20.10.2016

Meccanica quantistica ed equazioni d'onda

(Appunti per il corso di Fisica Nucleare e Subnucleare 2016/17)

Fiorenzo Bastianelli

In queste brevi note introduciamo equazioni d'onda libere associate alla propagazione di particelle quantistiche.

1 Equazione di Schrödinger

Dopo l'introduzione del quanto d'azione h da parte di Planck (1900) e l'uso che ne fece Einstein (1905) nello spiegare l'effetto fotoelettrico (fotoni come quanti d'onda elettromagnetica con energia $E = h\nu$), e dopo Bohr (1913) con il suo modello atomico con livelli di energia quantizzati, rimaneva ancora da capire quali leggi fondamentali potessero organizzare quanto andava emergendo dal mondo subatomico, cioè quali fossero le vere leggi della meccanica quantistica. Un contributo importante venne da de Broglie, che nel 1923 suggerì un'estensione dell'idea di Einstein, congetturando un comportamento ondulatorio per le particelle di materia, assegnando una lunghezza d'onda $\lambda = \frac{h}{p}$ a particelle con momento $p = |\vec{p}|$. Questa visione rese interpretabile l'assunzione di Bohr di livelli energetici atomici quantizzati come i soli possibili per l'elettrone, perché corrispondono a traiettorie contenenti un numero intero di lunghezze d'onda dell'elettrone, quindi stabili per interferenza costruttiva. De Broglie si ispirò per questa sua idea alla meccanica relativistica: un campo d'onda con frequenza $\nu = \frac{1}{T}$, dove T è il periodo (periodocità temporale), e con numero d'onda $\vec{k}$, dove $|\vec{k}| = \frac{1}{\lambda}$, con λ la lunghezza d'onda (periodicità spaziale), ha la forma

$$\psi(\vec{x}, t) \sim \mathrm{e}^{2\pi i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \nu t)} \qquad \text{(fenomeno periodico)} . \tag{1}$$

(Ricordiamo la formula $\mathrm{e}^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$). Assumendo che la fase $2\pi(\vec{k}\cdot\vec{x} - \nu t)$ fosse un invariante di Lorentz, e sapendo che le coordinate spazio-temporali $(t, \vec{x})$ formano un quadrivettore, de Broglie dedusse che anche $(\nu, \vec{k})$ doveva essere un quadrivettore, e quindi trasformarsi per cambio di sistema di riferimento inerziale come i quadrivettori $(t, \vec{x})$ e $(E, \vec{p})$. Poiché nel caso dei fotoni valeva $E = h\nu$, gli risultò naturale estendere la proporzionalità ai quadrivettori $(\nu, \vec{k})$ e $(E, \vec{p})$, anche alle particelle materiali con massa non nulla, e con la stessa costante di proporzionalità h valida per i fotoni

$$(E, \vec{p}) = h(\nu, \vec{k}) \quad \to \quad E = h\nu \ , \quad \vec{p} = h\vec{k} \qquad \text{(relazioni di Einstein} - \text{de Broglie)}. \tag{2}$$

Questa relazione porta ad associare una lunghezza d'onda $\lambda = \frac{h}{|\vec{p}|}$ alle particelle di materia con momento $\vec{p}$. Quindi l'onda associata a particelle materiali libere con momento $\vec{p}$ ed energia E assume la forma

$$\psi(\vec{x}, t) \sim \mathrm{e}^{2\pi i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \nu t)} = \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{h}(\vec{p}\cdot\vec{x} - Et)} = \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x} - Et)} \qquad \text{(onde di materia)} . \tag{3}$$

Questa fu la proposta di de Broglie.

A questo punto Schrödinger si chiese: che tipo di equazione soddisfa tale funzione? Iniziò direttamente con il caso relativistico, ma siccome non gli fu possibile riprodurre alcuni risultati sperimentali per l'atomo d'idrogeno, si accontentò del limite non-relativistico che sembrava funzionare meglio (infatti oggi sappiamo che alcune correzioni relativistiche sono parzialmente compensate da effetti dovuti allo spin dell'elettrone, di cui non si teneva conto). Per una particella libera non-relativistica vale

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$$

ed è immediato verificare che la funzione d'onda (3) soddisfa

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x},t) = E\psi(\vec{x},t) = \frac{\vec{p}^2}{2m}\psi(\vec{x},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\vec{x},t)$$

e quindi soddisfa all'equazione

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\vec{x},t)\ . \tag{4}$$

chiamata equazione di Schrödinger. In questo modo Schrödinger identificò l'equazione fondamentale della meccanica quantistica. Seppur dedotta per una particella non-relativistica puntiforme e libera, scritta nella forma

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi \tag{5}$$

dove H è l'operatore hamiltoniano, operatore differenziale derivabile dalla hamiltoniana classica, l'equazione di Schrödinger è congetturata avere una validità universale per la descrizione dei sistemi quantistici.

