29.11.2016

Richiami di meccanica classica

(Appunti per il corso di Fisica Teorica 1 - a.a. 2017/18)

Fiorenzo Bastianelli

1 Principio di minima azione

1.1 Formalismo lagrangiano

Consideriamo una particella non-relativistica di massa m che si muove in una sola dimensione con coordinata q, soggetta ad una forza conservativa $F = -\frac{\partial}{\partial q}V(q)$. L'equazione del moto di Newton è

$$m\ddot{q} = F \ .$$

Questa equazione può essere derivata da un principio d'azione. L'azione è un funzionale della traiettoria della particella $q(t)$ (cioè delle variabili dinamiche del sistema) ed associa un numero reale ad ogni funzione $q(t)$. In genere i sistemi fisici sono descritti da un'azione del tipo

$$S[q] = \int_{t_i}^{t_f} dt\, L(q,\dot{q}) \ , \qquad L(q,\dot{q}) = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q) \tag{1}$$

dove $L(q,\dot{q})$ è la lagrangiana. Il principio d'azione stabilisce che: *la traiettoria classica che congiunge due punti dello spazio delle configurazioni è quella che minimizza l'azione S*. Per dimostrare questa affermazione studiamo le condizioni di minimo. Variando la traiettoria $q(t)$ (con condizioni al bordo $q(t_i) = q_i$ e $q(t_f) = q_f$) in $q(t) + \delta q(t)$, dove $\delta q(t)$ è una variazione infinitesima arbitraria (con $\delta q(t_i) = \delta q(t_f) = 0$) ed imponendo che l'azione sia minimizzata dalla traiettoria $q(t)$ si ottiene

$$\begin{aligned} 0 \ &= \ \delta S[q] = S[q+\delta q] - S[q] \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt \left[m\dot{q}\delta\dot{q} - \frac{\partial V(q)}{\partial q}\delta q \right] = m\dot{q}\delta q\Big|_{t_i}^{t_f} - \int_{t_i}^{t_f} dt \left[m\ddot{q} + \frac{\partial V(q)}{\partial q} \right]\delta q \\ &= \ -\int_{t_i}^{t_f} dt \left[m\ddot{q} + \frac{\partial V(q)}{\partial q} \right]\delta q \ . \end{aligned}$$

Poichè le variazioni $\delta q(t)$ sono funzioni arbitrarie, il minimo è raggiunto proprio quando la funzione $q(t)$ soddisfa le equazioni del moto classiche

$$m\ddot{q} + \frac{\partial V(q)}{\partial q} = 0 \ . \tag{2}$$

In generale, si ottengono le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\begin{aligned} 0 \ &= \ \delta S[q] = \delta \int_{t_i}^{t_f} dt\, L(q,\dot{q}) = \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} + \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial q}\delta q \right] \\ &= \ \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}}\delta q\Big|_{t_i}^{t_f} - \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial q} \right]\delta q \\ &= \ -\int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial q} \right]\delta q \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial q} = 0 \ . \tag{3}$$

Osservazioni:
1. Dimensioni dell'azione: $[S] = [\hbar] = [\text{energia} \times \text{tempo}] = ML^2T$.
2. Le equazioni lagrangiane del moto sono tipicamente del secondo ordine nel tempo, quindi ci si aspetta che in tali casi si possano imporre due "condizioni iniziali" (o condizioni al bordo), convenientemente scelte fissando la posizione al tempo iniziale e al tempo finale.
3. L'equazione del moto è esprimibile come la derivata funzionale dell'azione

$$\frac{\delta S[q]}{\delta q(t)} = 0 \tag{4}$$

dove la derivata funzionale è definita dalla variazione

$$\delta S[q] = \int dt \frac{\delta S[q]}{\delta q(t)} \delta q(t) \ .$$

4. Le equazioni del moto non cambiano se si aggiunge alla lagrangiana L una derivata totale, $L \to L' = L + \frac{d}{dt}\Lambda$.
5. Il formalismo lagrangiano si estende facilmente a sistemi con più gradi di libertà e, con un po' più di attenzione, a teorie di campo.

1.2 Formalismo hamiltoniano

L'idea di base del formalismo hamiltoniano è quella di avere equazioni del moto del primo ordine nel tempo. Introduciamo questo formalismo seguendo un esempio semplice. Per una particella non-relativistica di coordinate q^i la lagrangiana nello spazio delle configurazioni è data da

$$L(q,\dot{q}) = \frac{m}{2}\dot{q}^i\dot{q}_i - V(q) \tag{5}$$

dove gli indici delle coordinate sono abbassati con la metrica δ_{ij} e gli indici ripetuti sono automaticamente sommati su tutti i possibili valori (nel moto che avviene in uno spazio euclideo piatto, descritto in coordinate cartesiane, indici in alto ed indici in basso sono equivalenti, ma questa distinzione sarà utile in contesti più generali). Il passaggio alla formulazione hamiltoniana avviene nel seguente modo:
1) Si raddoppiano le variabili dinamiche, introducendo per ogni coordinata il corrispondente momento coniugato

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = m\dot{q}_i \ . \tag{6}$$

2) Si definisce l'hamiltoniana H come trasformata di Legendre della lagrangiana L

$$H(q^i, p_i) \equiv p_i\dot{q}^i - L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2m}p^i p_i + V(q) \ . \tag{7}$$

3) Si definiscono le parentesi di Poisson. Per due funzioni A e B definite sullo spazio delle fasi le parentesi di Poisson assumono la forma

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial q^i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial q^i}\frac{\partial A}{\partial p_i} \tag{8}$$

dove abbiamo usato la convenzione di sommatoria per indici ripetuti. Si noti in particolare che

$$\{q^i, p_j\} = \delta^i_j \ , \quad \{q^i, q^j\} = 0 \ , \quad \{p_i, p_j\} = 0 \ . \tag{9}$$

