9.10.2018

Brevi Appunti sulla Teoria dei Gruppi

(per il corso di Fisica Nucleare e Subnucleare 2018/19)

Fiorenzo Bastianelli

1 Definizione di gruppo

Consideriamo un gruppo $G = \{g\}$ visto come insieme di elementi g che soddisfano alle seguenti proprietà:

1) esiste una legge di composizione: presi $g_1, g_2 \in G$ allora $g_1 \cdot g_2 = g_3 \in G$,
2) esiste l'elemento identità: $\exists e \in G$ tale che $g \cdot e = e \cdot g = g$,
3) esiste l'elemento inverso: se $g \in G$ allora $\exists g^{-1} \in G$ tale che $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$,
4) associatività: $(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$.

I *gruppi discreti* sono quei gruppi che contengono un numero finito di elementi, ad esempio $Z_2 \equiv \{1, -1\}$ con la legge di moltiplicazione usuale definisce un gruppo con due elementi. I *gruppi di Lie* sono quelli i cui elementi dipendono in modo continuo da alcuni parametri, ad esempio le rotazioni attorno all'asse z formano un gruppo di Lie i cui elementi sono parametrizzati da un angolo $\theta \in [0, 2\pi]$. I *gruppi abeliani* sono quelli i cui elementi commutano sotto la legge di composizione: $g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_2$ per ogni g_1 e g_2 appartenenti al gruppo. Se questo non accade, allora si dice che il gruppo è *non abeliano*.

1.1 Alcuni esempi

Alcuni esempi di gruppi discreti sono:
• il gruppo ciclico Z_n, generato dalle potenze di un elemento a del gruppo, $Z_n = \{e, a, a^2, ..., a^{n-1}\}$, dove $a^n = a^0 = e$ (gruppo isomorfo alle radici n-esime di 1, $e^{\frac{2\pi i}{n}k}$ con $k = 0, 1, ..., n-1$);
• il gruppo delle permutazioni di n elementi S_n, che contiene $n!$ elementi.
Alcuni esempi di gruppi di Lie sono:
• $O(N)$ gruppo delle matrici reali ortogonali $N \times N$ (questo gruppo descrive le invarianze del prodotto scalare $x^T x$ con $x \in \mathbb{R}^N$);
• $SO(N)$ gruppo delle matrici reali ortogonali $N \times N$ con determinante $= 1$;
• $U(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in [0, 2\pi]\}$, gruppo delle fasi (questo gruppo descrive le invarianze del prodotto $z^* z$ con $z \in \mathbb{C}$);
• $U(N)$ gruppo delle matrici unitarie $N \times N$ (questo gruppo descrive le invarianze del prodotto scalare $w^\dagger w$ con $w \in \mathbb{C}^N$);
• $SU(N)$ gruppo delle matrici unitarie $N \times N$ con determinante $= 1$;
• $GL(N, \mathbb{R})$ gruppo delle matrici reali $N \times N$ con determinante $\neq 0$;
• $SL(N, \mathbb{R})$ gruppo delle matrici reali $N \times N$ con determinante $= 1$;
• $GL(N, \mathbb{C})$ gruppo delle matrici complesse $N \times N$ con determinante $\neq 0$;
• $SL(N, \mathbb{C})$ gruppo delle matrici complesse $N \times N$ con determinante $= 1$.

Ci sono delle relazioni tra questi gruppi, ad esempio: $U(1) = SO(2)$; $O(N) = Z_2 \otimes SO(N)$; $U(N) = U(1) \otimes SU(N)$.

2 Rappresentazioni

Introduciamo ora il concetto di rappresentazioni del gruppo. Una *rappresentazione* di un gruppo astratto G è una "realizzazione" delle relazioni moltiplicative del gruppo G in un corrispondente gruppo di matrici quadrate, dove il prodotto è dato dalla usuale moltiplicazione tra matrici. Queste matrici devono essere pensate come *operatori lineari* che agiscono su uno *spazio vettoriale* V, la cui dimensione è detta *dimensione* della rappresentazione. Esplicitamente una rappresentazione è data da una applicazione

$$\begin{array}{rcl} R:\, G & \longmapsto & \text{Matrici quadrate} \\ g & \longmapsto & R(g) \end{array} \tag{1}$$

tale che

1) $R(g_1)R(g_2) = R(g_1 \cdot g_2)$

2) $R(e) = I$ con I matrice identità.

Da questo segue anche che $R(g^{-1})R(g) = R(e) = I$, per cui $R(g^{-1}) = [R(g)]^{-1}$. L'associatività è automatica perchè il prodotto tra matrici è associativo. Quindi tutte le proprietà del gruppo sono realizzate esplicitamente dalle matrici di una rappresentazione.

Dunque, pensando alle matrici di una rappresentazione come ad operatori che agiscono su uno spazio vettoriale V di dimensione N, allora le matrici sono matrici $N \times N$ e si dice che la rappresentazione ha dimensione N.

Negli esempi descritti sopra abbiamo quasi sempre usato delle matrici per definire il gruppo. Queste matrici definiscono direttamente una particolare rappresentazione: la *rappresentazione definente* (detta anche rappresentazione *fondamentale*). Gli elementi del gruppo nella rappresentazione definente operano naturalmente trasformazioni sui vettori di uno spazio vettoriale V, lo spazio vettoriale su cui le matrici agiscono come operatori lineari. Indichiamo con v^a le componenti di un vettore dello spazio V. La matrice $R(g)$, che rappresenta l'elemento g del gruppo astratto G, trasforma il vettore nel modo seguente

$$v^a \quad \xrightarrow{g \in G} \quad v'^a = [R(g)]^a{}_b \, v^b \tag{2}$$

dove come al solito $[R(g)]^a{}_b$ descrive, al variare degli indici a e b, gli elementi della matrice $R(g)$. L'indice di riga a è il primo indice e convenzionalmente è posto in alto, l'indice di colonna b è il secondo indice e convenzionalmente è posto in basso. In tale modo i vettori dello spazio vettoriale V sono trasformati da operazioni associate al gruppo G. Indici ripetuti due volte sono sommati su tutti i loro possibili valori, e si usa la convenzione che nella somma un indice sia in alto ed uno in basso (a meno che tali indici siano equivalenti, caso in cui possono essere posti entrambi in alto o in basso).

A questo punto si pone il problema di studiare quante e quali siano le possibili rappresentazioni di un gruppo. In particolare è utile conoscere le loro dimensioni. Questo problema è di grande rilevanza per le applicazioni fisiche, perchè i "vettori" di una rappresentazione (genericamente denominati "tensori") possono essere usati per descrivere in modo conveniente quantità fisiche associate a modelli dove G agisce come gruppo di simmetria.

In generale si definiscono *equivalenti* rappresentazioni che sono collegate da trasformazioni di similitudine: $R(g)$ ed $\tilde{R}(g)$ sono rappresentazioni equivalenti se

$$\tilde{R}(g) = A\, R(g)\, A^{-1} \qquad\qquad \forall g \in G \tag{3}$$

dove A è una matrice indipendente da g. Questa relazione di equivalenza permette di considerare rappresentazioni equivalenti come essenzialmente la stessa rappresentazione. Infatti la trasformazione di similitudine rappresenta semplicemente un cambio di base nello spazio vettoriale V: le matrici delle diverse rappresentazioni equivalenti identificano lo stesso operatore lineare espresso in basi diverse.

Una rappresentazione *riducibile* è una rappresentazione equivalente ad una rappresentazione le cui matrici sono diagonali a blocchi, ad esempio $R(g)$ è riducibile se vale

$$\tilde{R}(g) = A\,R(g)\,A^{-1} = \left(\begin{array}{c|c|c} R_1(g) & 0 & 0 \\ \hline 0 & R_2(g) & 0 \\ \hline 0 & 0 & R_3(g) \end{array}\right) \qquad \forall g \in G \tag{4}$$

con una matrice A opportuna, e si dice che $R(g)$ è riducibile alle tre rappresentazioni $R_1(g)$, $R_2(g)$, $R_3(g)$. In questo esempio lo spazio vettoriale V su cui agisce la rappresentazione riducibile $R(g)$ è naturalmente decomposto come somma diretta dei tre spazi vettoriali su cui agiscono le rappresentazioni $R_1(g)$, $R_2(g)$, $R_3(g)$, cioè $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$. Questa riducibilità è quindi scritta come come $R(g) = R_1(g) \oplus R_2(g) \oplus R_3(g)$.

Una rappresentazione *irriducibile* è una rappresentazione che non può essere decomposta come sopra.

Nella classificazione delle rappresentazioni possibili di un gruppo G è utile considerare solo rappresentazioni irriducibili inequivalenti, poichè da esse seguono tutte le altre. Fissato n non è detto che esista una rappresentazione irriducibile di dimensione n. In generale solo per alcuni n si avranno rappresentazioni di un gruppo G fissato (a volte anche più di una con la stessa dimensione).

Una rappresentazione *unitaria* è una rappresentazione in termini di matrici (operatori) unitari. Le rappresentazioni unitarie sono molto utili in applicazioni di meccanica quantistica, dove le simmetrie di un sistema quantistico sono descritte da operatori unitari che agiscono nello spazio di Hilbert (spazio vettoriale infinito dimensionale dotato di norma definita positiva).