Dunque il trucco per ottenere una equazione d'onda dal modello classico di particella puntiforme è il seguente:

- considerare la relazione classica tra energia ed impulso $E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$
- sostituire $E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ e $\vec{p} \to -i\hbar\vec{\nabla}$
- interpretare questi operatori differenziali come agenti su una funzione d'onda ψ:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\vec{x},t)\ .$$

Naturalmente Schrödinger estese queste sue considerazioni ad una particella carica (l'elettrone) immersa nel campo coulombiano di un nucleo, per riprodurre il modello atomico di Bohr e calcolarne analiticamente varie proprietà, in particolare lo spettro energetico quantizzato, che confrontò con le misure sperimentali ottenendo un notevole successo.

Principio di indeterminazione.

Dall'analogia con le onde luminose, dove l'intensità è proporzionale al modulo quadro dell'ampiezza, si intuì presto che la densità di probabilità $\rho(\vec{x},t)$ di trovare la particella in un punto $\vec{x}$ al tempo t doveva essere collegata al modulo quadro della funzione d'onda $|\psi(\vec{x},t)|^2$. In particolare, la funzione d'onda deve essere normalizzata opportunamente ($\int d^3x\,|\psi(\vec{x},t)|^2 = 1$) affiché la somma di tutte le probabilità parziali di trovare la particella da qualche parte sia 1.

Un' onda perfettamente sinusoidale come $\psi(\vec{x},t) = \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x}-Et)}$ è estesa su tutto lo spazio tempo ($|\psi(\vec{x},t)|^2 = 1$) e non è normalizzabile ($\int d^3x\,|\psi(\vec{x},t)|^2 = \infty$): infatti per tale onda il

momento è noto esattamente ad ogni istante di tempo (vale $\vec{p}$), ma non lo è la posizione della particella, che infatti potrebbe trovarsi ovunque nello spazio. Per localizzare la particella si possono sommare varie frequenze, o meglio vari numeri d'onda $\vec{k}$. In termini del momento $\vec{p}$ questo si traduce in un integrale della forma

$$\psi(\vec{x},t) \sim \sum_{\vec{p}} \phi(\vec{p})\, \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x}-Et)} \sim \int d^3p\; \phi(\vec{p})\, \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x}-Et)} \tag{6}$$

dove $\phi(\vec{p})$ indica i coefficienti di Fourier dell'onda piana con momento $\vec{p}$. Scegliendo opportunamente i coefficienti di Fourier è ora possibile normalizzare la funzione d'onda correttamente.

Come conseguenza matematica della trasformata di Fourier si può dedurre che l'incertezza sulla posizione $\Delta\vec{x}$, codificata in $|\psi(\vec{x},t)|^2$, moltiplicata per l'incertezza sul valore del momento $\Delta\vec{p}$, codificata in $|\phi(\vec{p})|^2$, deve essere necessariamente maggiore di una quantità minima proporzionale ad $\hbar$:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}\,, \qquad \Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}\,, \qquad \Delta z \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2}\,. \tag{7}$$

Queste disuguaglianze sono note come "principio d'indeterminazione" di Heisenberg.

Strettamente collegate al principio di indeterminazione sono le regole di commutazione che emergono tra le variabili dinamiche: ad esempio se $p_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ è da considerarsi come un operatore differenziale, si ha che

$$[x, p_x] = i\hbar\,. \tag{8}$$

Similmente per le altre coordinate

$$[y, p_y] = i\hbar\,, \qquad [z, p_z] = i\hbar\,, \tag{9}$$

Tipicamente questi operatori sono indicati aggiungendo un cappello $\hat{}$ per differenziarli dalle espressioni classiche ($\hat{x} = x$, $\hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$, etc.) e sono riassunte nel commutatore

$$[\hat{x}^i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta^i_j\,. \tag{10}$$

Si dice che questo commutatore descrive le relazioni di quantizzazione canonica.

Similmente si ha un principio d'indeterminazione tra tempo ed energia

$$\Delta t \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}\,. \tag{11}$$

Conservazione della probabilità.

Se una particella non-relativistica è descritta dalla funzione d'onda normalizzabile $\psi(\vec{x},t)$ (N.B. l'onda piana non è normalizzabile, per cui occorre considerare pacchetti d'onda, come descritto sopra), allora si può interpretare la grandezza $\rho(\vec{x},t) = |\psi(\vec{x},t)|^2$ come densità di probabilità di trovare la particella nel punto $\vec{x}$ al tempo t. In particolare, si può provare che ρ soddisfa una equazione di continuità

