psi}_{J^\mu} \tag{211}$$

da cui si verifica di nuovo la simmetria $U(1)$ (per α costante) e si ottiene la relativa corrente di Noether

$$J^\mu = i\overline{\psi}\gamma^\mu\psi \tag{212}$$

conservata on-shell (cioè quando valgono le equazioni del moto: $\partial_\mu J^\mu = 0$). Come già notato, la densità di carica conservata è definita positiva

$$J^0 = i\overline{\psi}\gamma^0\psi = i\psi^\dagger i\gamma^0\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi \geq 0 \tag{213}$$

e fu originariamente interpretata da Dirac come una densità di probabilità. In seconda quantizzazione è interpretata come simmetria di numero fermionico (conta il numero di particelle meno il numero di antiparticelle), ed in tale contesto la (213) diventa un operatore che non risulta più essere definito positivo.

Azione per fermioni chirali

È interessante scrivere l'azione in termini delle componenti chirali irriducibili, i fermioni di Weyl ψ_L e ψ_R, considerati come variabili indipendenti insieme ai loro coniugati di Dirac

$$S[\psi_L,\overline{\psi_L},\psi_R,\overline{\psi_R}] = \int d^4x\,\mathcal{L}\ , \qquad \mathcal{L} = -\overline{\psi_L}\partial\!\!\!/\psi_L - \overline{\psi_R}\partial\!\!\!/\psi_R - m(\overline{\psi_L}\psi_R + \overline{\psi_R}\psi_L) \tag{214}$$

che mostra come una massa di Dirac m non possa essere presente per soli fermioni chirali (detti anche fermioni di Weyl, i.e. fermoni sinistrorsi per cui $\psi_R = 0$, o destrorsi per cui $\psi_L = 0$). Ricordiamo che il termine di massa di Dirac è invariante per trasformazioni di fase $U(1)$, scritte nell'eq. (209).

In modelli chirali dove la parità non è conservata, ci possono essere vari fermioni di Weyl destrorsi e sinistrorsi con cariche generalizzate diverse ed anche in numero diverso. I fermioni che entrano nel modello standard sono in effetti chirali, nel senso che le parti sinistrorse hanno accoppiamenti diversi dalle parti destrorse, e non possono avere masse di Dirac (questo per ragioni collegate all'invarianza di gauge: le leggi di trasformazione di ψ_L nel modello standard sono diverse dalle leggi di trasformazione di ψ_R. Come conseguenza le cariche di ψ_L e ψ_R associate alla simmetria sono diverse. In particolare il termine $\overline{\psi_L}\psi_R$ ed il suo hermitiano coniugato $\overline{\psi_R}\psi_L$ non sono invarianti e non posso essere presenti nell'azione se non si vuole rovinare la simmatria di gauge). Le masse di Dirac del modello standard emergono solo come

conseguenza del meccanismo di Higgs per la rottura spontanea della simmetria di gauge del gruppo $SU(2) \times U(1)$.

Esistono altri termini di massa possibili, che rompono la simmetria $U(1)$ collegata al numero fermionico, detti termini di massa di Majorana. Tali termini sono utilizzati in estensioni del modello standard per descrivere alcuni fenomeni ipotizzati per i neutrini (come il decadimento doppio beta senza emissione di neutrini). Sono della forma

$$\mathcal{L}_M = \frac{M}{2}\psi^T \mathcal{C}^{-1}\psi + h.c. \tag{215}$$

dove M è detta massa di Majorana, $\mathcal{C}$ è la matrice coniugazione di carica in (204), ed "*h.c.*" indica il termine hermitano coniugato del precedente. Questo termine è Lorentz invariante, quindi ammissibile in generale, ma rompe evidentemente la simmetria $U(1)$ descritta in (209). L'invarianza di Lorentz può essere verificata esplicitamente: sotto trasformazioni di Lorentz infinitesime si ha

$$\delta\psi = \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}\psi\,, \qquad \delta\psi^T = \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\psi^T\Sigma^{\mu\nu\,T} \tag{216}$$

e considerando che (usando la proprietà (203))

$$\Sigma^{\mu\nu\,T} = -\mathcal{C}^{-1}\Sigma^{\mu\nu}\mathcal{C}\,. \tag{217}$$

possiamo calcolare immediatamente che $\delta\mathcal{L}_M = 0$.

Ricordiamo infine, senza dilungarci troppo sulla sua dimostrazione, che una teoria di fermoni chirali può equivalentemente essere descritta in termini di fermioni di Majorana, fermioni che soddisfano una condizione di realtà della forma $\psi_c(x) = \psi(x)$. Un fermione di Majorana contiene essenzialmente un fermione di Weyl più il suo coniugato di Dirac.

Funzioni di Green e propagatore

Anche per l'equazione di Dirac si possono studiare le funzioni di Green, con relative condizioni al contorno. Esse soddisfano l'equazione

$$(\not{\partial}_x + m)S(x-y) = \delta^{(4)}(x-y) \tag{218}$$

formalmente risolta in trasformata di Fourier da

$$S(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, e^{ip\cdot(x-y)}\frac{-i\not{p}+m}{p^2+m^2}\,. \tag{219}$$

Le condizioni al contorno possono essere implementate con la prescrizione su come integrare attorno ai poli (i punti in cui si annulla p^2+m^2), e gli stessi casi discussi per l'equazione di Klein Gordon si applicano al presente contesto. In particolare, quantizzando il campo di Dirac libero si ottiene il propagatore, che è collegato alla funzione di Green $S(x-y)$ con la prescrizione causale di Feynman- Stueckelberg, ed assume la forma

$$\langle\psi(x)\overline{\psi}(y)\rangle \;=\; -iS(x-y) = -i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, e^{ip\cdot(x-y)}\frac{-i\not{p}+m}{p^2+m^2-i\epsilon} \tag{220}$$

La prescrizione $\epsilon \to 0^+$ rende consistente l'interpretazione di fluttuazioni quantistiche corrispondenti a particelle ed antiparticelle con energie positive che si propagano dal passato al futuro, proprio come nel caso delle particelle scalari (propagazione causale in quanto le particelle vengono prima prodotte e poi distrutte).

5 Spin ≥ 1 ed equazioni di Maxwell e Proca per spin 1

In modo relativamente facile si possono ottenere equazioni d'onda libere per particelle di spin $s \geq 1$ con massa non nulla, modellandole sull'eq. di KG per spin intero e sull'eq. di Dirac per spin semintero. Sono note come equazioni di Fierz-Pauli. Il problema difficile stà nell'introduzione delle interazioni, problema non banale che comunque non discuteremo in questa sede.