2.1 Indici in "alto" ed in "basso", indici puntati

Negli esempi precedenti abbiamo definito i gruppi di Lie usando delle matrici, che identificano direttamente una rappresentazione, la cosiddetta rappresentazione definente (o fondamentale). Indichiamo con N la dimensione della rappresentazione definente. Come anticipato, possiamo pensare alle matrici $N \times N$ di questa rappresentazione come ad operatori agenti su uno spazio vettoriale V di dimensione N. Indichiamo i vettori dello spazio vettoriale V con le loro componenti v^a, dove l'indice $a = 1, 2, \ldots, N$. I vettori $v^a \in V$ sono trasformati dalle matrici $[R(g)]^a{}_b$. Per definizione, un vettore generico v^a dello spazio V si trasforma nel seguente modo sotto l'azione del gruppo G

$$v^a \quad \xrightarrow{g \in G} \quad v^{a\prime} = [R(g)]^a{}_b\, v^b \tag{5}$$

(notare che si usa la convenzione per cui indici ripetuti sono sommati automaticamente su tutti i loro possibili valori). Vettori che si trasformano in modo identico a quello descritto qui sopra hanno per definizione gli indici in "alto". Vettori le cui componenti hanno gli indici in alto sono vettori che appartengono a spazi vettoriali equivalenti a V. Essi hanno la proprietà di avere le stesse leggi di trasformazione sotto l'azione del gruppo G, come descritte dalla (5).

Ora data questa rappresentazione definente $R(g)$ che agisce sullo spazio vettoriale V (che come abbiamo detto corrisponde a trasformare vettori con indici in "alto") ne possiamo immediatamente costruire altre tre $R(g)^*, R(g)^{-1\,\mathrm{T}}$ e $R(g)^{-1\,\dagger}$. In dettaglio:
rappresentazione "complesso coniugata" $R(g)^*$, che agisce su V^*
rappresentazione "inverso-trasposta" $R(g)^{-1\,\mathrm{T}}$, che agisce su $\tilde{V}$
rappresentazione "inverso-hermitiano coniugata[1]" $R(g)^{-1\,\dagger}$, che agisce su $\tilde{V}^*$.

I vettori su cui agiscono hanno rispettivamente, per convenzione, la seguente struttura indiciale:
vettori con "indici puntati in alto" $v^{\dot{a}}$ (vettori dello spazio complesso coniugato V^*),
vettori con "indici in basso" v_a (vettori dello spazio duale $\tilde{V}$),
vettori con "indici puntati in basso" $v_{\dot{a}}$ (vettori dello spazio duale complesso coniugato $\tilde{V}^*$).
In formule:

$$\begin{aligned} v^{\dot{a}} &\xrightarrow{g\in G} v'^{\dot{a}} = [R(g)^*]^{\dot{a}}{}_{\dot{b}}\, v^{\dot{b}} \\ v_a &\xrightarrow{g\in G} v'_a = [R(g)^{-1\,\mathrm{T}}]_a{}^b\, v_b \\ v_{\dot{a}} &\xrightarrow{g\in G} v'_{\dot{a}} = [R(g)^{-1\,\dagger}]_{\dot{a}}{}^{\dot{b}}\, v_{\dot{b}} \end{aligned}$$

È immediato verificare che queste sono rappresentazioni del gruppo G se $R(g)$ lo è. La struttura indiciale diversa, associata a queste matrici, riflette il fatto che sono operatori che agiscono su spazi vettoriali diversi.

Si possono ottenere grandezze invarianti sotto l'azione del gruppo G prendendo il prodotto scalare tra vettori con indici in alto (a volte detti controvarianti) e quelli con indici in basso (a volte detti covarianti) entrambi puntati o non puntati. Infatti

$$\begin{aligned} v_a w^a &\xrightarrow{g\in G} v'_a w'^a = v'^{\mathrm{T}} w' = (R(g)^{-1\,T}\, v)^{\mathrm{T}} R(g) w = v^{\mathrm{T}} R(g)^{-1}\, R(g) w = v^{\mathrm{T}} w = v_a w^a \\ x_{\dot{a}} y^{\dot{a}} &\xrightarrow{g\in G} x'_{\dot{a}} y'^{\dot{a}} = x'^T y' = (R(g)^{-1\,\dagger} x)^T R(g)^* y = x^T R(g)^{-1\,*}\, R(g)^* y = x^T y = x_{\dot{a}} y^{\dot{a}} \end{aligned} \quad (6)$$

(in questi calcoli il tipo di notazione usata è evidente dal contesto). In generale non ha senso da un punto di vista gruppale contrarre in altro modo gli indici dei vettori sopra descritti ("contrarre" indica l'operazione di uguagliare due indici e sommare su tutti i possibili valori che questi indici possono assumere).

È possibile che alcune di queste diverse rappresentazioni siano equivalenti tra loro, cioè collegate da una trasformazione di similitudine. Infatti per rappresentazioni <u>*reali*</u> vale $R(g)^* = R(g)$: dunque $v^{\dot{a}} \sim v^a$ e $v_{\dot{a}} \sim v_a$, dove il simbolo $\sim$ significa "si trasforma come". Non c'è dunque bisogno in questo caso di introdurre indici puntati. Per rappresentazioni <u>*unitarie*</u> vale $R(g)^{-1} = R(g)^\dagger$, e quindi $R(g)^{-1\dagger} = R(g)$, dunque $v_{\dot{a}} \sim v^a$ e $v^{\dot{a}} \sim v_a$. Di nuovo non c'è bisogno di usare indici puntati. Infine per rappresentazioni unitarie e reali (cioè <u>*ortogonali reali*</u>) tutte e quattro le rappresentazioni descritte sopra sono equivalenti: non c'è bisogno di usare indici puntati né di usare indici in basso.[2]

[1] Data una matrice R la sua hermitiano coniugata (o aggiunta) $R^\dagger$ è definita dal complesso coniugato della trasposta, $R^\dagger = R^{T*}$.

[2] Le rappresentazioni spinoriali finito-dimensionali del gruppo di Lorentz $O(3,1)$ (le rappresentazioni spinoriali sono rappresentazioni a due valori, e corrispondono a vere rappresentazioni del ricoprimento universale del gruppo di Lorentz, coincidente con $SL(2,C)$) non sono unitarie né reali. In questo caso tutti e quattro i diversi tipi di indici sono utili (anche se solo due di queste quattro rappresentazioni sono inequivalenti).

2.2 Altre rappresentazioni: rappresentazioni tensoriali e tensori

Altre rappresentazioni possono essere ottenute dal prodotto tensoriale delle rappresentazioni descritte precedentemente. Per definizione queste rappresentazioni agiscono sui "tensori", elementi di spazi vettoriali ottenuti dal prodotto tensoriale di copie di V, V^*, $\tilde{V}$ e $\tilde{V}^*$. Quindi i tensori, per definizione, hanno un certo numero di indici puntati e non puntati, in alto ed in basso, con le proprietà di trasformazione definite dalla natura associata agli indici.

Ad esempio, il tensore $F^{ab}{}_{c}{}^{\dot{d}}{}_{\dot{e}}$ per definizione è un oggetto con N^5 componenti che si trasformano esattamente come il prodotto delle componenti dei vettori definiti precedentemente (prodotto tensoriale)

$$F^{ab}{}_{c}{}^{\dot{d}}{}_{\dot{e}} \sim v^a u^b w_c x^{\dot{d}} y_{\dot{e}} \, .$$

Quindi il tensore $F^{ab}{}_{c}{}^{\dot{d}}{}_{\dot{e}}$ rappresenta (le componenti di) un elemento (vettore) di uno spazio vettoriale di dimensione N^5 (perché ciascun indice può assumere n valori; corrisponde ad un elemento dello spazio vettoriale $V \otimes V \otimes \tilde{V} \otimes V^* \otimes \tilde{V}^*$). Sotto l'azione del gruppo G si trasforma nel seguente modo

$$F^{ab}{}_{c}{}^{\dot{d}}{}_{\dot{e}} \quad \xrightarrow{g\in G} \quad F'^{ab}{}_{c}{}^{\dot{d}}{}_{\dot{e}} = [R(g)]^a{}_f \, [R(g)]^b{}_g \, [R(g)^{-1\,\mathrm{T}}]_c{}^h \, [R(g)^*]^{\dot{d}}{}_{\dot{m}} \, [R(g)^{-1\,\dagger}]_{\dot{e}}{}^{\dot{n}} \; F^{fg}{}_h{}^{\dot{m}}{}_{\dot{n}}$$

Questa legge di trasformazione lineare identifica quindi una rappresentazione di dimensione N^5 (le N^5 componenti sono mescolate tra loro da una matrice $N^5 \times N^5$, che non esplicitiamo ma ricavabile dalla formula qui sopra e che fornisce una rappresentazione del gruppo).

Tipicamente, i tensori identificano rappresentazioni riducibili, rappresentazioni identificate dalle matrici che trasformano questi tensori. Si pone ora il problema di decomporre le rappresentazioni in rappresentazioni irriducibili. Un modo di decomporre una rappresentazione è quello di studiare i tensori sui cui agiscono. Una prima operazione di decomposizione è quella di separare i tensori tenendo conto delle proprietà di simmetria sotto le permutazioni degli indici della stessa natura (è quindi utile conoscere le proprietà del gruppo delle permutazioni di n oggetti, indicato con S_n, conosciuto anche come il gruppo simmetrico).