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0 \tag{12}$$

con una opportuna corrente $\vec{J}$. Questo equivale alla conservazione della probabilità di trovare la particella da qualche parte ad ogni instante di tempo. In particolare la particella non-relativistica non può essere creata ne distrutta. È consistente assumere questa proprietà per particelle non relativistiche. Consideriamo infatti il limite non-relativistico di una particella

relativistica, formalmente ottenuto mandando $c \to \infty$ (velocità limite di propagazione delle interazioni tendente all'infinito, fisicamente equivalente a considerare velocità v molto piccole rispetto a c): infatti dalla formula relativistica dell'energia si ottiene

$$E = \sqrt{\vec{p}^2c^2 + m^2c^4} = mc^2\sqrt{1 + \frac{\vec{p}^2}{m^2c^2}} \quad \Longrightarrow \quad mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m} + \cdots \tag{13}$$

da cui si vede che per $c \to \infty$ occorrerebbe un'energia infinita per creare una particella di massa m ($E = mc^2 \to \infty$). Quindi è consistente assumere che particelle non relativistiche non spariscano, ed è consistente normalizzare la loro funzione d'onda affinchè la probabilità di trovarla da qualche parte nello spazio valga 1.

Poichè la velocità della luce c è in realtà finita, è possibile che interazioni relativistiche permettano la creazione e la distruzione di particelle, come in effetti avviene.

2 Equazioni d'onda relativistiche

2.1 Equazione di Klein-Gordon

Come ottenere una equazione d'onda relativistica? Un' idea semplice è quella di usare la corretta relazione relativistica tra energia ed impulso. Infatti sappiamo che

$$p_\mu p^\mu = -m^2c^2 \qquad \Longrightarrow \qquad -\frac{E^2}{c^2} + \vec{p}^2 = -m^2c^2 \qquad \Longrightarrow \qquad E^2 = \vec{p}^2c^2 + m^2c^4 \ . \tag{14}$$

Quindi si potrebbe usare $E = \sqrt{\vec{p}^2c^2 + m^2c^4}$, ma l'equazione che emerge con le sostituzioni $E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ e $\vec{p} \to -i\hbar\vec{\nabla}$ produce un'equazione complicatissima di difficile interpretazione, contente una radice quadrata di operatori differenziali

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi(\vec{x},t) = \sqrt{-\hbar^2c^2\nabla^2 + m^2c^4}\ \phi(\vec{x},t) \ . \tag{15}$$

Klein e Gordon proposero una equazione più semplice considerando la relazione quadratica tra energia ed impulso, che ha il pregio di non contenere nessuna radice quadrata. Partendo da $E^2 = \vec{p}^2c^2 + m^2c^4$, ed usando $E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ e $\vec{p} \to -i\hbar\vec{\nabla}$, ottennero l'equazione

$$\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\phi(\vec{x},t) = 0 \tag{16}$$

conosciuta oggi come equazione di Klein-Gordon. In notazioni relativistiche si può scrivere come

$$(\partial_\mu\partial^\mu - \mu^2)\phi(x) = 0 \ , \qquad \mu \equiv \frac{mc}{\hbar} \ . \qquad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{17}$$

ed anche come

$$(\Box - \mu^2)\phi(x) = 0 \tag{18}$$

dove $\Box \equiv \partial_\mu\partial^\mu = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2$ indica l'operatore di d'Alembert (il d'alembertiano). Secondo Dirac, Schrödinger considerò questa equazione ancor prima di dedurre la sua equazione, ma insoddisfatto dei risultati che sembrava produrre per l'atomo d'idrogeno, si accontentò del suo limite non relativistico. Quando piú tardi si decise a pubblicarla, era già stato preceduto da Klein e Gordon.

Soluzioni dell'eq. di Klein-Gordon. Naturalmente, ovvie soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon sono le soluzioni di onda piana

$$\phi(x) = \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x}-Et)} \,, \qquad \text{con} \quad E = \sqrt{\vec{p}^2c^2 + m^2c^4} \,, \tag{19}$$

che possono essere collegate a particelle scalari (cioè con spin $s = 0$) di massa m. Ma esiste anche un'altra classe di soluzioni, quelle con energie negative $E = -\sqrt{\vec{p}^2c^2 + m^2c^4}$. Come interpretarle fisicamente? Queste segnalano l'esistenza di "antiparticelle", particelle con stessa massa e spin, ma con tutte le altre possibili cariche interne, come la carica elettrica, di segno opposto. Questa interpretazione, originariamente proposta da Dirac per le soluzioni della sua equazione (l'equazione di Dirac che descrive particelle relativistiche di massa m e spin $s = \frac{1}{2}$), è necessaria per tutte le equazioni d'onda relativistiche, ed è giustificabile rigorosamente all'interno della teoria quantistica dei campi (conosciuta anche come "seconda quantizzazione": in tale trattazione le equazioni d'onda come quella sopra descritta, sono dapprima considerate come equazioni di campo classiche e poi quantizzate opportunamente. In tale modo il campo d'onda quantizzato permette di descrivere un numero arbitrario di particelle (o antiparticelle) identiche e trattare processi in cui il numero di particelle totali varia a causa di processi di creazione o annichilazione di particelle).