Nel caso massivo di spin intero $S = s$ (dove $s = 0, 1, 2, ...$ è un intero) il campo d'onda è un tensore completamente simmetrico con s indici $\phi_{\mu_1 ... \mu_s}$ che soddisfa all'equazione di KG con in aggiunta dei vincoli, che impongono trasversalità e condizione di traccia nulla

$$\begin{aligned} (\Box - m^2)\phi_{\mu_1 ... \mu_s} &= 0 \\ \partial^\mu \phi_{\mu\mu_2 ... \mu_s} &= 0 \\ \phi^\mu{}_{\mu\mu_3 ... \mu_s} &= 0 \, . \end{aligned} \tag{221}$$

Per capirne il significato è utile studiare le soluzioni di onda piana, identificate con un ansatz della forma

$$\phi_{\mu_1 ... \mu_s}(x) \sim \epsilon_{\mu_1 ... \mu_s}(p)\, e^{ip_\mu x^\mu} \, . \tag{222}$$

dove il tensore di polarizzazione $\epsilon_{\mu_1 ... \mu_s}(p)$ descrive covariantemente l'orientamento dello spin.

La prima equazione impone la corretta relazione tra energia ed impulso sulla soluzione di onda piana associata alla particella senza massa: $p^2 = 0$. La seconda equazione (condizione di trasversalità) elimina in modo covariante gradi di libertà non fisici: scegliendo il sistema di riferimento a riposo con la particella si vede che le componenti indipendenti della funzione d'onda devono avere solo indici spaziali, queste componenti descrivono i possibili orientamenti nello spazio dello spin della particella (polarizzazioni):

$$m\epsilon_{0\mu_2 ... \mu_s}(p) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \epsilon_{i_1 ... i_s}(p) \neq 0 \tag{223}$$

dove l'indice $\mu = (0, i)$ è diviso nelle componenti temporali e spaziali. La terza equazione (condizione di traccia nulla) riduce le componenti non nulle del tensore di polarizzazione ad avere solo le componenti corrispondenti alla rappresentazione irriducibile di spin s, che sappiamo essere un tensore di rango s (cioè con s indici) di $SO(3)$ completamente simmetrico e senza traccia, e che quindi ha $2s + 1$ componenti indipendenti che corrispondono alle $2s + 1$ possibili polarizzazioni dello spin.

Verifichiamo questo numero di polarizzazioni contando esplicitamente il numero di componenti indipendenti di un tensore completamente simmetrico con s indici che possono assumere solo tre valori (corrispondenti alle direzioni spaziali del sistema di riferimento a riposo con la particella) sottraendo poi le componenti associate alla traccia del tensore (che deve essere eliminata per ottenere il tensore a traccia nulla)

$$\frac{3 \cdot 4 \cdot \cdot (3 + s - 1)}{s!} - \frac{3 \cdot 4 \cdot \cdot (3 + s - 3)}{(s - 2)!} = \frac{1}{2}(s + 2)(s + 1) - \frac{1}{2}s(s - 1) = 2s + 1 \, . \tag{224}$$

Questo numero è corretto e giustifica l'affermazione che il campo d'onda corrisponde a quanti massivi di spin s.

Nel caso di spin semi-intero $S = s + \frac{1}{2}$ (con $s = 0, 1, 2, ...$ un intero) e con massa non nulla il campo d'onda è uno spinore con in aggiunta s indici vettoriali simmetrici $\psi_{\mu_1 ... \mu_s}$ (l'indice

spinoriale è come sempre sottinteso) che soddisfa all'equazione di Dirac con vincoli addizionali che impongono trasversalità e gamma-traccia nulla

$$\begin{aligned}(\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi_{\mu_1\ldots\mu_s} &= 0\\ \partial^\mu\psi_{\mu\mu_2\ldots\mu_s} &= 0\\ \gamma^\mu\psi_{\mu\mu_2\ldots\mu_s} &= 0\ .\end{aligned} \tag{225}$$

Nel caso limite di massa nulla, le equazioni acquistano una simmetria di gauge e necessitano di una discussione più approfondita (infatti non si può trovare un sistema di riferimento a riposo con la particella, poiché questa viaggia necessariamente alla velocità della luce in tutti i sistemi di riferimento). La simmetria di gauge è responsabile della riduzione del numero di gradi di libertà (cioé del numero di componenti della funzione d'onda che soddisfano alle equazioni del moto) da $2S+1$, necessarie per descrivere una particella massiva di spin S, alle sole due componenti di elicità presenti per particelle di massa nulla.

Considereremo in maggior dettaglio il caso di spin 1, che certamente ammette interazioni non banali con campi d'onda di spin 0, 1/2 ed 1, impiegate nella costruzione del Modello Standard delle particelle elementari. Accenneremo brevemente anche al caso di spin 2 senza massa (gravitone, il quanto delle onde gravitazionali).

Spin 1 massivo: Proca

Particelle di spin 1 e massa $m \neq 0$ sono descritte dalla (221) con $s = 1$. In tal caso si è soliti indicare la funzione d'onda $\phi_\mu(x)$ con $A_\mu(x)$. Le equazioni diventano

$$\begin{aligned}(\Box - m^2)A_\mu &= 0\\ \partial^\mu A_\mu &= 0\ .\end{aligned} \tag{226}$$

Queste equazioni sono conosciute come equazioni di Proca. Una proprietà molto utile corrisponde al fatto che queste equazioni sono derivabili anche da un principio d'azione, che prende la forma

$$S_{Pro}[A_\mu] = \int d^4x\Big(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}m^2A_\mu A^\mu\Big) \tag{227}$$

e dove si è usata la definizione

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\ . \tag{228}$$

Un'integrazione per parti permette di scrivere l'azione in una forma alternativa

$$S_{Pro}[A_\mu] = \int d^4x\Big(-\frac{1}{2}\partial_\nu A_\mu\partial^\nu A^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 - \frac{1}{2}m^2A_\mu A^\mu\Big) \tag{229}$$

simile all'azione di quattro campi di Klein-Gordon (primo e terzo termine), che poteva facilmente essere congetturata, ma con l'aggiunta cruciale del termine $(\partial_\mu A^\mu)^2$ con un coefficiente ben preciso. Variando A_μ si ottengono le equazioni del moto

$$\frac{\delta S_{Pro}[A]}{\delta A^\nu(x)} \equiv \partial^\mu F_{\mu\nu}(x) - m^2A_\nu(x) = 0 \tag{230}$$

pure chiamate equazioni di Proca, poiché equivalenti alle precedenti. Infatti si può notare che l'identità $\partial^\mu\partial^\nu F_{\mu\nu} = 0$ implica

$$\partial^\mu\partial^\nu F_{\mu\nu} = m^2\partial^\nu A_\nu = 0\ . \tag{231}$$

Quindi per $m \neq 0$ si ha il vincolo

$$\partial^\mu A_\mu = 0 \ . \tag{232}$$

Utilizzando questa relazione si possono riscrivere le equazioni di Proca in (230) come quattro equazioni di Klein-Gordon con in più un vincolo, come visto in eq. (226). Il vincolo ci dice che dei quattro campi A_μ solo tre di essi sono indipendenti, e descrivono in modo covariante le tre polarizzazioni associate ad una particella di spin 1.