Ad esempio il tensore T^{ab} può essere separato nella sua parte simmetrica ($S^{ab} = S^{ba}$) e nella sua parte antisimmetrica ($A^{ab} = -A^{ba}$) nel seguente modo

$$T^{ab} = \underbrace{\frac{1}{2}(T^{ab} + T^{ba})}_{S^{ab}} + \underbrace{\frac{1}{2}(T^{ab} - T^{ba})}_{A^{ab}} \, . \tag{7}$$

È facile convincersi che queste parti con simmetria distinta non si mescolano tra di loro sotto le trasformazioni del gruppo. Infatti, si può calcolare il trasformato della parte simmetrica sotto una trasformazione arbitraria del gruppo, e verificare che risulta simmetrica

$$\begin{aligned} S^{ab} \quad \xrightarrow{g\in G} \quad S'^{ab} &= [R(g)]^a{}_c [R(g)]^b{}_d \, S^{cd} \\ &= [R(g)]^a{}_c [R(g)]^b{}_d \, S^{dc} \\ &= [R(g)]^b{}_d [R(g)]^a{}_c S^{dc} = S'^{ba} \end{aligned} \tag{8}$$

Similmente si può verificare che

$$\begin{aligned} A^{ab} \quad \xrightarrow{g\in G} \quad A'^{ab} &= [R(g)]^a{}_c [R(g)]^b{}_d \, A^{cd} \\ &= [R(g)]^a{}_c [R(g)]^b{}_d \, (-A^{dc}) \\ &= -[R(g)]^b{}_d [R(g)]^a{}_c A^{dc} = -A'^{ba} \end{aligned} \tag{9}$$

per cui il trasformato della parte antisimmetrica è antisimmetrica. Parti simmetriche e parti antisimmetriche non sono mai mescolare tra di loro da trasformazioni del gruppo, per cui la rappresentazione tensoriale identificata dal tensore T^{ab} è riducibile. In una notazione compatta possiamo indicare con $R_T(g)$ la rappresentazione che trasforma il tensore $T^{ab} \sim T$, per cui

$$T' = R_T(g)\, T\ . \tag{10}$$

Questa rappresentazione è riducibile

$$\begin{pmatrix} S' \\ A' \end{pmatrix} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} R_S(g) & 0 \\ \hline 0 & R_A(g) \end{array}\right)}_{R_T(g)} \begin{pmatrix} S \\ A \end{pmatrix} \tag{11}$$

dove $T \sim \binom{S}{A}$ indica la decomposizione in parte simmetrica e parte antisimmetrica.

Queste parti potrebbero essere ulteriormente riducibili nel caso esistano altre operazioni invarianti (come la possibilità di prendere prodotti scalari come in (6)). Per i casi più semplici è facile studiare caso per caso una eventuale riducibilità ulteriore.

Si noti che i tensori delta di Kroneker $\delta^a{}_b$ e $\delta^{\dot a}{}_{\dot b}$, che sono gli elementi di matrice della matrice identità, rimangono invariati per trasformazioni del gruppo se si trasformano i loro indici nel modo corrispondente alla natura degli indici descritto sopra, ad esempio

$$\begin{aligned} \delta^a{}_b \quad \xrightarrow{g\in G} \quad (\delta')^a{}_b &= [R(g)]^a{}_c [R(g)^{-1\,T}]_b{}^d \delta^c{}_d = [R(g)]^a{}_c [R(g)^{-1\,T}]_b{}^c = [R(g)]^a{}_c [R(g)^{-1}]^c{}_b = \\ &= [R(g) R(g)^{-1}]^a{}_b = \delta^a{}_b\ . \end{aligned} \tag{12}$$

Sono detti *tensori invarianti*. Al contrario, δ_{ab} non identifica nessun tensore invariante (a meno che non ci siano relazioni speciali tra i vari tipi di indici): se definiamo un tensore che coincida con δ_{ab} in un "sistema di referimento", sotto una trasformazione del gruppo ("cambio del sistema di rieferimento) le componenti del tensore cambiano valore.

Quali e quanti tensori invarianti esistano dipende dal gruppo G in questione. Ad esempio, i gruppi $SO(N)$ ammettono come tensore invariante il simbolo completamente antisimmetrico $\epsilon^{a_1 \cdots a_n}$ dove gli indici sono quelli della rappresentazione fondamentale. Questo segue dal fatto che le matrici del gruppo $SO(N)$ hanno determinante 1. Similmente, i gruppi $SU(N)$ ammettono come tensori invarianti i simboli completamente antisimmetrici $\epsilon^{a_1 \cdots a_n}$ e $\epsilon_{a_1 \ldots a_n}$.

2.3 Rappresentazioni di $SO(N)$

Descriviamo le più semplici rappresentazioni di $SO(N)$, il gruppo speciale ortogonale di matrici reali $N \times N$. Questo è il gruppo che lascia invariato il prodotto scalare di vettori $\vec v, \vec w \in \mathbb{R}^N$ definito da $\vec v \cdot \vec w = \delta_{ab} v^a w^b$, dove la metrica δ_{ab} è un tensore invariante (indici in alto ed indici in basso sono equivalenti per $SO(N)$, quindi $\delta_{ab} = \delta^a{}_b$, e sappiamo già che $\delta^a{}_b$ è un tensore invariante; in ogni caso è facile verificare direttamente questa proprietà che segue dalla definizione di matrice ortogonale.). La rappresentazione definente (detta anche rappresentazione vettoriale) agisce sui vettori v^a, e come già descritto le quattro rappresentazioni basilari sono tutte equivalenti: $v^a \sim v_a \sim v^{\dot a} \sim v_{\dot a}$. Indichiamo tale rappresentazione con N, cioè con le sue dimensioni. Il prodotto tensoriale $N \otimes N$ identifica la rappresentazione tensoriale che agisce sui tensori con due indici T^{ab}, e quindi una rappresentazione di dimensione N^2. Abbiamo visto che questi tensori si possono separare nella parte simmetrica S^{ab} (di dimensione $\frac{N(N+1)}{2}$) e nella parte antisimmetrica A^{ab} (di dimensione $\frac{N(N-1)}{2}$). La parte simmetrica è ancora riducibile, perchè si

può formare uno scalare, cioè un invariante sotto le trasformazioni del gruppo, che corrisponde alla sua traccia

$$S \equiv \delta_{ab} S^{ab} = S^a{}_a \ . \tag{13}$$

Si vede facilmente che questo è uno scalare (infatti sappiamo già che la contrazione di un indice in alto con un indice in basso produce uno scalare)

$$S \quad \overset{g\in SO(N)}{\longrightarrow} \quad S' = S \tag{14}$$

e forma una rappresentazione banale uno-dimensionale. Possiamo separare la traccia dal tensore simmetrico S^{ab} dal resto nel seguente modo

$$S^{ab} = \underbrace{S^{ab} - \frac{1}{N}\delta^{ab} S}_{\hat{S}^{ab}} + \frac{1}{N}\delta^{ab} S \tag{15}$$

dove abbiamo definito il tensore simmetrico senza traccia $\hat{S}^{ab}$ (che soddisfa $\hat{S}^a{}_a = 0$). Dunque abbiamo separato il tensore T^{ab} nelle sue parti irriducibili

$$T^{ab} = \frac{1}{N}\delta^{ab} S + A^{ab} + \hat{S}^{ab} \tag{16}$$

che si trasformano indipendentemente senza mai mescolarsi. Indicando le rappresentazioni irriducibili con le rispettive dimensioni, quanto descritto si traduce nella seguente scrittura

$$N \otimes N = 1 \oplus \frac{N(N-1)}{2} \oplus \left(\frac{N(N+1)}{2} - 1\right) \ . \tag{17}$$

Si può dimostare che non esistono riduzioni ulteriori. La rappresentazione sui tensori anti-simmetrici con due indici A^{ab}, la $\frac{N(N-1)}{2}$, è anche chiamata rappresentazione aggiunta: le sue dimensioni corrispondono al numero di parametri indipendenti del gruppo, dati dagli angoli che descrivono le rotazioni nei piani a–b (con $a \neq b$).

Riassumendo, per $SO(N)$ abbiamo capito che esistono le seguenti rappresentazioni irriducibili, indicate con la loro dimensione,

$$1, N, \frac{N(N-1)}{2}, \left(\frac{N(N+1)}{2} - 1\right), ... \tag{18}$$

dove la 1 è la rappresentazione banale (lo scalare), la N è la rappresentazione vettoriale (detta anche definente o fondamentale), la $\frac{N(N-1)}{2}$ è la rappresentazione aggiunta, etc..

Nel caso specifico di $SO(3)$ la formula in (17) si riduce a

$$3 \otimes 3 = 1 \oplus 3 \oplus 5 \ . \tag{19}$$

Vediamo che in questo caso la rappresentazione aggiunta coincide con quella vettoriale. Traducendo in un linguaggio di meccanica quantistica, questa formula ci dice che componendo lo spin 1 (la rappresentazione vettoriale "3") con lo spin 1 si ottiene lo spin 0 (la rappresentazione "1", lo scalare), lo spin 1 (di nuovo la rappresentazione "3") e lo spin 2 (la rappresentazione "5"). Equivalentemente, definendo $n = 2l + 1$ per $n =, 1, 3, 5$, si può scrivere questa relazione come

$$[l = 1] \otimes [l = 1] \ = \ [l = 0] \oplus [l = 1] \oplus [l = 2] \ .$$

In meccanica quantistica il momento angolare orbitale è quantizzato, ed è identificato da un numero intero $l = 0, 1, 2, 3, ...$, che indica che la sua proiezione lungo un asse prefissato può assumere solo $2l + 1$ valori. L'elettrone che ruota attorno al nucleo può avere momento angolare con $l = 0$ (orbitale S), momento angolare con $l = 1$ (orbitale P), momento angolare con $l = 2$ (orbitale D), etc.. Proseguendo poi lo studio del momento angolare in meccanica quantistica si scopre poi che sono possibili anche momenti angolari intrinseci (spin) caratterizzati da valori seminteri $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, ...$ Le leggi di composizione del momento angolare in meccanica quantistica corrispondono proprio alla decomposizione di un prodotto tensoriale in rappresentazioni irriducibili.

Nel caso di $SO(4)$ o $SO(3,1)$ la formula sopra si riduce a

$$4 \otimes 4 = 1 \oplus 6 \oplus 9 \, . \tag{20}$$

La rappresentazione 6 è l'aggiunta ed è quella che agisce sul campo elettromagnetico, che in effetti ha 6 componenti indipendenti che si mescolano tra loro per trasformazioni di Lorentz. Il campo elettromagnetico infatti è descritto da un tensore antisimmetrico con due indici $F^{\mu\nu}$. Nel caso del gruppo di Lorentz indici in alto ed in basso sono equivalenti, e si usa la metrica per passare dall'uno all'altro (la metrica descrive la trasformazione di similitudine che collega le due rappresentazioni).