4) Le equazioni del moto hamiltoniane sono scrivibili nella forma

$$\dot{q}^i = \{q^i, H\} \ , \qquad \dot{p}_i = \{p_i, H\} \tag{10}$$

e sono del primo ordine nel tempo. Nel nostro esempio queste equazioni diventano

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p^i}{m} \ , \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} = -\frac{\partial V}{\partial q^i} \tag{11}$$

e sono equivalenti alle equazioni del moto lagrangiane $m\ddot{q}^i = -\frac{\partial V}{\partial q^i}$. La hamiltoniana è tipicamente interpretata come generatore delle traslazioni temporali (e dunque come generatore del moto): sposta le condizioni iniziali (un punto nello spazio delle fasi) nel tempo di una quantità infinitesima dt. Il generatore di queste trasformazioni canoniche è quindi dato da Hdt, che agisce tramite le parentesi di Poisson ($\delta q = \{q, Hdt\}$, $\delta p = \{p, Hdt\}$).

Anche queste equazioni possono essere dedotte dal principio d'azione. Nello spazio delle fasi l'azione prende la forma

$$S[q,p] = \int_{t_i}^{t_f} dt \left(p_i \dot{q}^i - H(q,p) \right) \tag{12}$$

per cui

$$\begin{aligned} 0 \ = \ \delta S &= \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\delta p_i \dot{q}^i + p_i \delta \dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q^i} \delta q^i \right) \\ &= \ p_i \delta q^i \Big|_{t_i}^{t_f} + \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\delta p_i \Big(\dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \Big) - \delta q^i \Big(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q^i} \Big) \right] \end{aligned}$$

e da qui si riconoscono le equazioni del moto di Hamilton. Si noti che in questa formulazione occorrono $2n$ costanti di integrazione, scelte come le $2n$ condizioni imposte sulle coordinate q^i al tempo iniziale e finale.

1.3 Esempi

1.3.1 Particella in potenziale scalare

Consideriamo il moto di una particella nello spazio euclideo piatto, descritto da coordinate cartesiane x^i, in presenza di un potenziale scalare $V(x)$ (in coordinate cartesiane $ds^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j = dx^i dx_i = dx^i dx^i$, per cui indici in alto ed indici in basso sono equivalenti).

Formalismo lagrangiano

La lagrangiana prende la forma

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2} \dot{x}^i \dot{x}_i - V(x) \tag{13}$$

e dalla variazione dell'azione $S[x(t)] = \int dt \ L(x, \dot{x})$ si ottengono le equazioni del moto

$$m\ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x^i} \ . \tag{14}$$

Formalismo hamiltoniano

Ricaviamo i momenti coniugati

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = m\dot{x}_i \tag{15}$$

l'hamiltoniana

$$H(x,p) = p_i\dot{x}^i - L(x,\dot{x}) = \frac{1}{2m}p_ip^i + V(x) \tag{16}$$

e le equazioni del moto

$$\begin{aligned} \dot{x}^i &= \{x^i, H\} = \frac{p^i}{m} \\ \dot{p}_i &= \{p_i, H\} = -\frac{\partial V}{\partial x^i} \ . \end{aligned} \tag{17}$$

Queste sono equazioni differenziali del primo ordine nel tempo, equivalenti a quelle lagrangiane in (14).

1.3.2 Particella in potenziale vettore

Consideriamo ora una particella in interazione con un potenziale vettore $A_i(x)$, come avviene ad esempio studiando il moto di una particella di massa m e carica q in un campo magnetico statico (indipendente dal tempo) $B^i = \epsilon^{ijk}\partial_j A_k$ (ovvero $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$).

Formalismo lagrangiano

La lagrangiana appropriata è data da

$$L(x,\dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^i\dot{x}_i + qA_i(x)\dot{x}^i \ . \tag{18}$$

Dalla variazione dell'azione $S[x(t)] = \int dt\ L(x,\dot{x})$ si ottengono le equazioni del moto

$$m\ddot{x}_i = q(\partial_i A_j - \partial_j A_i)\dot{x}^j \tag{19}$$

riscrivibili in funzione del campo magnetico come

$$m\ddot{x}_i = q\epsilon_{ijk}\dot{x}^j B^k \qquad (m\ddot{\vec{x}} = q\ \dot{\vec{x}} \times \vec{B}) \ . \tag{20}$$

Infatti possiamo invertire la relazione $B^i = \epsilon^{ijk}\partial_j A_k$ per ottenere $(\partial_i A_j - \partial_j A_i) = \epsilon_{ijk}B^k$.

Formalismo hamiltoniano

Ricaviamo i momenti coniugati

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = m\dot{x}_i + qA_i(x) \tag{21}$$

l'hamiltoniana

$$H(x,p) = p_i\dot{x}^i - L(x,\dot{x}) = \frac{1}{2m}\big(p_i - qA_i(x)\big)^2 \tag{22}$$

e le equazioni del moto

$$\begin{aligned} \dot{x}^i &= \{x^i, H\} = \frac{1}{m}(p^i - qA^i) \\ \dot{p}_i &= \{p_i, H\} = \frac{q}{m}(\partial_i A_j)(p^j - qA^j) \ . \end{aligned} \tag{23}$$

Queste sono equazioni differenziali del primo ordine nel tempo, equivalenti a quelle lagrangiane.

È spesso utile introdurre la definizione di momento covariante π_i

$$\pi_i = p_i - qA_i(x)$$

che soddisfa alle parentesi di Poisson

$$\{\pi_i, \pi_j\} = qF_{ij}$$

dove $F_{ij} \equiv \partial_i A_j - \partial_j A_i = \epsilon_{ijk} B^k$ descrive il campo magnetico. Con la quantizzazione questo momento diventa una derivata (gauge) covariante. In termini del momento covariante le equazioni del moto prendono la forma

$$\dot{x}^i = \{x^i, H\} = \frac{1}{m}\pi^i \qquad \dot{\pi}_i = \{\pi_i, H\} = \frac{q}{m} F_{ij}\pi^j \ . \tag{24}$$

Abbiamo considerato un campo magnetico statico, ma la trattazione può essere estesa ad un campo magnetico variabile nel tempo.