L'invarianza dell'azione e delle equazioni del moto per trasformazioni di Lorentz è manifesta: basta trasformare il campo A_μ nella rappresentazione quadrivettoriale come indicato dalla posizione del suo indice

$$\begin{aligned} x^\mu \quad &\longrightarrow \quad x^{\mu\prime} = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \\ A_\mu(x) \quad &\longrightarrow \quad A_\mu{}'(x') = \Lambda_\mu{}^\nu A_\nu(x) \ . \end{aligned} \tag{233}$$

Soluzioni

Soluzioni di onda piana dell'equazione di Proca si ottengono inserendo in (226) l'ansatz

$$A_\mu = \varepsilon_\mu(p) e^{ip\cdot x} \tag{234}$$

e si trova che: *(i)* il momento p_μ deve soddisfare alla condizione di "mass shell" $p_\mu p^\mu = -m^2$ (prima equazione in (226)), *(ii)* una combinazione lineare della quattro possibili polarizzazioni deve essere nulla, $p^\mu \varepsilon_\mu(p) = 0$ (seconda equazione in (226)). Le tre polarizzazioni rimanenti descrivono i tre gradi di libertà di una particella di spin 1 in maniera manifestamente covariante. Nel sistema di riferimento a riposo, la polarizzazione si riduce ad un vettore nello spazio tridimensionale (spin 1). Soluzioni reali possono facilmente essere ottenute sommando con opportuni coefficienti di Fourier queste onde piane. I quanti associati hanno massa m e spin 1, e le antiparticelle (soluzioni ad energie negative) coincidono con le particelle (non c'è nessuna carica che le differenzi dalle particelle). Se invece si prende un campo di Proca complesso, particelle ed antiparticelle sono diverse (hanno cariche opposte sotto una simmmetria di fase $U(1)$, identificata come carica elettrica). Le particelle $W^\pm$ del Modello Standard sono trattate in questo modo (un campo di Proca complesso emerge dopo la rottura di simmetria di gauge generata dal meccanismo di Higgs).

Funzioni di Green e propagatore

Con integrazioni per parti si può riscrivere l'azione (227) nella forma

$$S_{Pro}[A_\mu] = -\frac{1}{2} \int d^4x \ A_\mu(x) K^{\mu\nu}(\partial) A_\nu(x) \tag{235}$$

per identificare l'operatore differenziale $K^{\mu\nu}(\partial) = (-\Box + m^2)\eta^{\mu\nu} + \partial^\mu \partial^\nu$. La relativa funzione di Green $G_{\mu\nu}(x-y)$ soddisfa per definizione

$$K^{\mu\nu}(\partial_x) G_{\nu\lambda}(x-y) = \delta^\mu_\lambda \delta^4(x-y) \ . \tag{236}$$

Tale funzione di Green è facilmente ottenibile in trasformata di Fourier

$$G_{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \, e^{ip\cdot(x-y)} \underbrace{\left(\frac{\eta_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m^2}}{p^2 + m^2} \right)}_{\tilde{G}_{\mu\nu}(p)} \tag{237}$$

Infatti per simmetria $\tilde{G}_{\mu\nu}(p)$ in (237) deve avere una struttura della forma

$$\tilde{G}_{\mu\nu}(p) = A(p)\eta_{\mu\nu} + B(p)p_\mu p_\nu \tag{238}$$

ed imponendo la (236) si ottiene facilmente

$$A(p) = \frac{1}{p^2 + m^2} \ , \qquad B(p) = \frac{1}{m^2}A(p) \ . \tag{239}$$

Quantizzando il campo di Proca con i metodi della seconda quantizzazione si ottiene il propagatore

$$\langle A_\mu(x)A_\nu(y)\rangle \ = \ -iG_{\mu\nu}(x-y) = -i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, e^{ip\cdot(x-y)} \underbrace{\left(\frac{\eta_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m^2}}{p^2 + m^2 - i\epsilon}\right)}_{\tilde{G}_{\mu\nu}(p)} \tag{240}$$

dove $\epsilon \to 0^+$, che descrive la propagazione di particelle (ed antiparticelle) di spin 1 (reali e virtuali), come nel caso di spin 0. Si noti come il propagatore sia singolare nel caso di $m \to 0$.

Spin 1 senza massa: Maxwell

Per $m \to 0$ l'azione di Proca si riduce all'azione di Maxwell che descrive particelle di massa nulla e spin 1 (solo elicità $h = \pm 1$)

$$S_{Max}[A_\mu] = \int d^4x \Big(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\Big) \tag{241}$$

le equazioni del moto ora sono

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0 \tag{242}$$

e corrispondono a metà delle equazioni di Maxwell nel vuoto. L'altra metà delle equazioni di Maxwell sono automaticamente risolte dalla relazione

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{243}$$

che infatti soddisfa identicamente le relazioni (identità di Bianchi)

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \tag{244}$$

corrispondenti alle equazioni di Maxwell mancanti. Sostituendo (243) in (244) si verifica che tutti i termini si cancellano due a due. Questa equazione può essere scritta in una forma equivalente usando il tensore completamente antisimmetrico $\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\partial_\nu F_{\lambda\rho} = 0 \ . \tag{245}$$

La novità di questa formulazione per un'equazione d'onda per particelle di spin 1 senza massa è la presenza di una *simmetria di gauge*

$$A_\mu(x) \quad \to \quad A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x) \tag{246}$$

che lascia l'azione (241) invariata. Infatti $F_{\mu\nu}$ è invariante e di conseguenza lo è l'azione S. Come vedremo, questo fatto implica che l'azione descriva non tre ma solo due gradi di libertà: gli

stati di spin massimo e minimo lungo la direzione del moto (elicità $h = \pm 1$). La trasformazione di gauge infinitesima ha la stessa forma

$$\delta A_\mu(x) = \partial_\mu \alpha(x) \tag{247}$$

ma ora $\alpha(x)$ è da considerarsi come una funzione arbitraria infinitesima. Possiamo pensare a questa simmetria locale come associata al gruppo $U(1)$, poiché si può scrivere la (246) come

$$A_\mu(x) \quad \rightarrow \quad A'_\mu(x) = A_\mu(x) - ie^{-i\alpha(x)}\partial_\mu e^{i\alpha(x)} \tag{248}$$

dove $e^{i\alpha(x)} \in U(1)$ per ogni punto dello spazio-tempo.