2.4 Rappresentazioni di $SU(N)$

Consideriamo ora $SU(N)$, il gruppo speciale unitario di matrici $N \times N$. Questo è il gruppo che lascia invariato il prodotto scalare di vettori $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{C}^N$ definito da $\vec{v}^* \cdot \vec{w} = v_a^* w^a = \delta^a{}_b v_a^* w^b$, dove il simbolo * indica il complesso coniugato. La metrica $\delta^a{}_b$ identifica un tensore invariante (vedere eq. (12)). Partendo dalla rappresentazione fondamentale, la N (corrispondente ai vettori v^a), ne otteniamo subito un'altra, la complesso coniugata (corrispondente ai vettori $v^{\dot{a}} \sim v_a$), indicata con $\overline{N}$. Cerchiamo ora altre rappresentazioni irriducibili considerando il prodotto tensoriale

$$N \otimes N = \frac{N(N+1)}{2} \oplus \frac{N(N-1)}{2} \tag{21}$$

che corrisponde alla separazione del tensore T^{ab} nelle sue parti simmetriche ed antisimmetriche, $T^{ab} = S^{ab} + A^{ab}$. Questa separazione è tutto (si noti che non si possono prendere traccie per formare scalari su questi tensori perchè δ_{ab} non è un tensore invariante per $SU(N)$: per rendersene conto basta trasformare il tensore δ_{ab} come dettato dalla struttura dei suoi indici e vedere che non rimane invariante). Abbiamo scoperto quindi l'esistenza di due nuove rappresentazioni e conosciamo le loro dimensioni.

Consideriamo ora

$$N \otimes \overline{N} = 1 \oplus (N^2 - 1) \tag{22}$$

che corrisponde alla separazione del tensore $T^a{}_b$ nella sua parte di traccia (lo scalare) e nella sua parte senza traccia. Questo è possibile perchè sappiamo che la contrazione di un indice alto con un indice basso produce uno scalare. In formule questa separazione si scrive

$$T^a{}_b = \frac{1}{N} \delta^a{}_b T + \hat{T}^a{}_b \tag{23}$$

dove $T \equiv T^a{}_a$ e $\hat{T}^a{}_b \equiv T^a{}_b - \frac{1}{N}\delta^a{}_b T$. Si noti che il tensore $\delta^a{}_b$ è un tensore invariante (questo tensore corrisponde alla metrica dello spazio vettoriale complesso $\mathbb{C}^N$). Abbiamo cosi scoperto l'esistenza della rappresentazione di dimensioni $N^2 - 1$, la cosidetta rappresentazione aggiunta.

Altri tensori invarianti di $SU(N)$ sono i tensori completamente antisimmetrici con N indici, $\epsilon_{a_1 a_2 \ldots a_N}$ ed $\epsilon^{a_1 a_2 \ldots a_N}$ (lo si può dimostrare utilizzando il fatto che le matrici del gruppo hanno determinate uguale ad uno). Possono essere usati per studiare la riduzione (o equivalenza) di rappresentazioni tensoriali.

Riassumendo, per $SU(N)$ abbiamo visto che esistono le seguenti rappresentazioni irriducibili

$$1, N, \bar{N}, N^2-1, \frac{N(N-1)}{2}, \frac{N(N+1)}{2}, \overline{\frac{N(N-1)}{2}}, \overline{\frac{N(N+1)}{2}}, \tag{24}$$

dove la 1 è la rappresentazione banale (lo scalare), la N è la rappresentazione fondamentale (o definente), la $\bar{N}$ è la antifondamentale (complesso coniugata della fondamentale), la N^2-1 è la rappresentazione aggiunta, che è reale, etc.

Esplicitiamo il caso di $SU(2)$. Abbiamo

$$2 \otimes 2 = 1 \oplus 3 \ , \qquad 2 \otimes \bar{2} = 1 \oplus 3 \tag{25}$$

Si noti che queste formule sono consistenti col fatto che la $\bar{2}$ è equivalente alla 2 (in notazioni $\bar{2} \sim 2$), evidente dalla relazione $v_a \sim \epsilon_{ab} v^b \sim v^a$. Infatti ϵ_{ab} è un tensore invariante per $SU(2)$ e se partendo da v^a definiamo un vettore $v_a = \epsilon_{ab} v^b$, allora sotto una trasformazione di gruppo possiamo scrivere

$$v'_a = \epsilon'_{ab} v'^b = \epsilon_{ab} v'^b \tag{26}$$

che indica che a meno del cambio di base i vettori v^a e v_a si trasformano allo stesso modo ($v'_a = \epsilon_{ab} v'^b$). Abbiamo usato il fatto che ϵ_{ab} è un tensore invariante, cosi come lo è il tensore ϵ^{ab} . La prova esplicita di ciò è come segue: se $R \in SU(2)$ allora

$$\epsilon'^{ab} = R^a{}_c R^b{}_d \epsilon^{cd} = k \epsilon^{ab} \tag{27}$$

per un opportuno coefficiente k (questo segue dal fatto che una matrice antisimmetrica 2×2 ha una sola componente indipendente). Per fissare k calcoliamo

$$\epsilon'^{12} = R^1{}_c R^2{}_d \epsilon^{cd} = R^1{}_1 R^2{}_2 - R^1{}_2 R^2{}_1 = \det R = 1 \ . \tag{28}$$

Quindi $k = 1$ e $\epsilon'^{ab} = \epsilon^{ab}$.

Traducendo la (25) in un linguaggio di meccanica quantistica si ha che componendo lo spin $\frac{1}{2}$ (la rappresentazione "2") con se stesso si ottiene lo spin 0 (la rappresentazione "1", lo scalare) e lo spin 1 (la rappresentazione "3"). Infatti, definendo $j = 2s+1$ per $s = 0, \frac{1}{2}, 1$, si può scrivere equivalentemente questa relazione come

$$[j = \tfrac{1}{2}] \otimes [j = \tfrac{1}{2}] \ = \ [j = 0] \oplus [j = 1] \ .$$

Il gruppo $SU(2)$ descrive le rotazioni dello spazio includendo la possibilità di avere spin semi-interi, associati alle particelle fermioniche.

Esplicitiamo anche il caso di $SU(3)$, che trova applicazioni fisiche sia come simmetria di sapore, $SU(3)_{sapore}$ che mescola tra di loro tre dei "sapori" dei quark (up, down e strange), che come simmetria di colore, $SU(3)_{colore}$ che mescola tra di loro i tre colori di ciascun quark (convenzionalmente rosso, verde, blu). Abbiamo

$$3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8 \tag{29}$$

Usata in $SU(3)_{sapore}$, la 3 e la $\bar{3}$ corrispondono ai quark up, down e strange, e loro antiparticelle

$$q^a = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \sim 3 \, , \qquad \bar{q}_a = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \\ \bar{s} \end{pmatrix} \sim \bar{3} \tag{30}$$

e la simmetria di sapore significa che possiamo ridefinire i sapori tramite trasformazioni del gruppo $SU(3)$ senza che nulla cambi nella descrizione dei fenomeni fisici. Nel modello statico a quark dei mesoni, che sono adroni formati da stati legati di quark-antiquark ($q\bar{q}$), la simmetria implica che possono emergere solo singoletti o ottetti di sapore. In effetti, l'ottetto mesonico contenente i pioni è l' esempio principale: ci sono otto mesoni le cui proprietà sono identiche, e non si potrebbe differenziare uno dall'altro se la simmetria fosse esatta (stesse masse, stesso spin, etc...). In realtà la simmetria è solo approssimata, per cui alcune piccole differenze ci sono (ad esempio, hanno cariche diverse e infatti l'elettromagnetismo viola questa simmetria).

Un'altra applicazione riguarda il colore dei quark ed è associata ad un altro gruppo $SU(3)$, detto $SU(3)_{colore}$. Ciascun sapore di quark possiede tre colori (rosso, verde, blu), ad esempio per il quark up possiamo raggrupparli in un vettore

$$u^a = \begin{pmatrix} u^{rosso} \\ u^{verde} \\ u^{blu} \end{pmatrix} \sim 3 \tag{31}$$

e la simmetria di colore significa che possiamo ridefinire i colori tramite trasformazioni del gruppo $SU(3)$ senza che nulla cambi (questa simmetria di colore è esatta). L' informazione contenuta nella relazione (29) è che è possibile combinare i colori di un quark con i colori di un antiquark (gli anticolori) per formare uno stato senza colore, lo scalare, oppure stati con otto possibili combinazioni di colori diversi: in effetti quark/antiquark dello stesso sapore possono fondersi in un fotone (lo scalare, o singoletto, di colore) oppure in un gluone (e ci sono otto possibilità diverse, i gluoni formano un ottetto di colore).

Inoltre

$$3 \otimes 3 = 6 \oplus \bar{3} \, . \tag{32}$$

La possibile ambiguità di capire se il tensore A^{ab}, che ha tre componenti, corrisponda alla 3 o alla $\bar{3}$ è risolto in favore di quest'ultima opzione considerando che $A^{ab} \sim A^{ab}\epsilon_{abc} \sim V_c$ (poiché ϵ_{abc} è un tensore invariante per $SU(3)$). Tale relazione in $SU(3)_{colore}$ ci dice che combinando i colori di due quark non è possibile ottenere uno stato senza colore (lo scalare).