Invarianza di gauge

Lo stesso campo magnetico può essere descritto da potenziali vettori diversi, collegati da una trasformazione di gauge. Infatti, potenziali collagati dalla trasformazione

$$A_i(x) \ \rightarrow \ A'_i(x) = A_i(x) + \partial_i \Lambda(x) \ , \tag{25}$$

caratterizzata da una funzione arbitraria della posizione $\Lambda(x)$, identificano le stesso campo magnetico ($B'^i = B^i$). Le equazioni del moto (20), che dipendono solo dal campo magnetico, sono dunque invarianti. Questo è anche visibile direttamente dalla lagrangiana: per una trasformazione di gauge la lagrangiana cambia solo per una derivata totale, che in effetti non modifica le equazioni del moto

$$L(x, \dot{x}; A') = L(x, \dot{x}; A) + q\ \dot{x}^i \partial_i \Lambda = L(x, \dot{x}; A) + q\frac{d\Lambda}{dt}$$

dove la notazione $L(x, \dot{x}; A)$ indica la lagrangiana (18) che dipende dal potenziale A_i.

Nel formalismo hamiltoniano una trasformazione di gauge agisce sui momenti coniugati

$$p_i \ \rightarrow \ p'_i = p_i + q\partial_i \Lambda$$

ma lascia invariati i momenti covarianti π_i. Le denominazione covariante si riferisce naturalmente alla covarianza sotto trasformazioni di gauge.

1.3.3 Particella in potenziale tensoriale: particella in spazio curvo

Consideriamo ora il moto di una particella in uno spazio curvo con metrica descritta in coordinate arbitrarie da

$$ds^2 = g_{ij}(x) dx^i dx^j \ .$$

Formalismo lagrangiano

La lagrangiana contiene solo il termine di energia cinetica e prende la forma

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2} g_{ij}(x) \dot{x}^i \dot{x}^j \tag{26}$$

e dalla variazione dell'azione $S[x(t)] = \int dt\ L(x, \dot{x})$ si ottengono le equazioni del moto

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k = 0 \tag{27}$$

dove i simboli di Christoffel (le componenti della connessione metrica), definiti da

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{im}(\partial_j g_{km} + \partial_k g_{jm} - \partial_m g_{jk}) \tag{28}$$

con g^{ij} il tensore inverso della metrica ($g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k$), emergono automaticamente dal principio variazionale. Queste equazioni descrivono le geodetiche dello spazio curvo (a volte indicate con $\frac{D\dot{x}^i}{dt} = 0$).

Formalismo hamiltoniano

Ricaviamo i momenti coniugati

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = m g_{ij}(x)\dot{x}^j \tag{29}$$

l'hamiltoniana

$$H(x, p) = p_i\dot{x}^i - L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2m}g^{ij}(x)p_i p_j \tag{30}$$

e le equazioni del moto

$$\begin{aligned} \dot{x}^i &= \{x^i, H\} = \frac{1}{m}g^{ij}p_j \\ \dot{p}_i &= \{p_i, H\} = -\frac{1}{2m}(\partial_i g^{kl})p_k p_l\ . \end{aligned} \tag{31}$$

Invarianza per cambio di coordinate

Il moto della particella non dipende dalle coordinate scelte per la descrizione dello spazio curvo. Infatti per cambio di coordinate il tensore metrico si trasforma in modo tale da lasciare invariato l'elemento di lunghezza, $ds^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j = g'_{ij}(x')dx'^i dx'^j$. In particolare si trasforma come

$$\begin{aligned} x^i &\ \rightarrow\ x'^i = x'^i(x) \\ g_{ij}(x) &\ \rightarrow\ g'_{ij}(x') = g_{kl}(x)\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\partial x^l}{\partial x'^j}\ . \end{aligned} \tag{32}$$

Vediamo esplicitamente l'invarianza per un cambio di coordinate infinitesimo definito da

$$x^i\ \rightarrow\ x'^i = x^i - \xi^i(x) \tag{33}$$

con $\xi^i(x)$ campo vettoriale infinitesimo (per cui $\delta x^i \equiv x^{i'} - x^i = -\xi^i$).

Dalla eq. (32) vediamo che la metrica subisce la seguente trasformazione funzionale

$$\delta g_{ij} \equiv g'_{ij}(x) - g_{ij}(x) = \xi^k\partial_k g_{ij} + \frac{\partial\xi^k}{\partial x^i}g_{kj} + \frac{\partial\xi^k}{\partial x^j}g_{ik} \tag{34}$$

dove abbiamo calcolato la differenza tra la nuova funzione g'_{ij} e la vecchia funzione g_{ij} calcolate nello stesso punto x (quindi compare anche un termine di trasporto dal punto x' al punto x). È facile vedere che sotto queste trasformazioni infinitesime la lagrangiana rimane invariante

$$\delta L(x, \dot{x}) = m g_{ij}\delta\dot{x}^i\dot{x}^j + \frac{m}{2}(\delta x^k\partial_k g_{ij})\dot{x}^i\dot{x}^j + \frac{m}{2}\delta g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0\ . \tag{35}$$

Questa simmetria è tecnicamente denominata simmetria di "background" in quanto non si trasformano solo le variabili dinamiche $x^i(t)$, ma anche le funzioni $g_{ij}(x)$ che descrivono i potenziali delle forze esterne (background), e quindi le varie costanti d' accoppiamento in esse contenute.