Soluzioni

Le equazioni del moto non hanno una soluzione univoca (anche fissando opportune condizioni iniziali) a causa della simmetria di gauge: una combinazione delle variabili dinamiche non ha una evoluzione univoca poiché la sua evoluzione temporale può essere modificata arbitrariamente con una trasformazione di gauge. Questa ridondanza però risulta molto utile, specie per introdurre interazioni consistenti con l'invarianza relatvistica. Il Modello Standard è infatti una teoria di gauge con gruppo di simmetria locale $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$.

Si può utilizzare l'invarianza di gauge per fissare delle condizioni ausiliarie (condizioni di gauge-fixing) che permettono di selezionare meglio le soluzioni fisiche eliminando (a volte solo parzialmente) la presenza di configurazioni fisiche equivalenti associate alla simmetria di gauge. Scegliamo di fissare parzialmente il gauge imponendo un vincolo covariante detto condizione di Lorenz

$$\partial^\mu A_\mu = 0 \tag{249}$$

Si verifica che questo vincolo può essere sempre imposto. Con questo vincolo le equazioni del moto libere si semplificano e diventano

$$\Box A_\mu = 0 \tag{250}$$

le cui soluzioni di onda piana sono

$$A_\mu(x) = \varepsilon_\mu(p) e^{ip\cdot x} \ , \quad p_\mu p^\mu = 0 \ , \quad p_\mu \varepsilon^\mu(p) = 0 \tag{251}$$

e contiene 3 polarizzazioni $\varepsilon^\mu(p)$ indipendenti. Di queste tre polarizzazioni, quella longitudinale ($\varepsilon_\mu(p) = p_\mu$) può essere rimossa usando trasformazioni di gauge residue, cioè quelle trasformazioni di gauge che lasciano invariata la condizione di Lorenz (249). Queste sono trasformazioni di gauge della forma $\delta A_\mu(x) = \partial_\mu \beta(x)$, ma con $\beta(x)$ tale che la condizione di Lorenz (249) non sia modificata. Queste soddisfano

$$\Box \beta = 0 \ . \tag{252}$$

Una β della forma di onda piana, $\beta(x) = e^{ip\cdot x}$ con $p_\mu p^\mu = 0$, soddisfa questa relazione e produce una soluzione non fisica (cioè equivalente ad $A_\mu = 0$) della forma

$$A_\mu = \partial_\mu \beta = i p_\mu e^{ip\cdot x} \tag{253}$$

dove la polarizzazione è proporzionale a p_μ. La polarizzazione longitudinale $\epsilon_\mu(p) = p_\mu$ è quindi rimovibile da trasformazioni di gauge residua

$$A'_\mu(x) = p_\mu e^{ip\cdot x} + \partial_\mu \alpha(x) \tag{254}$$

con $\alpha(x) = i\beta(x) = ie^{ip\cdot x}$, per cui $A'_\mu(x) = 0$. Rimangono solo due polarizzazioni fisiche indipendenti, che corrispondono alle due possibili elicità del fotone (elicità = proiezione dello spin lungo la direzione del moto).

Trascrizione delle equazioni di Maxwell in notazione vettoriale

Accoppiando il campo A_μ ad una sorgente di carica conservata J^μ ($\partial_\mu J^\mu = 0$) si ha l'azione

$$S_{Max}[A_\mu] = \int d^4x \Big(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + A_\mu J^\mu \Big) \tag{255}$$

da cui si ottengono le equazioni di Maxwell con sorgente

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = -J_\nu \tag{256}$$

La conservazione della corrente è necessaria per la consistenza delle equazioni di Maxwell. Infatti

$$\partial^\mu \partial^\nu F_{\mu\nu} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \partial^\nu J_\nu = 0 \ . \tag{257}$$

Esplicitiamo queste equazioni separando gli indici in parti spaziali e parti temporali. Ponendo

$$\begin{aligned} &A^\mu = (A^0, \vec{A}) = (\Phi, \vec{A}) \ , \qquad A_\mu = (-\Phi, \vec{A}) \\ &J^\mu = (\rho, \vec{J}) \ , \qquad \partial_\mu J^\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0 \\ &F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = \partial_t A_i + \partial_i \Phi = -E_i \\ &F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i = \epsilon_{ijk} B_k \end{aligned} \tag{258}$$

si può scrivere il tensore campo elettromegnetico (in unità di Heaviside-Lorentz) come

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{259}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} &\partial^\mu F_{\mu 0} = -J_0 \quad \longrightarrow \quad \partial^i F_{i0} = \rho \quad \longrightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho \\ &\partial^\mu F_{\mu i} = -J_i \quad \longrightarrow \quad \partial^j F_{ji} + \partial^0 F_{0i} = -J_i \quad \longrightarrow \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} - \partial_t \vec{E} = \vec{J} \end{aligned} \tag{260}$$

che riconosciamo come le equazioni di Maxwell con sorgenti. Le altre equazioni di Maxwell (quelle senza sorgenti)

$$\begin{aligned} &\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \\ &\vec{\nabla}\times\vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0 \end{aligned} \tag{261}$$

sono similmente contenute in (244). Un modo alternativo per vederlo è quello di considerare il tensore duale $\tilde{F}^{\mu\nu}$ definito da

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\lambda\rho} \tag{262}$$

con il tensore completamente antisimmetrico normalizzato a $\epsilon^{0123} = 1$ ($\epsilon_{0123} = -1$), per cui le altre equazioni in (244) sono riscrivibili come

$$\partial^\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0 \tag{263}$$

Il tensore $\tilde{F}_{\mu\nu}$ è analogo al tensore $F_{\mu\nu}$ ma con la sostituzione $\vec{E} \to \vec{B}$ e $\vec{B} \to -\vec{E}$, e dalla (263) seguono le (261).

Addendum: Abbiamo discusso le soluzioni di onda piana delle equazioni di Maxwell libere, interpretate come onde associate a quanti di spin 1 senza massa. Si potrebbero discutere anche le soluzioni che emergono in presenza di sorgenti esterne prefissate J_μ, tenendo conto della complicazione dovuta alla simmetria di gauge. In assenza di simmetrie di gauge la soluzione formale può essere ottenuta usando la corrispondente funzione di Green (ritardata, anticipata o con le condizione causali di Feynman, scelta che dipende delle condizioni al contorno imposte al problema): infatti la funzione di Green rappresenta la soluzione elementare corrispondente ad una sorgente puntiforme localizzata nel tempo e nello spazio (delta di Dirac):

$$\begin{aligned} D(\partial_x)\phi(x) &= J(x) && \text{(eq. del moto; } D(\partial_x) \text{ operatore differenziale)} \\ D(\partial_x)G(x-y) &= \delta^4(x-y) && \text{(funz. di Green)} \\ \phi(x) &= \phi_0(x) + \int d^4y\, G(x-y)J(y) && \text{(soluzione generale)} \end{aligned}$$