Una soluzione generale del campo di Klein-Gordon libero può essere visto come una combinazione lineare (nel senso di Fourier) di soluzioni di onda piana con energie sia positive che negative. Ad esempio, se il campo di Klein Gordon è un campo d'onda complesso, la soluzione generale assume la forma (in unità dove vale $\hbar = c = 1$)

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sum_{\vec{p}} \left(a(\vec{p})\, e^{-iE_p t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} + b^*(\vec{p})\, e^{iE_p t - i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) \\ \phi^*(x) &= \sum_{\vec{p}} \left(b(\vec{p})\, e^{-iE_p t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a^*(\vec{p})\, e^{iE_p t - i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) \end{aligned} \tag{20}$$

dove $E_p = \sqrt{\vec{p}^2c^2 + m^2c^4}$ mentre $a(\vec{p})$ e $b(\vec{p})$ sono coefficienti di Fourier arbitrari. In una interpretazione di seconda quantizzazione (che non tratteremo in questa sede) i coefficienti di Fourier $a(\vec{p})$ ed $a^*(\vec{p})$ sono associati alla distruzione ed alla creazione di particelle, mentre i coefficienti di Fourier $b(\vec{p})$ ed $b^*(\vec{p})$ alla distruzione ed alla creazione di antiparticelle. Il simbolo $\sum_{\vec{p}}$ indica la somma sulle soluzioni indipendenti indicizzate da $\vec{p} \in R^3$ e, poichè queste formano un continuo, la somma è da intendersi come integrale $\sum_{\vec{p}} \sim \int d^3p$ la cui normalizzazione è una scelta convenzionale (spesso si sceglie $\sum_{\vec{p}} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p}$ che rende i coefficient di Fourier scalari di Lorentz).

Per un campo reale ($\phi^* = \phi$) particelle ed antiparticelle coincidono, infatti in questo caso i coefficienti di Fourier sono collegati $a(\vec{p}) = b(\vec{p})$.

Potenziale di Yukawa. Consideriamo l'equazione con sorgente esterna

$$(\Box - \mu^2)\phi(x) = J(x) \tag{21}$$

con $J(x) = g\delta^{(3)}(\vec{x})$ che descrive una sorgente statica puntiforme localizzata nell'orgine delle coordinate spaziali (con $\delta^{(3)}(\vec{x})$ si indica la funzione delta di Dirac). Se consideriamo una soluzione statica, indipendente dal tempo, allora l'equazione si semplifica e diventa

$$(\nabla^2 - \mu^2)\phi(\vec{x}) = g\delta^{(3)}(\vec{x}) \tag{22}$$

Per $\mu = 0$ riconosciamo l'equazione di Poisson dell'elettrostatica, con soluzione il potenziale coulombiano

$$\phi(\vec{x}) = -\frac{g}{4\pi}\frac{1}{r} \ . \tag{23}$$

Per $\mu \neq 0$ la soluzione può essere calcolata usando la trasformata di Fourier che genera il potenziale di Yukawa

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{(-g)}{\vec{p}^2+\mu^2}\mathrm{e}^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} = -\frac{g}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\mu r}}{r} \ . \tag{24}$$

Anche se non si conoscono le tecniche della trasformata di Fourier è possibile verificare che queste soluzioni soddisfano le rispettive equazioni per $r \neq 0$, basta usare il laplaciano scritto in coordinate sferiche ($\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\partial_r r^2 \partial_r +$ *derivate sugli angoli*). Inoltre il comportamento singolare ad $r = 0$ è collegato all'intensità della carica puntiforme, come noto nel caso coulombiano (infatti attorno ad $r = 0$ si può approssimare l'esponenziale con 1).

Azione libera e propagatore.

L'equazione di Klein-Gordon può essere derivata da un semplice principio d'azione. Usiamo unità di misura naturali per cui $\hbar = c = 1$, e quindi $\mu = m$. Per un campo scalare reale $\phi^* = \phi$, l'azione è data da

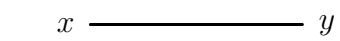
$$S[\phi] = \int d^4x \Big(-\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2\Big) \tag{25}$$

e richiedendo la condizione di mimimo $\delta S = 0$ sotto variazioni arbitrarie $\delta\phi(x)$ si ottiene l'equazione di Klein-Gordon (come equazione di Eulero-Lagrange)

$$(\Box - m^2)\phi(x) = 0 \ . \tag{26}$$

Equazioni del moto libere e relativa azione descrivono la propagazione libera del campo d'onda o, equivalentemente, delle particelle associate, i quanti del campo.