2 Simmetrie e teorema di Noether

L'analisi delle simmetrie di un sistema fisico è molto utile per risalire alle equazioni del moto che lo descrivono. Si può definire il concetto di simmetria nel modo seguente:
Una simmetria è una trasformazione delle variabili dinamiche $q(t)$, indotta eventualmente da una trasformazione del parametro temporale t,

$$\begin{aligned} t \quad &\longrightarrow \quad t' = f(t) \\ q(t) \quad &\longrightarrow \quad q'(t') = F(q(t), t) \end{aligned} \tag{36}$$

che lascia invarianti in forma le equazioni del moto.
Poichè le equazioni del moto sono invarianti in forma, esse ammettono lo stesso tipo di soluzioni e non si può stabilire se siamo nel "vecchio sistema di riferimento" o nel "nuovo sistema di riferimento". Questi sistemi di riferimento sono quindi da trattare sullo stesso piano, senza che uno di essi possa essere identificato come privilegiato. Un test per verificare se una trasformazione è una simmetria fa uso dell'azione. Se l'azione è invariante sotto la trasformazione (36) a meno di termini di bordo, che possono emergere come integrali di derivate totali e che quindi non modificano le equazioni del moto lagrangiane (vedi osservazione n.4 a pagina 2),

$$S[q'] = S[q] \ + \ \text{termini di bordo} \tag{37}$$

allora la trasformazione è una simmetria; infatti le equazioni dedotte dal principio di minima azione sono le stesse in forma, essendo ottenibili da azioni identiche.

Un sistema fisico può presentare diversi tipi di simmetria: simmetrie discrete, simmetrie continue (associate quindi ad un gruppo di Lie), simmetrie locali (dette anche simmetrie di gauge). Un concetto ancor più generale è quello di "simmetria di background": sono descritte da trasformazioni generalizzate in cui si trasformano anche i parametri della teoria (detti anche costanti d' accoppiamento), come quelli contenuti negli eventuali potenziali esterni (per cui non sono simmetrie vere e proprie nel senso tecnico definito sopra, ma collegano soluzioni di una teoria con certi parametri alle soluzioni della teoria con parametri trasformati).

Per simmetrie di Lie, cioè simmetrie che dipendono in modo continuo da alcuni parametri, si può dimostrare il teorema di Noether, che afferma che:
Per ogni parametro continuo del gruppo di simmetria dell'azione esiste una carica conservata (in teorie di campo, questa conservazione è espressa tramite una equazione di continuità).

Una prova è la seguente. Una trasformazione di simmetria che dipende da un parametro α può essere descritta in modo generale da

$$\begin{aligned} t \quad &\longrightarrow \quad t' = f(t, \alpha) \\ q(t) \quad &\longrightarrow \quad q'(t') = F(q(t), t, \alpha) \end{aligned} \tag{38}$$

dove per definizione si ottiene la trasformazione identità per $\alpha = 0$. Le trasformazioni infinitesime (con parametro $\alpha \ll 1$) si possono scrivere come

$$\delta_\alpha q(t) \equiv q'(t) - q(t) = \alpha G(q(t), t) \tag{39}$$

con un'opportuna funzione G ottenibile dalla F in (38). Ora per provare che esiste una grandezza conservata associata a questa simmetria, estendiamo la trasformazione di simmetria ad una trasformazione più generale con parametro $\alpha(t)$, non più costante ma funzione

arbitraria dipendente dal tempo,

$$\delta_{\alpha(t)} q(t) = \alpha(t) G(q(t), t) \ . \tag{40}$$

In generale questa trasformazione non sarà una simmetria, ma possiamo certamente affermare che l'azione si trasforma nel seguente modo

$$\delta_{\alpha(t)} S[q] = \int dt \ \dot{\alpha}(t) Q(q(t), t) \tag{41}$$

a meno di termini di bordo (integrali di derivate totali). Infatti, se prendiamo il caso di α costante sappiamo che l'azione deve essere invariante perchè per ipotesi abbiamo una simmetria. Quindi, per una funzione α arbitraria, la variazione non può dipendere direttamente da α, ma solo dalle sue derivate. Ora la quantità Q che compare in (41) è la grandezza conservata. Per vederlo usiamo le equazioni del moto, che rendono nulla la variazione dell'azione sotto qualunque trasformazione ("principio di minima azione") e in particolare sotto le trasformazioni con parametro locale descritte in (40)

$$0 = \delta_{\alpha(t)} S[q]\Big|_{q_0} = \int dt \ \dot{\alpha}(t) Q\Big|_{q_0} = -\int dt \ \alpha(t) \dot{Q}\Big|_{q_0} \quad \Longrightarrow \quad \dot{Q}(q_0(t), t) = 0$$

dove abbiamo integrato per parti ed usato l'arbitrarietà della funzione $\alpha(t)$ per dedurre l'equazione di continuità. Si noti che dobbiamo valutare la variazione dell'azione nel punto di minimo, indicato con q_0, che sappiamo risolvere le equazioni del moto di Eulero-Lagrange. Conseguentemente la carica conservata Q deve essere valutata sulla soluzione delle equazioni del moto. Questo tipo di simmetrie di Lie sono dette simmetrie rigide o simmetrie globali ed ad ogni parametro del gruppo di Lie è quindi associata una carica conservata Q.

Le simmetrie di Lie in cui il parametro è una funzione arbitraria del tempo (e dello spazio) sono dette simmetrie locali o simmetrie di gauge. Il metodo precedente non permette di ottenere nessuna equazione di continuità non banale, perchè ora la variazione dell'azione è sempre zero, per qualunque parametro locale e senza usare le equazioni del moto. La presenza di simmetrie locali ci dice che le variabili dinamiche che stiamo usando sono ridondanti: con una trasformazione di gauge possiamo modificare arbitrariamente l'evoluzione temporale di una opportuna combinazione delle variabili dinamiche, combinazione la cui evoluzione non è evidentemente fissata dalle equazioni del moto.