con $\phi_0(x)$ soluzione dell'equazione omogenea associata. La complicazione dovuta alle simmetrie di gauge è associata la fatto che la funzione di Green non è univoca, infatti le equazioni del moto anche in presenza di condizioni al contorno non sono univocamente risolte (si possono fare trasformazioni di gauge dipendenti dal tempo che non modificano gli osservabili fisici). Abbiamo già visto che la simmetria di gauge implica un vincolo sulle correnti esterne J^μ (devono necessariamente essere conservate $\partial_\mu J^\mu = 0$). In genere occorre fissare un gauge, cioè imporre delle condizioni aggiuntive sulle variabili dinamiche, in modo tale che la soluzione sia unica una volta fissate le condizioni al contorno. Qui sopra abbiamo brevemente discusso il gauge di Lorenz $\partial^\mu A_\mu = 0$ che ha la proprietà di essere manifestamente Lorentz invariante, però non fissa completamente il gauge. Una condizione piú restrittiva è il gauge di Coulomb $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ che fissa completamente il gauge ma non è invariate di Lorentz (in altri sistemi inerziali i potenziali di gauge soddifano relazioni di gauge fixing diverse, anche se il campo elettromagnetico $F_{\mu\nu}$ rimane sempre un tensore di rango due). Ricordiamo brevemente alcune conseguenze del gauge di Coulomb ($\partial_i A^i = 0$):

$$\Box A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) = -J^\mu \;\rightarrow\; \begin{cases} \Box A^0 - \partial^0(\partial_0 A^0) = -J^0 \\ \Box A^i - \partial^i(\partial_0 A^0) = -J^i \end{cases} \;\rightarrow\; \begin{cases} \nabla^2 A^0 = -\rho \\ \Box A^i = -J^i + \partial^i\partial_0 A^0 \end{cases} \tag{264}$$

da cui

$$\begin{cases} A^0(t,\vec{x}) = \int \frac{d^3y}{4\pi}\frac{\rho(t,y)}{|\vec{x}-\vec{y}|} \\ \Box A^i(t,\vec{x}) = -J^i(t,\vec{x}) + \partial^i_{(x)}\int \frac{d^3y}{4\pi}\frac{\partial_t\rho(t,y)}{|\vec{x}-\vec{y}|} \end{cases} \tag{265}$$

dove abbiamo usato la relazione $\nabla^2_{(x)}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} = -4\pi\delta^3(\vec{x}-\vec{y})$ per integrare la prima eq. in (264). Similmente, si può integrare la seconda equazione usando la funzione di Green dell'operatore di d'Alambert ($\Box$) con le relative condizioni al contorno.

Potenziale dovuto allo scambio di una particella di spin 1

Generalizziamo il potenziale di Yukawa al caso in cui la particella scambiata che genera il potenziale abbia spin 1 e sia massiva.

Ricordiamo che nel caso di Klein-Gordon, l'azione efficace indotta da una sorgente esterna $J(x)$ assume la forma

$$W[J] = \frac{1}{2}\int d^4x\, d^4y\, J(x)G(x-y)J(y) \tag{266}$$

dove $G(x-y)$ è la relativa funzione di Green. Considerando una sorgente che descrive due cariche puntiformi statiche

$$J(x) = g_1\delta^3(\vec{x}-\vec{r}) + g_2\delta^3(\vec{x}) \tag{267}$$

si ottiene il potenziale di Yukawa per l'interazione efficace tra le due cariche

$$W[g_1, g_2] = \int d^4x\, d^4y\, g_1 \delta^3(\vec{x} - \vec{r}) G(x-y) g_2 \delta^3(\vec{y}) = \int dt\, g_1 g_2 \frac{e^{-mr}}{4\pi r} \tag{268}$$

e quindi il potenziale d'interazione

$$V_{\rm Yuk} = -\frac{g_1 g_2}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r} \tag{269}$$

attrattivo per cariche dello stesso segno.

Similmente, usando il campo di Proca che descrive particelle con spin 1 e massa non nulla, si può dimostrare che l'azione efficace in presenza di sorgenti esterne J_μ è data da

$$W[J^\mu] = \frac{1}{2} \int d^4x\, d^4y\, J^\mu(x) G_{\mu\nu}(x-y) J^\nu(y) \tag{270}$$

che generalizza il caso scalare. Usando una sorgente statica della forma $J^\mu = (J^0, 0, 0, 0)$ dove

$$J^0(x) = e_1 \delta^3(\vec{x} - \vec{r}) + e_2 \delta^3(\vec{x}) \tag{271}$$

si ottiene l'azione efficace che descrive l'interazione tra la carica e_1 e la carica e_2 mediata dal campo massivo di spin 1

$$W[e_1, e_2] = \int d^4x\, d^4y\, e_1 \delta^3(\vec{x} - \vec{r}) G_{00}(x-y) e_2 \delta^3(\vec{y}) = -\int dt\, e_1 e_2 \frac{e^{-mr}}{4\pi r} \tag{272}$$

dove abbiamo usato la funzione di Green in (237). Si noti la differenza di segno rispetto al caso scalare che è dovuta ad $\eta_{00} = -1$. Il risultato finale corrisponde al seguente potenziale d'interazione tra le due cariche ($L = T - V$)

$$V(r) = \frac{e_1 e_2}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r} \ . \tag{273}$$

Questo è un potenziale repulsivo tra cariche dello stesso segno. Il limite $m \to 0$ corrisponde al potenziale di Coulomb.

Spin 2 con massa: Pauli-Fierz

La trattazione generale di spin s è immediatamente specializzata al caso di $s = 2$. Le variabili dinamiche sono raggruppate in un tensore simmetrico di rango due, $\phi_{\mu\nu}$, che soddisfa le eq.

$$\begin{aligned} (\Box - m^2)\phi_{\mu\nu} &= 0 \\ \partial^\mu \phi_{\mu\nu} &= 0 \\ \phi^\mu{}_\mu &= 0 \ . \end{aligned} \tag{274}$$

Spin 2 senza massa: equazioni di Einstein linearizzate

Le equazioni precedenti non sono sufficienti per descrivere il caso di massa nulla, in quanto ci si aspettano solo 2 polarizzazioni fisiche corrispondenti alle elicità massime e minime, $h = \pm 2$. In una descrizione manifestamente covariante per trasformazioni di Lorentz sono necessarie simmetrie di gauge, che eliminano alcune componenti del campo corrispondenti alle polarizzazioni non fisiche, proprio come nel caso visto per spin 1. Indichiamo il campo d'onda di spin due con il tensore simmetrico $h_{\mu\nu}(x)$, che nella teoria della gravitazione di Einstein corrisponde alla deformazione della metrica di Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ in una metrica curva $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x)$.