Nella teoria quantistica è utile considerare il "propagatore", che essenzialmente corrisponde alla funzione di Green $G(x-y)$ associata all'equazione di Klein-Gordon, e descrive matematicamente la propagazione di una particella dal punto dello spazio-tempo x al punto dello spazio-tempo y, o viceversa, ed indicato graficamente dal diagramma di Feynman



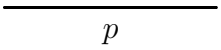
La funzione di Green ell'equazione di Klein-Gordon corrisponde alla soluzione dell'equazione di Klein-Gordon in presenza di una sorgente puntiforme ed istantanea di intensità unitaria. In formule

$$(-\Box_x + m^2)G(x-y) = \delta^4(x-y) \ . \tag{27}$$

In trasformata di Fourier la soluzione si scrive come

$$G(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{ip_\mu(x^\mu - y^\mu)}}{p^2+m^2-i\epsilon} \tag{28}$$

dove $p^2 = p_\mu p^\mu$, e dove $\epsilon \to 0^+$ è un parametro infinitesimo positivo che implementa opportune condizioni al contorno (prescrizione causale di Feynman), che permette di interpretare le soluzioni con energia negativa come dovute ad antiparticelle con energia positiva: il propagatore descrive propagazione (in avanti nel tempo) di particelle ed antiparticelle con le corrette energie positive. Inoltre, in una interpretazione particellare, il propagatore descrive sia la propagazione di "particelle reali" sia gli effetti interpretabili come dovuti alle "particelle virtuali". Il propagatore è spesso descritto con la sua trasformata di Fourier, $\frac{1}{p^2+m^2}$, ed indicato con il seguente diagramma di Feynman



p

dove p indica il quadrimomento trasportato della particella che scorre lungo la linea.

Possiamo anche dire che il propagatore propaga gli effetti di una sorgente arbitraria $J(x)$ di onde di Klein-Gordon

$$(\Box - m^2)\phi(x) = J(x) \tag{29}$$

da un punto dello spazio-tempo ad un'altro, generando la soluzione di (29) come

$$\phi(x) = \phi_0(x) + \int d^4y \; G(x-y)J(y) \; . \tag{30}$$

dove $\phi_0(x)$ è una soluzione dell'equazione omogenea associata. Questo si verifica facilmente inserendo (30) in (29) ed usando la proprietà (27).

Vediamo di intuire un po' meglio il motivo che ha indotto i fisici ad introdurre il concetto di particelle reali e virtuali. In matematica è noto il teorema di Riemann-Lebesgue che afferma che se $\int_{-\infty}^{\infty} dp|f(p)|$ converge, allora

$$\lim_{x\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dp \, f(p) \, e^{\pm ipx} = 0 \; .$$

Guardando il propagatore (28), si intuisce che per distanze $x - y$ molto grandi ($|x - y| \to \infty$) non si propaga nessun segnale associato a particelle a meno che il momento della particella non soddisfi $p^2 + m^2 = 0$ (in tal caso c'è un polo ed il teorema di Riemann-Lebesgue non è applicabile): queste sono le particelle reali. Gli effetti di particelle con $p^2 + m^2 \neq 0$ sono invece attribuite a particelle virtuali: i loro effetti non possono propagarsi su distanze macroscopiche (si dice che sono nascoste dal principio di indeterminazione e non sono rivelabili sperimentalmente come particelle fisiche).

2.2 Altre equazioni d'onda

L'equazione di Klein-Gordon è un'equazione relativistica che descrive particelle scalari, cioè con spin $s = 0$, ma poiché tiene conto della corretta relazione relativistica tra energia ed impulso contiene l'essenza di tutte le equazioni relativistiche (come l'apparente presenza di soluzioni con energie negative, da reinterpretare come antiparticelle con energia positiva). Le equazioni d'onda corrette per descrivere particelle con spin s dipende dal valore dello spin e sono conosciute come segue:

spin 0 $\rightarrow$ equazione di Klein-Gordon
spin $\frac{1}{2}$ $\rightarrow$ equazione di Dirac
spin 1 senza massa $\rightarrow$ equazioni (libere) di Maxwell
spin 1 massiva $\rightarrow$ equazioni di Proca
spin $\frac{3}{2}$ $\rightarrow$ equazione di Rarita-Schwinger
spin 2 $\rightarrow$ equazioni di Pauli-Fierz (equazioni di Einstein linearizzate).

In generale particelle relativistiche sono classificate da massa m e spin s, dove il valore dello spin indica che ci sono in generale $2s+1$ componenti fisiche indipendenti della funzione d'onda, a meno che $m = 0$, nel qual caso esistono solo due componenti fisiche (collegate all'elicità, definita come proiezione dello spin lungo la direzione del moto).

3 Interazioni e diagrammi di Feynman

Le azioni libere dei campi d'onda associati alle varie particelle (il campo dell'elettrone ψ descrive tutti gli elettroni ed i positroni, il campo del potenziale elettromagnetico A_μ descrive tutti i fotoni, etc.) generano le equazioni d'onda libere e descrivono la propagazione dei rispettivi quanti. Le interazioni possono essere introdotte aggiungendo dei potenziali d'interazione all'azione, che così producono termini non lineari nelle equazioni d'onda. Questi potenziali contengono i vertici elementari delle varie interazioni. A tali vertici sono associate costanti d'accoppiamento che parametrizzano l'intensità della interazione.