Con un pò più di sforzo si può anche dedurre (considerando le simmetrie del tensore T^{abc}) che

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 \tag{33}$$

dove la 1 corrisponde alla parte completamente antisimmetrica di T^{abc}, la 10 alla parte completamente simmetrica di T^{abc}, le due 8 a parti del tensore con simmetria mista. In applicazioni nel modello statico a quark dei barioni, adroni formati da stati legati di tre quark (qqq), la simmetria $SU(3)_{sapore}$ predice che possono esistere famiglie di particelle identiche con 1, 8, o 10 componenti (non è detto che debbano esistere tutte: alcune combinazioni potrebbero non esitere per altre ragioni). Esistono diversi ottetti (la 8), otto barioni con proprietà simili per le interazioni forti (un particolare ottetto contiene il protone ed il neutrone). Le loro antiparticelle formano ancora delgi ottetti. Esiste anche un famoso decupletto di barioni, le cui funzioni d'onda sono simmetriche nei sapori dei tre quark costituenti. Queste funzioni d'onda si

trasformano nella 10 di SU(3) sotto le trasformazioni di simmetria del sapore. I corrispondenti anti-barioni si raggruppano nella $\overline{10}$. Applicando la relazione (33) al colore, il fatto che nel lato destro compaia la 1 è interpretata con il fatto che è possibile combinare i colori di tre quark per formare uno stato senza colore (come nel protone formato da tre quark, ed in generale nei barioni, che sono scalari di colore).

2.5 Rappresentazioni di $U(1)$

Consideriamo anche il caso delle rappresentazioni del gruppo $U(1)$, che riveste una notevole importanza in fisica. Il gruppo $U(1) = \{e^{i\theta} \mid \theta \in [0, 2\pi]\}$ è il gruppo delle fasi. Si può dimostrare che tutte le sue rappresentazioni irriducibili unitarie sono uno-dimensionali (complesse) e sono identificate da un numero intero positivo o negativo detto "carica". La rappresentazione definente rappresenta un elemento del gruppo $U(1)$ con la fase $e^{i\theta}$ che "ruota" naturalmente un vettore complesso unidimensionale v ($v \in \mathbb{C}$, dove $\mathbb{C}$ indica il campo dei numeri complessi, che ora interpretiamo come spazio vettoriale complesso ad una dimensione)

$$v \quad \stackrel{g\in U(1)}{\longrightarrow} \quad v' = e^{i\theta} v \ , \qquad\qquad v \in \mathbb{C} \ . \tag{34}$$

Quindi lo spazio vettoriale della rappresentazione definente è unidimensionale e complesso, e le matrici della rappresentazione sono matrici complesse 1×1 (cioè numeri complessi).

Oggetti che si trasformano come prodotti tensoriali della rappresentazione definente

$$v_{(q)} \sim \underbrace{vv \cdots v}_{q \text{ volte}} = v^q \tag{35}$$

con q numero intero sono le rappresentazioni di carica q

$$v_{(q)} \quad \stackrel{g\in U(1)}{\longrightarrow} \quad v'_{(q)} = e^{iq\theta} v_{(q)} \ . \tag{36}$$

Evidentemente q può essere anche negativo (sono le rappresentazioni complesso coniugate). Il prodotto tensoriale di una rappresentazione di carica q_1 con una rappresentazione di carica q_2 genera la rappresentazione di carica $q_1 + q_2$. Il gruppo di simmetria $U(1)$ è usato in fisica quando ci sono numeri quantici additivi quantizzati. Siccome tutte le sue rappresentazioni sono uno-dimensionali, per distinguere la varie rappresentazioni inequivalenti si indica la carica q della rappresentazione piuttosto che la sua dimensione.

Quanto analizzato sinora permette anche di interpretare le possibili cariche (generalizzate, ad esempio elettrica, di colore, etc.) delle particelle come associate ad una rappresentazione del gruppo di simmetria.

Ad esempio, il modello standard delle particelle elementari contiene il gruppo di simmetria $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ (detto gruppo di simmetria di gauge). I fermioni del modello standard hanno cariche generalizzate sotto questi gruppi. Possiamo indicare queste cariche usando una notazione della forma $(SU(3), SU(2))_{U(1)}$, dove per i gruppi non-abeliani indichiamo la rappresentazione tramite la corrispondente dimensione, mentre per la parte abeliana tramite la carica $U(1)$, chiamata ipercarica. Anticipando che i fermioni si possono decomporre in parti destre (R) e sinistre (L), con cariche che possono essere diverse, si ha la seguente tabella

$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}$	ν_{eR}	e_R	$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	u_R	d_R
$\begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}$	$\nu_{\mu R}$	μ_R	$\begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}$	c_R	s_R
$\begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}$	$\nu_{\tau R}$	τ_R	$\begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}$	t_R	b_R
$(1,2)_{-\frac{1}{2}}$	$(1,1)_0$	$(1,1)_{-1}$	$(3,2)_{\frac{1}{6}}$	$(3,1)_{\frac{2}{3}}$	$(3,1)_{-\frac{1}{3}}$

Il gruppo $SU(3)$ è detto gruppo di colore, ed i quarks si trasformano nella rappresentazione fondamentale, la 3, ed hanno quindi tre "colori", mentre le corrispondenti antiparticelle, gli antiquarks, si trasformano nella rappresentazione complesso coniugata, la $\bar{3}$, ed hanno quindi tre "anticolori". I leptoni non sentono la forza forte e sono quindi scalari sotto il gruppo di colore. Il gruppo $SU(2)$ è detto gruppo di isospin debole, ed i doppietti di $SU(2)$ sono stati scritti qui sopra nella forma di vettore colonna: si trasformano nella rappresentazione bidimensionale, la 2, ed hanno quindi isospin debole $I = \frac{1}{2}$, con terza componente $I_3 = \frac{1}{2}$ per l'elemento in alto del vettore , ed $I_3 = -\frac{1}{2}$ per quello in basso. Si ricordi che la 2 è equivalente alla $\bar{2}$, entrambe identificano la stessa rappresentazione con isospin debole uguale ad $\frac{1}{2}$. $U(1)$ è il gruppo dell'ipercarica. Se indichiamo con Y l'ipercarica di una particella, la corrispondente carica elettrica Q è data da $Q = I_3 + Y$, dove I_3 indica la terza componente dell'isospin debole.

3 Gruppi di Lie ed algebra di Lie

Un gruppo di Lie è per definizione un gruppo i cui elementi dipendono in modo continuo da dei parametri. Studiando le trasformazioni infinitesime del gruppo, cioè trasformazioni che differiscono di poco dall'identità, si ottiene la cosidetta *algebra di Lie* del gruppo, un'algebra che riassume delle informazioni essenziali del gruppo. Per introdurre questi argomenti, studiamo preliminarmente alcuni dei gruppi più semplici, ma anche di maggior uso in fisica, per poi elencare proprietà e definizioni generali.

3.1 SO(2)

Consideriamo il familiare gruppo delle rotazioni nello spazio euclideo bidimensionale, il gruppo $SO(2)$ delle matrici R reali ortogonali 2×2 con determinante uguale ad 1. Queste matrici generano le trasformazioni di un vettore

$$\vec{x} \quad \longrightarrow \quad \vec{x}\,' = R\,\vec{x} \tag{37}$$

o in notazione tensoriale

$$x^i \quad \longrightarrow \quad x'^i = R^i{}_j x^j \qquad i,j = 1,2\,. \tag{38}$$

Questa è la rappresentazione definente (o vettoriale). Gli indici in alto ed in basso sono della stessa natura (poiché la metrica euclidea è la δ_{ij}), per cui si potrebbe porre equivalentemente tutti gli indici in alto.

Le rotazioni che mescolano le due componenti del vettore $\vec{x} = (x, y) = (x^1, x^2)$ dipendono da un angolo θ e possono essere scritte come

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \stackrel{\theta \ll 1}{\longrightarrow} \quad 1 + \theta \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{iT} + \cdots \tag{39}$$

dove si dice che la matrice T "genera" la parte infinitesima della trasformazione ed è appunto chiamata generatore

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} . \tag{40}$$

L'unità immaginaria i introdotta in (39) è convenzionale, ma permette di presentare il generatore come matrice hermitiana (i cui autovalori sono reali).

Il gruppo è abeliano, i suoi elementi commutano, $R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_2)R(\theta_1)$, ed ovviamente si ha che

$$[T, T] = 0 \tag{41}$$

dove $[\cdot, \cdot]$ indica il commutatore ($[A, B] = AB - BA$). Questa è chiamata algebra di Lie di $SO(2)$. In generale, l'algebra di Lie di un gruppo è generata dai commutatori dei suoi generatori infinitesimi.

Iterando trasformazioni infinitesime si possono ottenere trasformazioni finite. Se il parametro θ non è infinitesimo, considerando $\frac{\theta}{n}$ con n grande possiamo scrivere

$$\left[R\left(\tfrac{\theta}{n}\right)\right]^n = \left(1 + i\tfrac{\theta}{n}T\right)^n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{i\theta T} = \cos(\theta) + iT\sin(\theta) \tag{42}$$

che riproduce la trasformazione finita in (39).

Si noti che definendo il numero complesso $z = x + iy$, le trasformazioni di $SO(2)$ di (x, y) prendono la forma di trasformazioni di fase $U(1)$

$$z' = x' + iy' = (x\cos(\theta) + y\sin(\theta)) + i(-x\sin(\theta) + y\cos(\theta)) = e^{-i\theta}z . \tag{43}$$

I gruppi $SO(2)$ ed $U(1)$ sono equivalenti.