Per descrivere le corrette equazioni con simmetria di gauge, introduciamo le seguenti notazioni

$$\begin{aligned} h' &\equiv h^{\mu}{}_{\mu} \\ h_\nu &\equiv \partial^\mu h_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{275}$$

per cui le equazioni gauge invarianti sono scrivibili come

$$\Box h_{\mu\nu} - \partial_\mu h_\nu - \partial_\nu h_\mu + \partial_\mu \partial_\nu h' = 0 \; . \tag{276}$$

Queste equazioni sono invarianti per una simmetria locale (simmetria di gauge) della forma

$$\delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu \tag{277}$$

con $\xi_\mu(x)$ quattro funzioni arbitrarie (formanti un campo vettoriale arbitrario).

La simmetria di gauge è verificabile tramite calcolo diretto: variando le eq. (275) sotto le trasformazioni (277) si calcola

$$\Box(\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu) - \partial_\mu(\Box \xi_\nu + \partial_\nu \partial \cdot \xi) - \partial_\nu(\Box \xi_\mu + \partial_\mu \partial \cdot \xi) + \partial_\mu \partial_\nu 2 \partial \cdot \xi = 0 \; . \tag{278}$$

Studiamo ora le soluzioni fisiche per verificare che esistono solo 2 soluzioni di onda piana inequivalenti, corrispondenti a sole due possibili polarizzazioni indipendenti. Possiamo usare la simmetria di gauge per imporre delle condizioni (scelta di gauge) note come gauge di de Donder

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial_\nu h' \tag{279}$$

per cui le equazioni (275) si semplificano in

$$\Box h_{\mu\nu} = 0 \; . \tag{280}$$

In analogia con il caso del campo elettromagnetico (spin1) abbiamo trasformazioni di gauge residue che corrispondono a parametri locali $\xi_\mu(x)$ che soddisfano

$$\Box \xi_\mu = 0 \tag{281}$$

per cui le soluzioni fisiche, non eliminabili tramite trasformazioni di gauge, sono 2. Infatti possiamo calcolare 10 (numeri di componenti indipendenti di $h_{\mu\nu}$) $-$ 4 (numero di vincoli del gauge di De Donder) $-$ 4 (numero di soluzioni eliminabili con trasformazioni di gauge residue) =2. Con un' analisi un po' più approfondita si può mostrare che queste due polarizzazioni indipendenti corrispondono alle due elicità fisiche $h = \pm 2$ delle onde gravitazionali.

Infine, come informazione culturale, possiamo citare che queste equazioni emergono dalla linearizzazione delle equazioni di Einstein nel vuoto

$$R_{\mu\nu}(g) = 0 \tag{282}$$

dove $R_{\mu\nu}(g)$ è il tensore di curvatura di Ricci costruito dalla metrica $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x)$, e nella linearizzazione si tengono solo i termini lineari in $h_{\mu\nu}(x)$. La simmetria di gauge è similmente collegabile alla simmetria per cambio generale di coordinate, opportunamente linearizzata.

6 Appendice

Principio di minima azione

Introduciamo brevemente questo principio, ripercorrendo la sua applicazione in meccanica, per poi estenderlo a teorie di campo.

Consideriamo una particella non-relativistica di massa m che si muove in una sola dimensione con coordinata q, soggetta ad una forza conservativa $F = -\frac{\partial}{\partial q}V(q)$. L'equazione del moto di Newton è

$$m\ddot{q} = F \ .$$

Questa equazione può essere derivata da un principio d'azione. L'azione è un funzionale della traiettoria della particella $q(t)$ (cioè delle variabili dinamiche del sistema) ed associa un numero reale ad ogni funzione $q(t)$. In genere i sistemi fisici sono descritti da un'azione del tipo

$$S[q] = \int_{t_i}^{t_f} dt\, L(q,\dot{q}) \ , \qquad L(q,\dot{q}) = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q) \tag{283}$$

dove $L(q,\dot{q})$ è la lagrangiana. Il principio d'azione stabilisce che: *la traiettoria classica che congiunge due punti dello spazio delle configurazioni è quella che minimizza l'azione* S. Per dimostrare questa affermazione studiamo le condizioni di minimo. Variando la traiettoria $q(t)$ (con condizioni al bordo $q(t_i) = q_i$ e $q(t_f) = q_f$) nella nuova funzione $q(t) + \delta q(t)$, dove $\delta q(t)$ è una variazione infinitesima arbitraria (con $\delta q(t_i) = \delta q(t_f) = 0$), ed imponendo che l'azione sia minimizzata dalla traiettoria $q(t)$ si ottiene

$$\begin{aligned} 0 &= \delta S[q] = S[q+\delta q] - S[q] \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt \left[m\dot{q}\delta\dot{q} - \frac{\partial V(q)}{\partial q}\delta q \right] = m\dot{q}\delta q\Big|_{t_i}^{t_f} - \int_{t_i}^{t_f} dt \left[m\ddot{q} + \frac{\partial V(q)}{\partial q} \right]\delta q \\ &= -\int_{t_i}^{t_f} dt \left[m\ddot{q} + \frac{\partial V(q)}{\partial q} \right]\delta q \ . \end{aligned}$$

Poichè le variazioni $\delta q(t)$ sono funzioni arbitrarie, il minimo è raggiunto proprio quando la funzione $q(t)$ soddisfa le equazioni del moto classiche

$$m\ddot{q} + \frac{\partial V(q)}{\partial q} = 0 \ . \tag{284}$$

In generale, si ottengono le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\begin{aligned} 0 &= \delta S[q] = \delta \int_{t_i}^{t_f} dt\, L(q,\dot{q}) = \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} + \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial q}\delta q \right] \\ &= \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}}\delta q\Big|_{t_i}^{t_f} - \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial q} \right]\delta q \\ &= -\int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial q} \right]\delta q \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial q} = 0 \ . \tag{285}$$

Osservazioni:
1. Dimensioni dell'azione: $[S] = [\hbar] = [\text{energia} \times \text{tempo}] = ML^2T$.
2. Le equazioni lagrangiane del moto sono tipicamente del secondo ordine nel tempo, quindi ci si aspetta che in tali casi si possano imporre due "condizioni iniziali" (o condizioni al bordo), convenientemente scelte fissando la posizione al tempo iniziale e al tempo finale.
3. L'equazione del moto è esprimibile come la derivata funzionale dell'azione

$$\frac{\delta S[q]}{\delta q(t)} = 0 \tag{286}$$

dove la derivata funzionale è definita dalla variazione

$$\delta S[q] = \int dt \frac{\delta S[q]}{\delta q(t)} \delta q(t) \ .$$

4. Le equazioni del moto non cambiano se si aggiunge alla lagrangiana L una derivata totale, $L \to L' = L + \frac{d}{dt}\Lambda$.
5. Il formalismo lagrangiano si estende facilmente a sistemi con più gradi di libertà e, con un po' più di attenzione, a teorie di campo.