3.1 Esempi illustrativi

Consideriamo a scopo illustrativo alcuni semplici modelli teorici con particelle scalari. La propagazione libera di particelle scalari scariche (in tal caso particelle e antiparticelle coincidono) è descritta dal propagatore

che è collegato all'equazione di Klein-Gordon lineare $(-\Box + m^2)\phi(x) = 0$, o equivalentemente alla corrispondente lagrangiana in (25), quadratica nei campi d'onda di Klein-Gordon

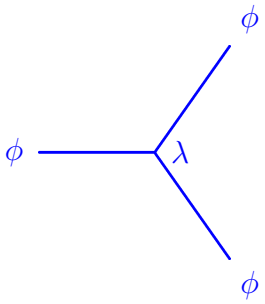
$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2 \tag{31}$$

Quello che qui ci interessa sottolineare è solo il fatto che la propagazione libera è descritta da termini quadratici nella lagrangiana.

Le interazioni emergono come termini di ordine superiore nella lagrangiana, termini che producono modifiche non-lineari alle equazioni d'onda. Ad esempio un termine cubico nel potenziale d'interazione, che compare nella lagrangiana come

$$\mathcal{L}_{int} = -\mathcal{V}_{int} = -\frac{\lambda}{3!}\phi^3 \tag{32}$$

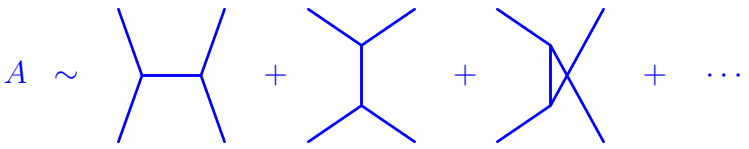
produce termini non-lineari nell'equazione del moto del campo d'onda. Tenendo conto del duplice ruolo di un campo nel descrivere la creazione o la distruzione di particelle, possiamo visualizzare graficamente questo potenziale con il seguente diagramma di Feynman



La costante d'accoppiamento λ, se sufficientemente piccola, può essere trattata perturbativamente.

Siccome il campo d'onda può descrivere sia la creazione che la distruzione di particelle, una particella uscente dal vertice può essere scambiata con una antiparticella entrante, o viceversa (nel presente caso particelle ed antiparticelle coincidono). Tutte le varie possibilità sono ammesse come vertice di interazione.

Ampiezze di scattering possono essere ottenute collegando stati iniziali agli stati finali di un determinato processo di diffusione usando *propagatori* e *vertici* in tutti i modi possibili. Ad esempio, lo scattering di due particelle (i quanti del campo ϕ) in due particelle è descritto da un'ampiezza di probabilità che può essere visualizzata dai seguenti grafici di Feynman



$$= a_2\lambda^2 + \cdots \tag{33}$$

ed a cui è associata una probabilità

$$P \sim |A|^2 = p_4\lambda^4 + \cdots \tag{34}$$

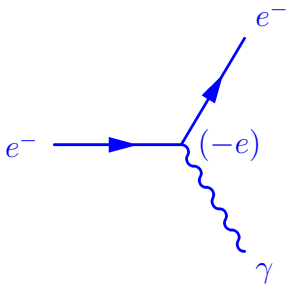
dove i puntini indicano termini successivi di ordine superiore nella costante d'accoppiamento λ.

3.2 Interazioni nel Modello Standard

Nel modello standard ci sono potenziali d'interazione che possono essere visualizzati nel seguente modo.

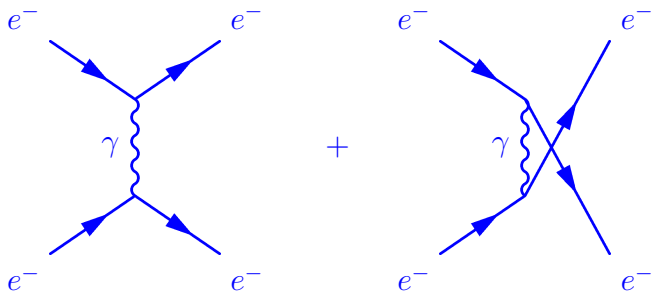
3.2.1 QED

L'interazione tra fotoni ed elettroni (QED) è descritta dal vertice

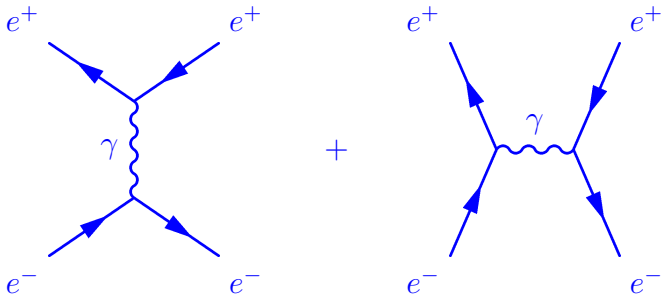


dove $-e$ è la carica dell'elettrone che rappresenta la costante d'accoppiamento associata al vertice. Da questo vertice, ad esempio, si possono intuire i seguenti processi:

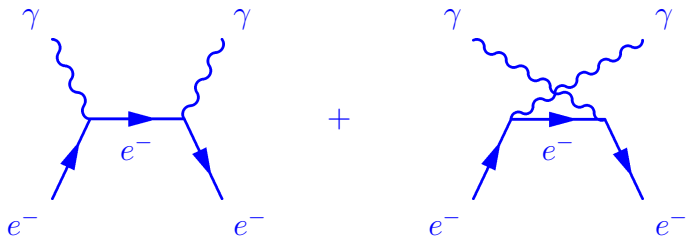
Scattering elettrone-elettrone $e^- + e^- \to e^- + e^-$ (Möller scattering)



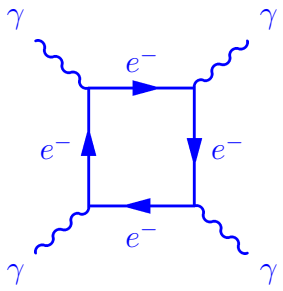
Scattering elettrone-positrone (Bhabha scattering) $e^- + e^+ \to e^- + e^+$



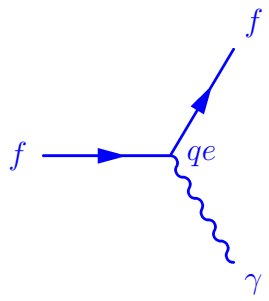
Scattering elettrone-fotone (Compton scattering) $e^- + \gamma \to e^- + \gamma$



Anche lo scattering fotone-fotone è possibile: il primo termine perturbativo è dato da

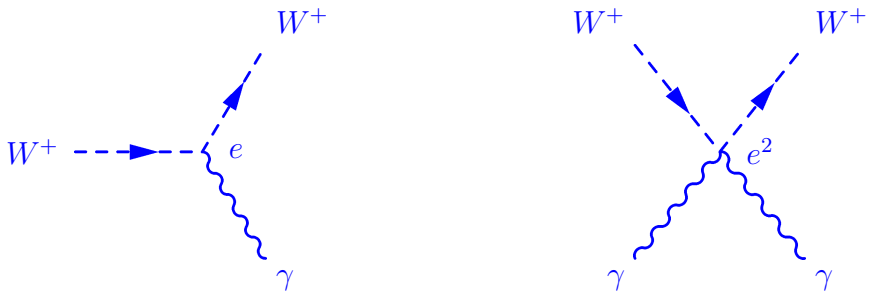


In generale, per ogni fermione f del modello standard l'interazione elettromagnetica è descritta da un vertice elementare della forma



dove $e > 0$ rappresenta la costante d'accoppiamento ($e \sim \sqrt{\alpha}$ con $\alpha \sim \frac{1}{137}$ costante di struttura fine) e q il valore della carica della particella in termini della carica elementare e.

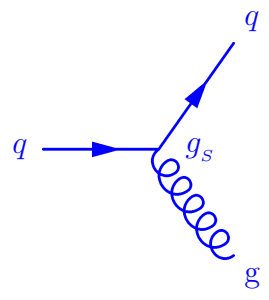
Oltre a questi fermioni, esiste un'altra particella del modello standard con carica elettrica, il bosone W^+ (e la corrispondente antiparticella W^-) mediatore delle interazioni deboli. A causa della sua carica elettrica, anche questa particella subisce interazioni elettromagnetiche. In questo caso esistono due vertici elementari, un vertice cubico (3 particelle create o distrutte nel vertice) ed un vertice quartico (4 particelle create o distrutte nel vertice)



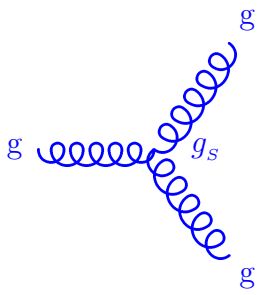
Si noti che il primo vertice porta una costante d'accoppiamento e, mentre il secondo vertice porta una costante d'accoppiamento e^2.

3.2.2 QCD

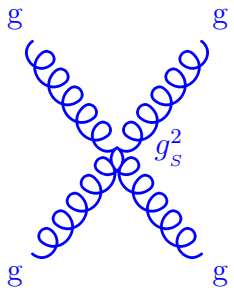
I vertici fondamentali della QCQ descrivono l'interazione quark-quark-gluone (dove i quark sono dello stesso sapore, ma variano il colore in modo tale che, tenendo conto del colore del gluone, il colore totale sia conservato)



l'interazione a tre gluoni



e l'interazione a quattro gluoni



La costante d'accoppiamento delle interazioni forti è indicata con g_s. Si noti come nel vertice a 4 gluoni compaia un fattore g_s^2. Tutte le interazioni forti sono descritte dalla sola costante d'accoppiamento g_s.