Questi due tipi di simmetria sono esemplificati negli esempi seguenti.

2.1 Particella non relativistica e simmetrie (gruppo di Galileo)

Consideriamo il caso di una particella non relativistica libera. Ci proponiamo di studiarne l'invarianza per trasformazioni generate dal gruppo di Galileo, ottenendo le corrispondenti cariche conservate, come garantito dal teorema di Noether.

Prendiamo le coordinate cartesiane della particella $x^i(t) \in R^3$ come variabili dinamiche. Poichè la metrica euclidea è data da δ_{ij}, la posizione degli indici in alto o in basso è ininfluente. L'azione è data dall' integrale temporale della lagrangiana, che per una particella libera coincide con la sua energia cinetica

$$S[x^i(t)] = \int dt \ \frac{m}{2} \dot{x}^i \dot{x}^i \tag{42}$$

e le equazioni del moto sono ottenute minimizzando l'azione

$$\frac{\delta S[x]}{\delta x^i(t)} \equiv -m\ddot{x}^i = 0 \ . \tag{43}$$

Studiamo ora le trasformazioni di simmetria infinitesime che formano il gruppo di Galileo.
Traslazioni spaziali: La trasformazione delle variabili dinamiche per traslazioni spaziali è data da

$$\delta x^i(t) \equiv x'^i(t) - x^i(t) = a^i \tag{44}$$

con a^i vettore infinitesimo costante. Si verifica immediatamente che sotto questa trasformazione l'azione è invariante

$$\delta S[x] = 0 \tag{45}$$

quindi la trasformazione (44) è una simmetria: poichè l'azione è invariante le equazioni del moto sono invarianti in forma (come facilmente verificabile direttamente).

Usiamo ora il metodo di Noether per trovare le cariche conservate. Estendiamo le trasformazioni in (44) alle trasformazioni più generali dipendenti da un vettore $a^i(t)$ dipendente dal tempo

$$\delta x^i(t) = a^i(t) \ . \tag{46}$$

L'azione non è più invariante, ed infatti un calcolo esplicito sotto la variazione (46) produce

$$\delta S[x] = \int dt \ \underbrace{m\dot{x}^i}_{p^i} \dot{a}^i \ . \tag{47}$$

Il termine che moltiplica $\dot{a}^i$ identifica la carica conservata: il momento lineare $p^i = m\dot{x}^i$. Per provarne la conservazione dobbiamo usare le equazioni del moto, che implicano che $\delta S = 0$ per ogni variazione, ed in particolare per una variazione della forma (46). Indichiamo ora con $x^i(t)$ la soluzione delle equazioni del moto: integrando per parti ed usando l'arbitrarietà delle funzioni $a^i(t)$ si deduce che $p^i = m\dot{x}^i$ è conservato

$$0 = \delta S[x^i(t)] = \int dt \ p^i(t)\dot{a}^i(t) = -\int dt \ \dot{p}^i(t)a^i(t) \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{p}^i(t) = 0 \ . \tag{48}$$

Dunque il momento lineare $p^i = m\dot{x}^i$ è conservato durante l'evoluzione del sistema come conseguenza dell'invarianza traslazionale nello spazio.
Traslazione temporale: Anche una traslazione temporale è un'invarianza del sistema. Se trasliamo il tempo di una grandezza infinitesima ϵ

$$t \to t' = t - \epsilon \tag{49}$$

e se richiediamo che la funzioni $x^i(t)$ siano funzioni scalari[1]

$$x^i(t) \quad \to \quad x'^i(t') = x^i(t) \tag{50}$$

allora l'azione è invariante. Esprimiamo questa trasformazione delle variabili dinamiche in termini della variazione $\delta x^i(t) \equiv x'^i(t) - x^i(t)$, con le funzioni valutate in termini della stessa variabile t,

$$\begin{aligned} \delta x^i(t) \ &= \ x'^i(t) - x^i(t) \ = \ x'^i(t) - x^i(t) + x'^i(t') - x'^i(t') \\ &= \ x'^i(t) - x'^i(t') + \underbrace{x'^i(t') - x^i(t)}_{=0} \ = \ (t - t')\dot{x}'^i(t') \ = \ \epsilon\,\dot{x}^i(t) \end{aligned}$$

[1]La posizione della particella non cambia, cambia solo il modo con si misura il tempo.

relazione valida a meno di termini di ordine ϵ^2.

Usando subito una funzione arbitraria $\epsilon(t)$

$$\delta x^i(t) = \epsilon(t)\dot{x}^i(t) \tag{51}$$

possiamo verificare l'invarianza ed ottenere direttamente la carica conservata. Infatti variando l'azione sotto le trasformazioni (51) otteniamo

$$\delta S[x] = \int dt\ m\dot{x}^i\partial_t(\epsilon\dot{x}^i) = \int dt\ \left[\partial_t\Big(\frac{\epsilon m}{2}\dot{x}^i\dot{x}^i\Big) + \dot{\epsilon}\frac{m}{2}\dot{x}^i\dot{x}^i\right] = \int dt\ \dot{\epsilon}\underbrace{\Big(\frac{m}{2}\dot{x}^i\dot{x}^i\Big)}_{E} \tag{52}$$

dove abbiamo trascurato termini di bordo (le derivate totali). Da questo calcolo possiamo dedurre immediatamente due cose:
(i) se ϵ è costante allora $\dot{\epsilon} = 0$ e quindi $\delta S[x] = 0$, per cui la trasformazione corrispondente è una simmetria;
(ii) usando le equazioni del moto ($\delta S[x]|_{x(t)=x_{cl}(t)} = 0$ per qualunque variazione) ed integrando per parti deduciamo che $\dot{E} = 0$, quindi l'energia cinetica $E = \frac{m}{2}\dot{x}^i\dot{x}^i$ è conservata. Questa è dunque una conseguenza dell'invarianza per traslazioni temporali.
Rotazioni spaziali: Per rotazioni spaziali le coordinate si trasformano nel seguente modo

$$\delta x^i(t) = \epsilon^{ijk}\omega^j x^k(t) \tag{53}$$

dove il vettore ω^i descrive una rotazione infinitesima. Considerando subito ω^i come funzione arbitraria del tempo otteniamo

$$\delta S[x] = \int dt\ \dot{\omega}^i \underbrace{\epsilon^{ijk}x^j m\dot{x}^k}_{(\vec{r}\times\vec{p})^i \equiv L^i}\ . \tag{54}$$