Per questo ultimo punto consideriamo un set di campi dinamici $\phi_i(x) = \phi_i(t, \vec{x})$, dove con x indichiamo un punto dello spazio tempo. Per dinamica si intende evoluzione nel tempo t. A t fissato i campi dinamici $\phi_i(t, \vec{x})$ sono indicizzati da i (che descrive un set discreto di campi) e da $\vec{x} \in R^3$ che ci dice che in ogni punto dello spazio c'è una variabile dinamica: ci sono infiniti gradi di libertà. Discretizzando lo spazio, e considerando inoltre un volume finito, si può approssimare una teoria di campo come una meccanica con un numero finito di gradi di libertà. Tipicamente, quando questi ultimi sono quelli realmente fisici (e.g. struttura atomica della materia) ma in numero molto grande, l'approssimazione del continuo è molto utile.

La lagrangiana L è spesso esprimibile come integrale di una densità di lagrangiana $\mathcal{L}$

$$L(t) = \int d^3x \, \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) \tag{287}$$

per cui l'azione assume la seguente forma

$$S[\phi] = \int dt \, L(t) = \int d^4x \, \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) \tag{288}$$

Imponendo la condizione di estremalità $\delta S = 0$, si ottengono le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = 0 \ . \tag{289}$$

Simmetrie e teorema di Noether

L'analisi delle simmetrie di un sistema fisico è molto utile per risalire alle equazioni del moto che lo descrivono. Si può definire il concetto di simmetria nel modo seguente:
Una simmetria è una trasformazione delle variabili dinamiche $\phi(x)$, indotta eventualmente da una trasformazione delle coordinate x^μ,

$$\begin{aligned} x'^\mu \quad &\longrightarrow \quad x'^\mu = f^\mu(x) \\ \phi(x) \quad &\longrightarrow \quad \phi'(x') = F(\phi(x), \partial_\mu \phi(x), x,) \end{aligned} \tag{290}$$

che lascia invarianti in forma le equazioni del moto.
Si parla di simmetrie interne (cioè non di spazio-tempo) se le coordinate x^μ non sono trasformate. Poichè le equazioni del moto sono invarianti in forma, esse ammettono lo stesso tipo di soluzioni e non si può stabilire se siamo nel "vecchio sistema di riferimento" o nel "nuovo sistema di riferimento". Questi sistemi di riferimento sono da trattare sullo stesso piano, senza che uno di essi possa essere identificato come privilegiato. Un test per verificare se una trasformazione è una simmetria fa uso dell'azione. Se l'azione è invariante sotto la trasformazione (290) a meno di termini di bordo, che possono emergere come integrali di derivate totali (che non modificano le equazioni del moto lagrangiane),

$$S[\phi'] = S[\phi] \; + \; \text{termini di bordo} \tag{291}$$

allora la trasformazione è una simmetria; infatti le equazioni dedotte dal principio di minima azione sono le stesse in forma, essendo ottenibili da azioni identiche.

Un sistema fisico può presentare diversi tipi di simmetria: simmetrie discrete, simmetrie continue (cioè associate ad un gruppo di Lie), simmetrie locali (dette anche simmetrie di gauge). Un concetto ancor più generale è quello di "simmetria di background": sono descritte da trasformazioni generalizzate in cui si trasformano anche i parametri della teoria (spesso chiamate costanti d' accoppiamento), come quelli contenuti negli eventuali potenziali esterni (non sono simmetrie vere e proprie nel senso tecnico definito sopra, ma collegano soluzioni di una teoria con certi parametri alle soluzioni della teoria con parametri trasformati).

Per simmetrie di Lie, cioè simmetrie che dipendono in modo continuo da alcuni parametri, si può dimostrare il teorema di Noether, che afferma che:
Per ogni parametro continuo del gruppo di simmetria esiste una carica conservata. In teorie di campo, questa conservazione è espressa tramite una equazione di continuità.
Dimostriamo questo teorema per una teoria di campo arbitraria, che include come sottocaso anche sistemi con un numero finito di gradi di libertà.

Una trasformazione di simmetria che dipende da un parametro α può essere descritta in modo generale da

$$\begin{aligned} x^\mu \quad &\longrightarrow \quad x'^\mu = f^\mu(x,\alpha) \\ \phi(x) \quad &\longrightarrow \quad \phi'(x') = F(\phi(x), \partial_\mu\phi(x), x, \alpha) \end{aligned} \tag{292}$$

dove per definizione si ottiene la trasformazione identità per $\alpha = 0$. Le trasformazioni infinitesime (con parametro $\alpha \ll 1$) si possono scrivere nel seguente modo

$$\delta_\alpha\phi(x) \equiv \phi'(x) - \phi(x) = \alpha G(\phi(x), \partial_\mu\phi(x), x) \tag{293}$$

con un'opportuna funzione G ottenibile dalla F in (292). Per ipotesi di simmetria si ha che $\delta_\alpha S[\phi] = 0$ a meno di termini di bordo. Ora per provare che esiste una grandezza conservata associata a questa simmetria, estendiamo la trasformazione di simmetria ad una trasformazione più generale con parametro $\alpha(x)$, non più costante ma funzione arbitraria dipendente dal tempo e dallo spazio,

$$\delta_{\alpha(x)}\phi(x) = \alpha(x) G(\phi(x), \partial_\mu\phi(x), x) \; . \tag{294}$$

Questa trasformazione non sarà una simmetria in generale, ma possiamo certamente affermare che l'azione si trasforma nel seguente modo

$$\delta_{\alpha(x)} S[\phi] = \int d^n x \; \partial_\mu\alpha(x) J^\mu \tag{295}$$

a meno di termini di bordo (integrali di derivate totali). Infatti, se prendiamo il caso di α costante sappiamo che l'azione deve essere invariante perchè per ipotesi abbiamo una simmetria. Quindi, per una funzione α arbitraria, la variazione non può dipendere direttamente da α, ma solo dalle sue derivate. Ora la corrente J^μ che compare in (295) è la corrente che soddisfa l'equazione di continuità associata alla conservazione di una carica. Per vederlo usiamo le equazioni del moto, che rendono nulla la variazione dell'azione sotto qualunque trasformazione ("principio di minima azione") e in particolare sotto le trasformazioni con parametro locale descritte in (294)

$$0 = \delta_{\alpha(x)} S[\phi]\Big|_{\phi_0} = \int d^n x \; \partial_\mu \alpha(x) J^\mu \Big|_{\phi_0} = -\int d^n x \; \alpha(x) \partial_\mu J^\mu \Big|_{\phi_0} \quad \Longrightarrow \quad \partial_\mu J^\mu(\phi_0) = 0$$