3.2 SO(3)

Consideriamo ora il gruppo delle rotazioni nello spazio tridimensionale, il gruppo $SO(3)$ delle matrici R reali ortogonali 3×3 con determinante uguale ad 1. Queste matrici generano le trasformazioni di un vettore tridimensionale

$$\vec{x} \quad \longrightarrow \quad \vec{x}\,' = R\,\vec{x} \tag{44}$$

o in notazione tensoriale

$$x^i \quad \longrightarrow \quad x'^i = R^i{}_j x^j \qquad i, j = 1, 2, 3 . \tag{45}$$

Consideriamo in particolare le rotazioni attorno ai tre assi cartesiani con coordinate $(x, y, z) = (x^1, x^2, x^3)$

$$R_x(\theta_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_x) & \sin(\theta_x) \\ 0 & -\sin(\theta_x) & \cos(\theta_x) \end{pmatrix} \quad \stackrel{\theta_x \ll 1}{\longrightarrow} \quad 1 + \theta_x \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{iT^1} + \cdots \tag{46}$$

$$R_y(\theta_y) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_y) & 0 & -\sin(\theta_y) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta_y) & 0 & \cos(\theta_y) \end{pmatrix} \quad \overset{\theta_y \ll 1}{\longrightarrow} \quad 1 + \theta_y \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{iT^2} + \cdots \tag{47}$$

$$R_z(\theta_z) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_z) & \sin(\theta_z) & 0 \\ -\sin(\theta_z) & \cos(\theta_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \overset{\theta_z \ll 1}{\longrightarrow} \quad 1 + \theta_z \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{iT^3} + \cdots \tag{48}$$

cosicchè i generatori T^i delle trasformazioni infinitesime sono dati da

$$T^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \qquad T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad T^3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{49}$$

La corrispondente algebra di Lie è facilmente calcolata calcolando i commutatori delle matrici sopra identificate

$$[T^i, T^j] = i\epsilon^{ijk} T^k . \tag{50}$$

Il lato destro non è nullo, e questo indica che il gruppo è non-abeliano (gli elementi del gruppo non commutano). Le costanti ϵ^{ijk} sono chiamate costanti di struttura del gruppo $SO(3)$ perchè codificano la struttura non abeliana del gruppo.

Abbiamo ottenuto questa algebra usando la rappresentazione definente, però ora possiamo considerarla coma l'algebra astratta del gruppo di Lie $SO(3)$ e studiarne le diverse rappresentazioni irriducibili (in modo analogo alle rappresentazioni del gruppo). Per esponenziazione, come nel caso precedente, si ottengono trasformazioni finite che forniscono una rappresentazione del gruppo[3].

Commento per chi ha già studiato il momento angolare in meccanica quantistica
Riconosciamo in (50) l'algebra quantistica del momento angolare. Infatti rinominando $T^i \to L^i$ si riconosce la familiare algebra del momento angolare (in unità $\hbar = 1$)

$$[L^i, L^j] = i\epsilon^{ijk} L^k \tag{51}$$

e lo studio delle sue rappresentazioni unitarie irriducibili può essere risolto esplicitamente con i metodi usati in meccanica quantistica: queste rappresentazioni irriducibili sono date dalle armoniche sferiche Y_{lm}, che per l fissato formano una base della rappresentazione di spin l che è $2l + 1$ dimensionale (i possibili valori di m sono $2l + 1$). Nel caso di rappresentazioni spinoriali (cioè con spin semintero) una rotazione di 2π (che per $SO(3)$ coincide con l'identità) è rappresentata dalla matrice -1, e quindi si parla di rappresentazione a 2 valori (occorre ruotare di altri 2π per riottenere l'identità). Come vedremo, queste rappresentazioni spinoriali sono vere e proprie rappresentazioni del gruppo $SU(2)$, che ha la stessa algebra di Lie di $SO(3)$, e quindi localmente ha la stessa struttura, ma diverse proprietà globali.

Per curiosità, e magari per apprezzare sviluppi futuri (algebre di Lie di $SO(N)$ e $SO(N, M)$), riscriviamo le matrici che identificano i generatori nella rappresentazione vettoriale (49) e la corrispondente algebra di Lie in (50) in un modo alternativo. Possiamo rinominare il generatore

[3] A meno di proprietà globali (o topologiche), come esemplificato dal caso delle rappresentazioni spinoriali a due valori che, come vedremo più avanti, sono vere rappresentazioni (cioè ad un solo valore) del gruppo $SU(2)$.

T^1 come T^{23}, poichè genera rotazione nel piano 2-3, e così via: $T^2 \equiv T^{31}$, $T^3 \equiv T^{12}$. Gli elementi di matrice in (49) possono essere scritti come

$$(T^1)^i{}_j \equiv (T^{23})^i{}_j = -i(\delta^{2i}\delta^3{}_j - \delta^{3i}\delta^2{}_j) \tag{52}$$

e similmente per T^{31} e T^{12}. Si ottiene quindi l'espressione

$$(T^{kl})^i{}_j = -i(\delta^{ki}\delta^l{}_j - \delta^{li}\delta^k{}_j) \tag{53}$$

che può essere usata per ricalcolare l'algebra di Lie di $SO(3)$. Riscritta in questa base, l'algebra di Lie (50) diventa

$$[T^{kl}, T^{ij}] = -i\delta^{li}T^{kj} + i\delta^{ki}T^{lj} + i\delta^{lj}T^{ki} - i\delta^{kj}T^{li} \ . \tag{54}$$

Si noti in questa relazione la presenza della metrica euclidea (inversa) δ^{ij}. Scritta in questa forma l'algebra di Lie è valida per il generico gruppo $SO(N)$, se naturalmente gli indici assumono i valori da 1 ad N. Sostituendo la metrica δ_{ij} con una metrica di Minkowski η_{ij}, appropriata per una spazio tempo con N spazi ed M tempi, si ottinene l'algebra di Lie di $SO(N, M)$.

3.3 U(1)

Consideriamo il gruppo $U(1) = \{e^{i\theta} \mid \theta \in [0, 2\pi]\}$, il gruppo delle fasi definito tramite la sua rappresentazione definente. Per trasformazioni infinitesime

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + ... \tag{55}$$

ed il generatore infinitesimo è dato da $T = 1$ (che possiamo pensare come matrice 1×1) il quale produce l'algebra di Lie abeliana del gruppo $U(1)$ data dal commutatore

$$[T, T] = 0 \ . \tag{56}$$

Nella rappresentazione di carica q, dove l'elemento $e^{i\theta}$ è rappresentato da $e^{iq\theta}$, si vede che il generatore infinitesimo è rappresentato da $T = q$ e soddisfa alla stessa algebra di Lie (56). Possiamo quindi pensare all'algebra di Lie $[T, T] = 0$ come all'algebra di Lie astratta corrispondente al gruppo $U(1)$, che viene poi rappresentata da matrici diverse nelle diverse rappresentazioni. Siccome le rappresentazioni irriducibili del gruppo $U(1)$ sono tutte uno-dimensionali tutte queste matrici sono matrici 1×1 e sono quindi dei numeri. Nella rappresentazione di carica q il generatore di $U(1)$ è rappresentato da $T = q$. Tipicamente si usa anche la notazione Q (con cui spesso si indica una carica) al posto di T per il generatore del gruppo $U(1)$. I gruppi $U(1)$ ed $SO(2)$ identificano lo stesso gruppo di Lie abeliano, come già descritto precedentemente.

3.4 SU(2)

Analizziamo ora il gruppo $SU(2)$, il gruppo delle matrici unitarie 2×2 con determinante uguale ad 1

$$SU(2) = \{U \text{ matrici complesse } 2 \times 2 \mid U^\dagger = U^{-1}, \ \det U = 1\} \ . \tag{57}$$

Possiamo scrivere matrici che differiscono infinitesimamente dalla matrice unità nel seguente modo

$$U = 1 + iT \qquad\qquad T^i{}_j \ll 1 \ . \tag{58}$$

Ora la richiesta che $U^\dagger = 1 - iT^\dagger$ coincida con $U^{-1} = 1 - iT$ implica che le matrici T debbano essere hermitiane

$$T^\dagger = T \tag{59}$$

mentre la richiesta di determinate unitario, $\det U = 1 + i \operatorname{tr} T = 1$, implica che queste matrici siano a traccia nulla

$$\operatorname{tr} T = 0 \, . \tag{60}$$

Una base di matrici 2×2 hermitiane a traccia nulla sono date dalle matrici di Pauli

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{61}$$

per cui possiamo esprimere una arbitraria matrice T come combinazione lineare delle σ^a

$$T = \theta_a \frac{\sigma^a}{2} \equiv \theta_a T^a \qquad\qquad a = 1, 2, 3 \, . \tag{62}$$

La normalizzazione è stata scelta per comodità, e così normalizzati soddisfano

$$\operatorname{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab} \, . \tag{63}$$

Con questa normalizzazione i generatori infinitesimi $T^a = \frac{\sigma^a}{2}$ soddisfano alla seguente algebra di Lie di $SU(2)$

$$[T^a, T^b] = i \epsilon^{abc} T^c \tag{64}$$

che coincide con l'algebra di Lie di $SO(3)$. Questo dimostra che localmente sono lo stesso gruppo (hanno le stesse costanti di struttura), anche se globalmente ci sono differenze: usando il linguaggio della geometria differenziale si può dire che il gruppo $SU(2)$ è un ricoprimento del gruppo $SO(3)$. Vediamo questa differenza esplicitamente nella rappresentazione definente (o fondamentale) di $SU(2)$ (la rappresentazione 2 o di spin $\frac{1}{2}$). Una rotazione finita è ottenuta iterando trasformazioni infinitesime per renderle finite $U(\theta_a) = \exp(i\theta_a \frac{\sigma^a}{2})$. Una rotazione finita attorno all'asse z è ottenuta scegliendo $\theta_3 = \theta$ e $\theta_1 = \theta_2 = 0$, ed indicandola con $U_3(\theta)$ si ha

$$\begin{aligned}
U_3(\theta) &= e^{i\theta \frac{\sigma^3}{2}} \\
&= 1 + i\theta \frac{\sigma^3}{2} + \frac{1}{2!}\Big(i\theta \frac{\sigma^3}{2}\Big)^2 + \frac{1}{3!}\Big(i\theta \frac{\sigma^3}{2}\Big)^3 + \frac{1}{4!}\Big(i\theta \frac{\sigma^3}{2}\Big)^4 + ... \\
&= 1 + i\Big(\frac{\theta}{2}\Big)\sigma^3 - \frac{1}{2!}\Big(\frac{\theta}{2}\Big)^2 - i\frac{1}{3!}\Big(\frac{\theta}{2}\Big)^3 \sigma^3 + \frac{1}{4!}\Big(\frac{\theta}{2}\Big)^4 \\
&= \Big(1 - \frac{1}{2!}\Big(\frac{\theta}{2}\Big)^2 + \frac{1}{4!}\Big(\frac{\theta}{2}\Big)^4 + ...\Big) + i\sigma^3\Big(\frac{\theta}{2} - \frac{1}{3!}\Big(\frac{\theta}{2}\Big)^3 + ...\Big) \\
&= \cos\Big(\frac{\theta}{2}\Big) + i\sigma^3 \sin\Big(\frac{\theta}{2}\Big)
\end{aligned} \tag{65}$$

e ponendo $\theta = 2\pi$ otteniamo la trasformazione

$$U_3(\theta = 2\pi) = -1 \tag{66}$$

che non coincide con l'identità di $SU(2)$. La trasformazione identità si ottiene solo per $\theta = 4\pi$. Questa è la ben nota proprietà di rotazione di uno spinore. Come è noto dalla meccanica quantistica, tutte le rappresentazioni unitarie irriducibili di $SU(2)$ sono caratterizzate da un numero quantico j che può essere intero o semintero, e sono di dimensione $2j + 1$.