Di nuovo, per ω^i costante si ha una simmetria. Le corrispondenti cariche conservate sono le tre componenti del vettore momento angolare $L^i = \epsilon^{ijk}x^j p^k$.
Trasformazioni galileiane proprie: Indichiamo con trasformazioni galileiane proprie le trasformazioni tra due sistemi di riferimento inerziali in moto relativo con velocità relativa costante v^i. La trasformazione sulle variabili dinamiche è data quindi da

$$\delta x^i(t) = v^i t \tag{55}$$

e procedendo come prima, cioè estendendo i parametri della trasformazione a funzioni arbitrarie del tempo, si calcola a meno di termini di bordo

$$\delta S[x] = \int dt\ \dot{v}^i \underbrace{\Big(m\dot{x}^i t - mx^i\Big)}_{G^i} \tag{56}$$

da cui si deduce che per v^i costanti si ha una simmetria a cui corrisponde la conservazione del vettore $G^i = m\dot{x}^i t - mx^i$, come si può facilmente verificare usando le equazioni del moto.

Per concludere, abbiamo visto come all'invarianza della particella libera non relativistica sotto le trasformazioni del gruppo di Galileo, un gruppo di Lie a 10 parametri, corrispondono 10 grandezze conservate.

2.2 Particella relativistica

Studiamo ora il principio d'azione che descrive la propagazione di una particella relativistica, che per definizione deve essere consistente con l'invarianza per trasformazioni di Lorentz e, più in generale, di Poincaré. Studieremo quattro descrizioni equivalenti in alcune delle quali, si farà uso anche di simmetrie locali (dette anche simmetrie di gauge).

(I) Consideriamo la descrizione del moto della particella come visto da un sistema di riferimento inerziale con coordiante cartesiane $x^\mu = (x^0, x^i) = (t, x^i)$. Per semplicità abbiamo posto $c = 1$. Consideriamo come variabili dinamiche le funzioni posizione $x^i(t)$. Imponendo l'invarianza dell'azione per trasformazioni di Lorentz garantisce l'invarianza relativistica. Questa richiesta si può realizzare facilmente utilizzando il tempo proprio T_0, che per un moto infinitesimo è dato da

$$dT_0 = \sqrt{-ds^2} = \sqrt{-dx^\mu dx_\mu} = \sqrt{dt^2 - dx^i dx^i} = dt\sqrt{1 - \dot{x}^i \dot{x}^i} \ . \tag{57}$$

Da nozioni elementari di relatività ristretta sappiamo che il tempo proprio è un invariante relativistico, misura essenzialmente la lunghezza invariante delle linea di mondo. Quindi la seguente azione, proporzionale al tempo proprio,

$$S_I[x^i(t)] = -m \int dT_0 = -m \int dt \ \sqrt{1 - \dot{x}^i(t)\dot{x}^i(t)} \tag{58}$$

con m massa della particella, è automaticamente invariante per trasformazioni di Lorentz (e di Poincarè). Inoltre nel limite non relativistico $(\dot{x}^i)^2 \ll 1$ questa azione riproduce l'azione della particella non relativistica. Le equazioni del moto sono ottenute dal principio di minima azione

$$\delta S_I[x^i] = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}^i}{\sqrt{1 - \vec{\dot{x}}\vec{\dot{x}}}}\right) = 0 \ . \tag{59}$$

Le simmetrie rigide sono quelle generate dal gruppo di Poincarè. Non ci sono simmetrie di gauge e le tre variabili dinamiche sono tutte "fisiche". Si noti il significato geometrico dell'azione: l'azione è proporzionale alla lunghezza della linea di mondo percorsa dalla particella, lunghezza di tipo tempo equivalente al tempo proprio (sono essenzialmente la stessa cosa).

(II) La formulazione precedente è corretta, ma sarebbe preferibile trattare le coordinate spaziali x^i e la coordinata temporale $x^0 \equiv t$ in un modo più simmetrico allo scopo di tenere più facilmente sotto controllo l'invarianza relativistica. Sarebbe quindi preferibile usare quattro variabili dinamiche, le x^μ, ma una di loro, o più in generale una loro combinazione, dovrà essere ridondante affinchè si possa avere l'equivalenza con l'azione precedente: questo è possibile se ci sono simmetrie locali (dette anche simmetrie di "gauge"). Questo si ottiene nel modo seguente: indichiamo con $x^\mu(\tau)$ le variabili dinamiche che descrivono la linea di mondo percorsa dalla particella. Il parametro τ è semplicemente un parametro temporale arbitrario che parametrizza la linea di mondo della particella. L'azione che cerchiamo è geometricamente sempre la stessa, proporzionale al tempo proprio, e prende la forma

$$S_{II}[x^\mu(\tau)] = -m \int d\tau \ \sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu} \tag{60}$$

dove ora $\dot{x}^\mu \equiv \frac{d}{d\tau} x^\mu$. Le equazioni del moto sono

$$\delta S_{II}[x^\mu] = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{d}{d\tau}\left(\frac{m\dot{x}^\mu}{\sqrt{-\dot{x}^\nu \dot{x}_\nu}}\right) = 0 \ . \tag{61}$$

Le simmetrie rigide sono quelle generate dal gruppo di Poincarè:

$$x^\mu(\tau) \to x'^\mu(\tau) = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu(\tau) + a^\mu \ . \tag{62}$$

Per trasformazioni infinitesime queste assumono la forma

$$\delta x^\mu(\tau) = \omega^\mu{}_\nu x^\nu(\tau) + a^\mu \tag{63}$$

dove come sempre $\delta x^\mu(\tau) = x'^\mu(\tau) - x^\mu(\tau)$, mentre $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$ (sia $\omega^\mu{}_\nu$ che a^μ sono ora da considerarsi come funzioni infinitesime). Questa simmetria garantisce che il modello è relativistico (lo è per definizione). Le corrispondenti grandezze conservate possono essere ottenute con una applicazione del teorema di Noether.