dove abbiamo integrato per parti ed usato l'arbitrarietà della funzione $\alpha(x)$ per dedurre l'equazione di continuità. Si noti che dobbiamo valutare la variazione dell'azione nel punto di minimo, indicato con ϕ_0, che risolve le equazioni del moto. Conseguentemente la corrente conservata J_μ deve essere valutata sulla soluzione delle equazioni del moto (qui indicato con $J^\mu(\phi_0)$). Questo tipo di simmetrie di Lie sono dette simmetrie rigide o simmetrie globali. Ad ogni parametro del gruppo di Lie è quindi associata una carica conservata Q

$$Q = \int d^3 x \, J^0 \, . \tag{296}$$

Questa carica è conservata perchè possiamo calcolare

$$\frac{d}{dt} Q = \int d^3 x \, \partial_0 J^0 = -\int d^3 x \, \partial_i J^i = 0 \tag{297}$$

dove si è assunto che le componenti spaziali della corrente vadano a zero in modo sufficientemente veloce da annullare il termine di bordo (questo significa che consideriamo soluzioni localizzate in una regione dello spazio, e nulla viene introdotto o esce dall'infinito spaziale).

Le simmetrie di Lie in cui il parametro è una funzione arbitraria del tempo (e dello spazio) sono dette simmetrie locali o simmetrie di gauge. Il metodo precedente non permette di ottenere nessuna equazione di continuità non banale, perchè ora la variazione dell'azione è sempre zero, per qualunque parametro locale e senza usare le equazioni del moto. La presenza di simmetrie locali ci dice che le variabili dinamiche che stiamo usando sono ridondanti: con una trasformazione di gauge possiamo modificare arbitrariamente l'evoluzione temporale di una opportuna combinazione delle variabili dinamiche, combinazione la cui evoluzione non è evidentemente fissata dalle equazioni del moto.

Fermioni di Majorana e termini di massa

Un fermione di Majorana è per definizione descritto da un campo fermionico che soddisfa a opportune condizioni di realtà, della forma $\psi_c(x) = \psi(x)$ (in generale si può includere anche una fase), che possiamo interpretare dicendo che le antiparticelle coincidono con le particelle. Esso descrive un fermione elettricamente scarico. Infatti la trasformazione (209) non è più una simmetria perché non rispetta il vincolo $\psi_c(x) = \psi(x)$, e non esiste più la corrispondente carica conservata. Un fermione di Majorana possiede la metà dei gradi di libertà di un fermione di Dirac.

Possiamo pensare ad un fermione di Majorana come ad un campo di Weyl sinistrorso ψ_L con in aggiunta il suo complesso coniugato $(\psi_L)^*$ che descrive un campo destrorso.

Per intuirne meglio la descrizione ed il significato fisico, descriviamo una analogia con particelle scalari, descritte dall'eq. di KG. Come discuteremo presto, l'analogo di un fermione di Majorana è un campo scalare reale ($\varphi^* = \varphi$), che soddisfa ad un'eq. di KG con massa μ derivabile dalla lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi - \frac{1}{2}\mu^2\varphi\varphi \; . \tag{298}$$

Due campi liberi di KG reali, φ_1 e φ_2 con masse μ_1 e μ_2, sono descritti dalla lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial^\mu\varphi_1\partial_\mu\varphi_1 - \frac{1}{2}\mu_1^2\varphi_1^2 - \frac{1}{2}\partial^\mu\varphi_2\partial_\mu\varphi_2 - \frac{1}{2}\mu_2^2\varphi_2^2 \; . \tag{299}$$

Nel caso di masse indentiche, $\mu_1 = \mu_2 \equiv m$, il modello acquista una simmetria $SO(2)$ che ruota tra loro i campi φ_1 e φ_2, e la lagrangiana si può ora scrivere come

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial^\mu\varphi_1\partial_\mu\varphi_1 - \frac{1}{2}\partial^\mu\varphi_2\partial_\mu\varphi_2 - \frac{1}{2}m^2(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \; . \tag{300}$$

Il termine $(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)$ è ovviamente $SO(2)$ invariante, così come lo è il termine cinetico. Questo modello è scrivibile in termini di un campo di KG complesso definito da

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2) \; , \qquad \phi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 - i\varphi_2) \tag{301}$$

di cui φ_1 e φ_2 costituiscono la parte reale e la parte immaginaria, rispettivamente. In questa base la lagrangiana (300) assume la forma

$$\mathcal{L} = -\partial^\mu\phi^*\partial_\mu\phi - m^2\phi^*\phi \; . \tag{302}$$

La simmetria $SO(2) \equiv U(1)$ è descritta in questa base da trasformazioni di fase ($\phi' = e^{i\alpha}\phi$ e $\phi'^* = e^{-i\alpha}\phi^*$) e la carica corrispondente è detta "numero bosonico" (interpretabile come carica elettrica se si accoppia il modello al campo em).

Ora veniamo al punto: un campo complesso ϕ^* è analogo ad un fermione di Dirac, e la sua massa m è analoga alla massa di Dirac. Un campo reale φ è analogo ad un fermione di Majorana, e la sua massa μ è analoga alla massa di Majorana. Due campi di Majorana con masse identiche formano un fermione di Dirac, dove le masse identiche corrispondono alla massa di Dirac che rispetta l'invarianza $U(1)$. Ora si capisce subito che, rompendo l'invarianza $U(1)$, è possibile introdurre un ulteriore termine di massa per ϕ e ϕ^*, questo infatti è visibile direttamente nella base φ_1 e φ_2, vedi (299), e può essere scritto nella base di ϕ e ϕ^* come

$$\mathcal{L} = -\partial^\mu\phi^*\partial_\mu\phi - m^2\phi^*\phi - \frac{M^2}{2}(\phi\phi + \phi^*\phi^*) \; . \tag{303}$$

Il termine con M^2 è l'analogo di un termine di massa di Majorana per un fermione di Dirac: è un termine di massa che rompe l'invarianza U(1), ma mantiene reale la lagrangiana. La relazione esplicita tra i termini di massa è data da

$$\mu_1^2 = m^2 + M^2$$
$$\mu_2^2 = m^2 - M^2 \; .$$

Si noti che M^2 non deve necessariamente essere positivo, mentre lo sono μ_1^2 e μ_2^2 (per avere una energia potenziale limitata inferiormente).

In questa analogia, possiamo reinterpretare l'eq. (301) dicendo che ϕ è l'analogo di un fermione di Weyl e ϕ^* del suo complesso coniugato, ricordando però che per i bosoni non c'è nessun concetto invariante di chiralità.