Nota storica: Pauli introdusse le matrici in (61) per descrivere lo spin dell' elettrone, definendo l'operatore di spin $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$, che agisce su una funzione d' onda a due componenti (spinore).

3.5 SU(3)

Gli otto generatori infinitesimi di $SU(3)$ nella rappresentazione fondamentale sono definiti tramite le matrici di Gell-Mann λ^a che formano una base di matrici hermitiane 3×3 senza traccia (generalizzano le matrici di Pauli σ^i per $SU(2)$)

$$T^a = \frac{\lambda^a}{2} \qquad a = 1, \ldots, 8 \tag{67}$$

dove

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} , \qquad \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} . \tag{68}$$

Queste matrici sono normalizzate in modo che

$$\mathrm{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab} \tag{69}$$

proprio come fatto per $SU(2)$, vedi eq. (63). Un elemento arbitrario del gruppo $SU(3)$ nella rappresentazione fondamentale è dunque descritto da matrici 3×3 della forma $U = \exp(i\theta_a \frac{\lambda^a}{2})$, dove θ_a con $a = 1, 2, .., 8$ sono gli otto parametri del gruppo. Calcolando l'algebra di Lie si possono trovare le costanti di stuttura che identificano il gruppo $SU(3)$.

Questo gruppo ha applicazioni rilevanti nelle descrizione del *colore* associato alle interazioni forti, e alla descrizione degli adroni composti dai tre *sapori* dei quark più leggeri (up, down strange) nel modello statico a quark.

3.6 Caso generale

Possiamo riassumere in modo generale per gruppi di Lie quanto esplicitato sopra negli esempi. Un gruppo di Lie è per definizione un gruppo di trasformazioni che dipendono in modo continuo da alcuni parametri. Studiando le trasformazioni infinitesime generate dal gruppo, cioè trasformazioni che differiscono di poco dall'identità, si ottiene la cosidetta algebra di Lie del gruppo, un'algebra che riassume le informazioni essenziali del gruppo. In generale un elemento $g(\theta)$ di un gruppo di Lie G (o più propriamente della parte del gruppo connessa in modo continuo all'identità) si può parametrizzare nel seguente modo

$$g(\theta) = e^{i\theta_a T^a} \in G \qquad a = 1, .., \dim G \tag{70}$$

dove i parametri θ_a sono numeri reali che parametrizzano i vari elementi del gruppo, scelti in modo tale che per $\theta_a = 0$ si ha l'identità $g = 1$. Gli operatori T^a sono i generatori del gruppo. Pensando il gruppo come ad un gruppo di matrici $N \times N$ (ad esempio nella rappresentazione definente), anche i generatori risultano essere matrici $N \times N$. Essi generano trasformazioni

infinitesime quando $\theta_a \ll 1$ (basta sviluppare in serie di Taylor la funzione esponenziale e tenere i termini di ordine più basso)

$$g = 1 + i\theta_a T^a + ... \tag{71}$$

dove 1 indica l'elemento identità del gruppo. Studiando la relazione che cattura le proprietà di composizione del gruppo con trasformazioni infinitesime (che in generale sono non commutative) si ottiene l'algebra di Lie del gruppo G

$$[T^a, T^b] = i f^{ab}{}_c T^c \ . \tag{72}$$

Le costanti $f^{ab}{}_c$ sono chiamate costanti di struttura del gruppo e caratterizzano quasi completamente il gruppo (gruppi diversi ma con la stessa algebra di Lie differiscono per la loro diversa topologia, ma localmente sono simili). È utile menzionare l'esistenza delle identità di Jacobi

$$f^{ab}{}_d f^{dc}{}_e + f^{bc}{}_d f^{da}{}_e + f^{ca}{}_d f^{db}{}_e = 0 \tag{73}$$

identità soddisfatte dalle constanti di struttura di un gruppo di Lie, che emergono come conseguenza delle identità operatoriali

$$[[T^a, T^b], T^c] + [[T^b, T^c], T^a] + [[T^c, T^a], T^b] = 0 \ . \tag{74}$$

Possono essere usate per definire la rappresentazione aggiunta $T^a_{(A)}$ dell'algebra di Lie, data dalla formula

$$(T^a_{(A)})^b{}_c = -i f^{ab}{}_c \tag{75}$$

Le identità di Jacobi permettono infatti di provare che questa è una rappresentazione (reale e di dimensioni uguali alle dimensioni del gruppo, poiché $a, b, c = 1, 2, ..., \dim G$).

Infine è utile citare la formula di Baker-Campbell-Hausdorff per il prodotto degli esponenziali di due operatori lineari A e B

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}[A,[A,B]]-\frac{1}{12}[B,[A,B]]+\cdots} \tag{76}$$

dove i puntini indicano i termini successivi, sempre esprimibili tramite commutatori. Questa formula mostra che la conoscenza dell'algebra di Lie è sufficiente per ricostruire il prodotto (in generale non-commutativo) del corrispondente gruppo di Lie.

Termina qui la parte trattata nel corso. Il resto (qui sotto e in blu) è materiale aggiuntivo opzionale.

3.6.1 Struttura di un generico gruppo di Lie

Elenchiamo alcune definizioni e proprietà generali

(i) $g = \exp(i\theta_a T^a) \in G \qquad a = 1, .., \dim G$

(ii) $[T^a, T^b] = i f^{ab}{}_c T^c$

(iii) $\mathrm{tr}\,(T^a T^b) = \frac{1}{2}\gamma^{ab}$ (nella rappresentazione fondamentale)

(iv) $[[T^a, T^b], T^c] + [[T^b, T^c], T^a] + [[T^c, T^a], T^b] = 0$

$\Rightarrow \ f^{ab}{}_d f^{dc}{}_e + f^{bc}{}_d f^{da}{}_e + f^{ca}{}_d f^{db}{}_e = 0$

(v) $f^{abc} = f^{ab}{}_d \gamma^{dc}$ tensore completamente antisimmetrico .

La (i) descrive la parametrizzazione esponenziale di un elemento arbitrario del gruppo che sia connesso all'identità. L'indice a assume tanti valori quante le dimensioni del gruppo. Un elemento del gruppo è quindi parametrizzato dai parametri θ_a con $a = 1, .., \dim G$.
La (ii) corrisponde all'algebra di Lie soddifatta dai generatori infinitesimi T^a. Le costanti $f^{ab}{}_c$ sono dette costanti di struttura e caratterizzano il gruppo G.
La (iii) identifica una metrica γ^{ab} detta "metrica di Killing". Tale metrica è definita positiva solo per gruppi di Lie compatti, come ad esempio $SU(N)$ o $SO(N)$.
Le (iv) sono le cosiddette "identità di Jacobi" che possono essere sfruttate per costruire la rappresentazione aggiunta dell'algebra di Lie e del relativo gruppo. Infatti, denotando con $(T^a_{(A)})^b{}_c$ gli elementi di matrice dei generatori della rappresentazione aggiunta $T^a_{(A)}$, si ha $(T^a_{(A)})^b{}_c = -if^{ab}{}_c$. Le identità di Jacobi permettono di provare che questa è una rappresentazione (reale e di dimensioni uguali alle dimensioni del gruppo, poiché $a, b, c = 1, 2, ..., \dim G$).
In (v) si è usata la metrica di Killing per alzare un indice nelle costanti di struttura. Le f^{abc} sono completamente antisimmetriche in tutti gli indici: questa proprietà si può dedurre prendendo la traccia delle identità di Jacobi del punto (iv) ed usando la (ii) e la (iii). L'antisimmetria negli indici a e b è ovvia per la (ii).

Infine concludiamo con l'enunciato di un teorema che non dimostremo:

Teorema: Le rappresentazioni unitarie dei gruppi compatti sono finito dimensionali.

Questo teorema si applica a gruppi compatti quali $SO(N)$ ed $SU(N)$. Invece per gruppi non compatti, quali il gruppo di Lorentz $SO(3,1)$ ed il gruppo di Poincaré $ISO(3,1)$, questo teorema non si applica, ma vale l'opposto: le rappresentazioni unitarie sono infinito dimensionali.

Per le applicazioni in teoria dei campi relativistica, è utile conoscere: *(i)* le rappresentazioni finito dimensionali del gruppo di Lorentz che non sono unitarie, ma sono usate per descrive i campi quantistici fermionici, *(ii)* le rappresentazioni unitarie del gruppo di Poincaré che sono infinito dimensionali e sono realizzate nello spazio di Hilbert della teoria di campo quantistica appunto tramite operatori unitari. Questi punti sono molto sommariamente descritti qui di seguito.