In aggiunta c'è anche una simmetria locale (simmetria di gauge)

$$\delta x^\mu = \xi(\tau)\dot{x}^\mu(\tau) \tag{64}$$

dove il parametro infinitesimo $\xi(\tau)$ che genera la simmetria è locale, cioè dipende arbitrariamente dal parametro temporale τ. Sotto le trasformazioni generate dalla (64) l'azione è invariante a meno di termini di bordo

$$\delta S_{II}[x^\mu] = \int d\tau \ \frac{d}{d\tau}\Big(\xi L_{II}\Big) \sim 0 \tag{65}$$

dove L_{II} è la lagrangiana (l'integrando in (60)). Questa simmetria locale corrisponde geometricamente ad una riparametrizzazione della linea d'universo

$$\begin{array}{rcl} \tau & \longrightarrow & \tau' = f(\tau) \\ x^\mu(\tau) & \longrightarrow & x'^\mu(\tau') = x^\mu(\tau) \end{array} \tag{66}$$

che per trasformazioni infinitesime $\tau' = \tau - \xi(\tau)$ si riduce alla (64) (i matematici chiamano questa simmetria un diffeomorfismo della linea di mondo). Questa simmetria di gauge è necessaria per mostrare l'equivalenza con la formulazione I. L'equivalenza è ottenibile operando una trasformazione di gauge (una riparametrizzazione della linea d'universo) per fissare una delle variabili dinamiche, cioè per "fissare il gauge". Infatti si può imporre la condizione ("scelta del gauge")

$$x^0(\tau) = t(\tau) = \tau \tag{67}$$

cosicchè la variabile $x^0(\tau)$ non è piu dinamica: la sua evoluzione temporale è stata fissata dalla scelta del gauge, che corrisponde all'uso di x^0 come parametro per indicare i vari punti della linea di mondo della particella. Questo riproduce l'azione S_I.

(III) Una terza formulazione è tramite l'uso di una variabile di gauge ("campo di gauge"), cioè di una variabile dinamica la cui trasformazione di gauge contiene la derivata del parametro di simmetria locale (detto parametro di gauge). Nel caso specifico si usa il campo di gauge $e(\tau)$ detto einbein (dal tedesco "una gamba") e l'azione è data da

$$S_{III}[x^\mu(\tau), e(\tau)] = \int d\tau \ \frac{1}{2}(e^{-1}\dot{x}^\mu\dot{x}_\mu - em^2) \ . \tag{68}$$

dove si assume che l'einbein e sia diverso da zero e quindi invertibile.

La simmetria locale prende la forma

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= \xi \dot{x}^\mu \\ \delta e &= \frac{d}{d\tau}(\xi e) \end{aligned} \tag{69}$$

che difatti comporta $\delta S_{III} = \int d\tau \, \frac{d}{d\tau}(\xi L_{III}) \sim 0$. Si noti che il campo di gauge e contiene la derivata del parametro locale ξ. Le simmetrie globali sono le ovvie trasformazioni di Poincarè

$$\begin{aligned} \delta x^\mu(\tau) &= \omega^\mu{}_\nu x^\nu(\tau) + a^\mu \\ \delta e(\tau) &= 0 \, . \end{aligned}$$

Le equazioni del moto sono

$$\frac{\delta S[x,e]}{\delta e(\tau)} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad e^{-2}\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu + m^2 = 0 \tag{70}$$

$$\frac{\delta S[x,e]}{\delta x^\mu(\tau)} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \frac{d}{d\tau}(e^{-1}\dot{x}^\mu) = 0 \, . \tag{71}$$

Per mostrare l'equivalenza con la formulazione II, risolviamo l'equazione algebrica (70)

$$e = \pm \frac{1}{m}\sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu} \, . \tag{72}$$

Sostituendo questa relazione in S_{III} si ottiene

$$S_{III}\left[x^\mu(\tau), e(\tau) = \pm\frac{1}{m}\sqrt{-\dot{x}^\mu\dot{x}_\mu}\right] = \mp m \int d\tau \, \sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu} \, . \tag{73}$$

Scegliendo la soluzione con $e > 0$ si riottiene la formulazione II. La presenza dell'altra soluzione è un segnale dell'esistenza delle antiparticelle. Inoltre l'azione III è superiore alle precedenti in quanto include anche il caso di particella senza massa, basta porre $m = 0$ nell'azione.