3.6.2 Rappresentazioni finito dimensionali del gruppo di Lorentz

Innanzi tutto è utile ricavarsi l'algebra di Lie del gruppo di Lorentz. Per trasformazioni infinitesime possiamo scrivere

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu \ , \qquad |\omega^\mu{}_\nu| \ll 1 \tag{77}$$

ed imponendo la condizione che definisce le trasformazioni di Lorentz ($\eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}\Lambda^\alpha{}_\mu\Lambda^\beta{}_\nu$) si ottiene che le $\omega^\mu{}_\nu$ devono soddisfare

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu} \tag{78}$$

cioè sono antisimmetriche quando si abbassano gli indici ($\omega_{\mu\nu} = \eta_{\mu\lambda}\omega^\lambda{}_\nu$). Contengono quindi 6 parametri indipendenti, che possiamo identificare con le $\omega_{\mu\nu}$ stesse ad indici $\mu < \nu$ fissati. Usando una notazione matriciale possiamo scrivere una trasformazione di Lorentz infinitesima arbitraria come

$$\Lambda = 1 + \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta} \tag{79}$$

dove le matrici Λ ed $M^{\alpha\beta} = -M^{\beta\alpha}$ hanno una struttura indiciale come in (77) che peró omettiamo per semplicità di notazione. Le sei matrici $M^{\alpha\beta}$ con $\alpha < \beta$ sono i generatori del

gruppo di Lorentz, che nella rappresentazione definente (la "quadri-vettoriale") ed in notazione esplicita sono date da

$$(M^{\alpha\beta})^{\mu}{}_{\nu} = -i(\eta^{\alpha\mu}\delta^{\beta}_{\nu} - \eta^{\beta\mu}\delta^{\alpha}_{\nu}) \tag{80}$$

Ad esempio possiamo esplicitarne alcune

$$M^{12} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad , \qquad M^{01} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & i & 0 & 0 \\ \hline i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{81}$$

Vediamo che M^{12} genera rotazioni infinitesime lungo l'asse z, mentre la M^{01} genera un boost lungo l'asse x. Sebbene possa sembrare laborioso, è facile calcolare l' algebra di Lie

$$[M^{\mu\nu}, M^{\alpha\beta}] = -i\eta^{\nu\alpha}M^{\mu\beta} + i\eta^{\mu\alpha}M^{\nu\beta} + i\eta^{\nu\beta}M^{\mu\alpha} - i\eta^{\mu\beta}M^{\nu\alpha} \tag{82}$$

Tutto questo è valido anche per il gruppo $SO(N, M)$ se si identifica $\eta_{\mu\nu}$ con la metrica corrispondente: in particolare per $SO(3)$ si ha $\eta_{\mu\nu} \to \delta_{ij}$ e ridefinendo $J^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}M^{jk}$ si riottiene la (51).

Tornando al caso esplicito di $SO(3,1)$ si può riscrivere l'algebra in una forma molto utile che ci permette subito di riconoscere quali siano le sue rappresentazioni finito-dimensionali (seppur non unitarie). Separando gli indici in parte temporale e spaziale $\mu = (0, i)$, e definendo la seguente base per i generatori del gruppo di Lorentz

$$J^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}M^{jk} \ , \qquad K^i = M^{i0} \tag{83}$$

si ha che l'algebra di Lie (82) si riscrive nella forma

$$[J^i, J^j] = i\epsilon^{ijk}J^k \qquad [J^i, K^j] = i\epsilon^{ijk}K^k \qquad [K^i, K^j] = -i\epsilon^{ijk}J^k \tag{84}$$

dove i generatori J^i generano il sottogruppo delle rotazioni spaziali $SO(3)$. Infine, definendo le combinazioni lineari complesse

$$N^i = \frac{1}{2}(J^i - iK^i) \qquad \bar{N}^i = \frac{1}{2}(J^i + iK^i) \tag{85}$$

l'algebra si riscrive come

$$[N^i, N^j] = i\epsilon^{ijk}N^k \qquad [\bar{N}^i, \bar{N}^j] = i\epsilon^{ijk}\bar{K}^k \qquad [N^i, \bar{N}^j] = 0 \tag{86}$$

che mostra come l'algebra di $SO(3,1)$ si riduca a quella di $SU(2) \times SU(2)$, a meno di relazioni di hermiticità diverse (necessarie perchè $SO(3,1)$ non è compatto, mentre $SU(2)$ lo è). Questa relazione ci dice che $SO(3,1)$ si riduce essenzialmente a due copie indipendenti di $SU(2)$, per cui utilizzando le note rappresentazioni finito dimensionali di quest'ultimo gruppo, si riconoscono subito le rappresentazioni finito dimensionali di $SO(3,1)$: queste sono classificate da due numeri interi o seminteri (j_1, j_2) corrispondenti alla rappresentazioni dei due sottogruppi $SU(2)$ generati da N^i ed $\bar{N}^i$. Inoltre, ricordando la (85) si riconosce che il vero spin della rappresentazione è dato da $j = j_1 + j_2$. Queste rappresentazioni sono finito-dimensionali, ma non sono unitarie a causa della necessità di prendere delle combinazioni complesse dei generatori in (85).

In teoria quantistica dei campi, si usano campi con queste rappresentazioni di Lorentz per descrive particelle con spin fissato, ad esempio

$$\begin{aligned}
(0,0) &\longrightarrow \text{scalare } \phi \\
(\frac{1}{2},0) &\longrightarrow \text{fermione sinistrorso } \psi_{_L} \sim \xi_a \\
(0,\frac{1}{2}) &\longrightarrow \text{fermione destrorso } \psi_{_R} \sim \eta_{\dot{a}} \\
(\frac{1}{2},0)\oplus(0,\frac{1}{2}) &\longrightarrow \text{fermione di Dirac } \psi \sim \psi_\alpha \\
(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) &\longrightarrow \text{potenziale quadrivettore per spin}-1\ A_\mu
\end{aligned} \tag{87}$$

Esattamente come per $SO(3) \to SU(2)$ permette di descrivere le rappresentazioni spinoriali come rappresentazioni ad un solo valore, ora $SO(3,1) \to SL(2,C)$ include l'estensione relativistica delle proprietà sinoriali. Infatti le algebre di Lie di $SO(3,1)$ e di $SL(2,C)$ coincidono e quest'ultimo gruppo è il ricoprimento del primo.

3.6.3 Rappresentazioni unitarie del gruppo di Poincaré

Il gruppo di Poincaré estende il gruppo di Lorentz con traslazioni spazio-temporali e trasforma il quadrivettore posizione nel seguente modo

$$x^\mu \to x^{\mu\prime} = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \tag{88}$$

dove $\Lambda^\mu{}_\nu$ descrive una trasformazione di Lorentz ed a^μ una traslazione spazio-temporale. A volte questo gruppo è indicato con il nome $ISO(3,1)$, il gruppo speciale ortogonale inomogeneo.

L'algebra di Lie del gruppo di Poincaré può essere scritta nel seguente modo

$$\begin{aligned}
[P^\mu, P^\nu] &= 0 \\
[M^{\mu\nu}, P^\lambda] &= -i\eta^{\nu\lambda}P^\mu + i\eta^{\mu\lambda}P^\nu \\
[M^{\mu\nu}, M^{\alpha\beta}] &= -i\eta^{\nu\alpha}M^{\mu\beta} + i\eta^{\mu\alpha}M^{\nu\beta} + i\eta^{\nu\beta}M^{\mu\alpha} - i\eta^{\mu\beta}M^{\nu\alpha}
\end{aligned} \tag{89}$$

Le sue rappresentazioni unitarie sono infinito dimensionali e sono state classificate da Wigner. Sono classificate dai valori dei cosiddetti operatori di Casimir $P^2 \equiv P_\mu P^\mu$ e $W^2 \equiv W_\mu W^\mu$, dove $W_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}P^\nu M^{\alpha\beta}$ è il cosiddetto vettore di Pauli-Lubanski (infatti usando le eq. (89) si vede che P^2 e W^2 commutano con tutti gli elementi dell'algebra di Poincarè, i.e. sono invarianti per trasformazioni infinitesime del gruppo di Poincarè). Le rappresentazioni unitarie sono classificate dai seguenti valori degli operatori di Casimir:

- $P^2 = -m^2 > 0$, $W^2 = m^2 s(s+1)$ con $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2...$: particelle di massa m e spin s (cioè una rappresentazione unitaria associata ad uno spazio di Hilbert che descrive gli stati di una particella relativistica di massa m e spin s).
- $P^2 = 0$, $W^2 = 0$ e con $W_\mu = \pm s P_\mu$ dove $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2...$: particelle con massa nulla e con elicità s.
- $P^2 = 0$, $W^2 = k^2 > 0$ "particelle" senza massa con infiniti stati di "polarizzazione" che variano in modo continuo: non sembrano avere applicazioni nella teoria dei campi (almeno a livello perturbativo).
- $P^2 = -m^2 < 0$: rappresentazioni tachioniche, mai utilizzate in fisica (inconsistenti con le interpretazioni fisiche usuali).

• $P_\mu = 0,\ W_\mu = 0$: rappresentazione banale (scalare) $\rightarrow$ vuoto quantistico (nessuna particella).

Ad esempio, il caso fisico delle rappresentazioni di massa m e spin s (caso con $P^2 = -m^2 > 0$ e $W^2 = m^2 s(s+1)$) sono definite su uno spazio vettoriale infinito-dimensionale: uno spazio di Hilbert generato da vettori della forma

$$|\vec{p}, s_3\rangle \ , \qquad \vec{p} \in R^3, \quad s_3 = -s, ..., +s \tag{90}$$

e su questo spazio di Hilbert infinito-dimensionale agiscono gli operatori unitari che rappresentano in modo irriducibile le trasformazioni del gruppo di Poincaré.