(III-bis) Si può utilizzare l'invarianza di gauge per fissare una condizione (condizione di gauge-fixing). Scegliendo di fissare questa condizione sull'einbein, ad esempio con la scelta $e = 1$ (condizione possibile solo se si ignorano complicazioni topologiche), l'azione (68) si semplifica,

$$S_{III-bis}[x^\mu(\tau)] = \int d\tau \, \frac{1}{2}\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu \, .$$

Ma occorre ricordarsi dell'equazione del moto di e, che con la condizione di gauge imposta diventa $\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu + m^2 = 0$. Questa azione semplificata con il vincolo associato è equivalente all' azione gauge invariante: tutta l'informazione sulla dinamica è ora contenuta in

$$\begin{aligned} &\text{azione} \qquad S_{III-bis}[x^\mu(\tau)] = \int d\tau \, \frac{1}{2}\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu \\ &\text{vincolo} \qquad \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu + m^2 = 0 \, . \end{aligned} \tag{74}$$

(IV) Infine passiamo ad una quarta formulazione, equivalente alle precedenti, utile per la quantizzazione canonica. È la formulazione hamiltoniana. Introducendo i momenti coniugati

$p_\mu = e^{-1}\dot{x}^\mu$ e la corrispondente hamiltoniana $\bar{H} = \frac{e}{2}(p^\mu p_\mu + m^2) \equiv eH$, dove è d'uso definire $H = \frac{1}{2}(p^\mu p_\mu + m^2)$, si ottiene l'azione nello spazio delle fasi. Dunque

$$S_{IV}[x^\mu(\tau), p_\mu(\tau), e(\tau)] = \int d\tau \left(p_\mu \dot{x}^\mu - \frac{e}{2}(p^\mu p_\mu + m^2) \right) \tag{75}$$

dove x^μ sono le coordinate della particella nello spazio-tempo, p_μ i momenti coniugati ed e l'einbein, che sono tutte variabili dinamiche da considerare indipendenti. La simmetria di gauge può essere scritta nella forma

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= \zeta p^\mu \\ \delta p_\mu &= 0 \\ \delta e &= \dot{\zeta} \end{aligned} \tag{76}$$

sotto cui $\delta S_{IV} = \int d\tau \, \frac{d}{d\tau}[\frac{\zeta}{2}(p^2 - m^2)] \sim 0$. Eliminando i momenti p_μ tramite le loro equazioni del moto algebriche

$$\frac{\delta S_{IV}}{\delta p_\mu} = \dot{x}^\mu - e p^\mu = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad p^\mu = e^{-1}\dot{x}^\mu \tag{77}$$

si ottiene la formulazione III (anche la simmetria di gauge è riprodotta con la seguente relazione tra i parametri di gauge $\zeta = e\xi$).

Si noti la struttura dell'azione S_{IV} che dipende dalle coordinate delle spazio delle fasi (x^μ, p_μ) e dal campo di gauge e che funge da moltiplicatore di Lagrange: le sue equazioni del moto impongono un vincolo nello spazio delle fasi (meccanica hamiltoniana vincolata)

$$H \equiv \frac{1}{2}(p^\mu p_\mu + m^2) = 0 \, . \tag{78}$$

Questo vincolo funge anche da generatore delle trasformazioni di gauge sulle coordinate dello spazio delle fasi tramite le parentesi di Poisson: usando il parametro infinitesimo arbitrario locale $\zeta(\tau)$ queste trasformazioni sono generate da

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= \{x^\mu, \zeta H\} = \zeta p^\mu \\ \delta p_\mu &= \{p_\mu, \zeta H\} = 0 \end{aligned} \tag{79}$$

che difatti coincidono con quelle riportate in (76).

Quantizzazione

Per quantizzare la particella relativistica conviene scegliere la formulazione IV e sfruttare la simmetria di gauge per fissare il gauge $e = 1$ (condizione possibile a meno di ostruzioni topologiche, trascurabili nel presente contesto). La quantizzazione è ottenuta elevando le variabili dinamiche classiche (x^μ, p_μ) ad operatori lineari $(\hat{x}^\mu, \hat{p}_\mu)$ agenti su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ e con regole di commutazione dedotte dalle parentesi di Poisson classiche

$$\{x^\mu, p_\nu\}_{PP} = \delta^\mu_\nu \qquad \longrightarrow \qquad [\hat{x}^\mu, \hat{p}_\nu] = i\hbar\delta^\mu_\nu \, . \tag{80}$$

Uno vettore arbitrario dello spazio di Hilbert $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$ non descrive in generale uno stato fisico perchè occorre ricordarsi della equazione del moto del campo di gauge, $p^\mu p_\mu + m^2 = 0$. Questa equazione è usata come vincolo che seleziona gli stati fisici del sistema

$$(\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu + m^2)|\phi\rangle = 0 \, . \tag{81}$$

Nel gauge $e = 1$ l'hamiltoniana è proporzionale al vincolo $H = \frac{1}{2}(p^2 + m^2)$ (evidente dalla (75)) e la corrispondente equazione di Schroedinger su stati fisici (che soddisfano la (81)) diventa

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial \tau} |\phi\rangle = \hat{H} |\phi\rangle = 0 \tag{82}$$

e dice che lo stato fisico $|\phi\rangle$ è indipendente da τ. La corrispondente funzione d'onda $\phi(x) = \langle x^\mu | \phi \rangle$ che descrive lo stato fisico è dunque indipendente dal parametro temporale τ e soddisfa la (81) che riconosciamo come l'equazione di Klein Gordon

$$\big(- \hbar^2 \partial_\mu \partial^\mu + m^2 \big) \phi(x) = 0 \; . \tag{83}$$

Dunque l'equazione di Klein Gordon è stata ottenuta quantizzando la particella relativistica. Ci si riferisce a questa quantizzazione come alla "prima quantizzazione", perchè questa equazione è poi reinterpretata come una teoria classica di un campo scalare relativistico che viene infine quantizzato (per cui si parla della quantizzazione di teorie di campo classiche come di "seconda quantizzazione"). Reintroducendo la velocità della luce c con considerazioni dimensionali l'equazione di Klein Gordon si scrive nel modo

$$\big(\partial_\mu \partial^\mu - \mu^2 \big) \phi(x) = 0 \tag{84}$$

dove $\mu = \frac{mc}{\hbar}$ è l'inverso della lunghezza d'onda Compton $\lambda = \frac{\hbar}{mc}$ associata alla particella relativistica.