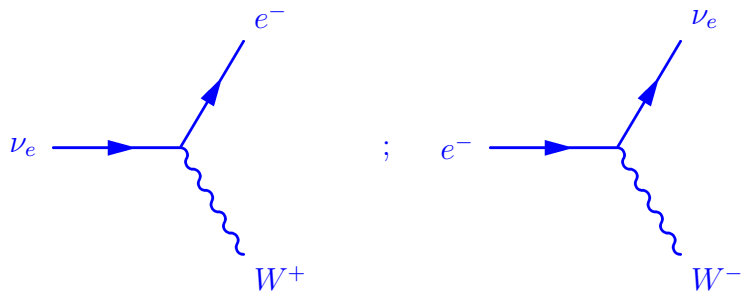
3.3 Interazioni deboli

Le interazioni deboli sono mediate dai bosoni carichi W^+ e W^-, mediatori delle *interazioni deboli cariche*, e del bosone Z_0 che media le *interazioni deboli neutre*. Sono massivi così da spiegare l'effettivo corto raggio d'azione di tali forze.

I vertici fondamentali che accoppiano i bosoni W^+ e W^- ai fermioni del modello standard possono essere descritti nel seguente modo. I fermioni del modello standard sono raggruppati nei seguenti doppietti di isospin debole (doppietti di $SU(2)$)

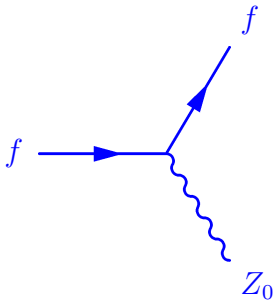
$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix} .$$

In ciascun doppietto la particella posizionata in alto si può trasformare in quella corrispondente posizionata in basso con l'emissione di un W^+, e similmente una particella posizionata in basso si può trasformare nella particella corrispondente posizionata in alto con l'emissione di un W^-. Naturalmente, in ciascun vertice ciascuna particella entrante (uscente) può essere sostitutita dalla corrispondente antiparticella uscente (entrante). Ad esempio per il primo doppietto $\binom{\nu_e}{e}$, si ha



Nel settore dei quark, i bosoni $W^{\pm}$ si accoppiano direttamente agli autostati di interazione debole (d', s', b') che sono collegati agli autostati di massa (d, s, b) da un matrice unitaria detta matrice CKM (Cabibbo-Kobayashi-Maskawa). Questa distinzione può essere ignorata per gli scopi di questa introduzione preliminare.

Per quanto riguarda le interazioni deboli neutre, ogni fermione può emettere un bosone Z_0 rimanendo una particella della stessa natura

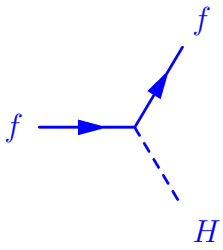


Si noti quindi che le interazioni con lo Z_0 non cambiano il sapore del leptone con cui interagiscono (le particelle che emettono lo Z_0 rimangono particelle della stessa natura, con gli stessi numeri quantici di sapore). Anche le interazioni deboli hanno una loro costante d'accoppiamento adimensionale, solitamente indicata con g, che risulta essere dello stesso ordine di grandezza delle costante d'accoppiamento elettromagnetica.

Ci sono inoltre vertici di autointerazione anche tra i bosoni mediatori della forza elettrodebole: γ, $W^{\pm}$ e Z_0. Esistono vertici cubici della forma γW^+W^- e $Z_0W^+W^-$, e vertici quartici della forma $\gamma\gamma W^+W^-$, $Z_0Z_0W^+W^-$, $\gamma Z_0W^+W^-$ e $W^+W^+W^-W^-$. La struttura precisa di questi vertici è dettata dalla simmetria di gauge non-abeliana $SU(2) \times U(1)$.

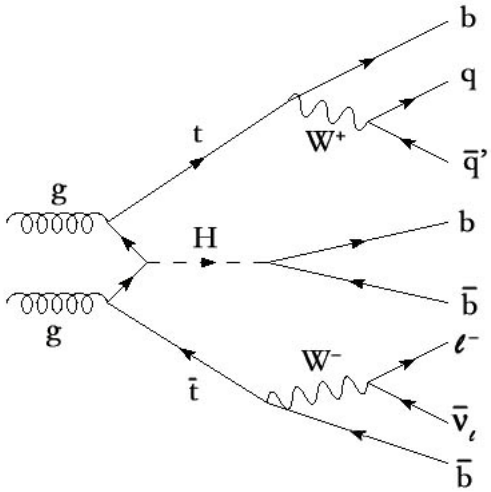
3.4 Interazioni con il bosone di Higgs

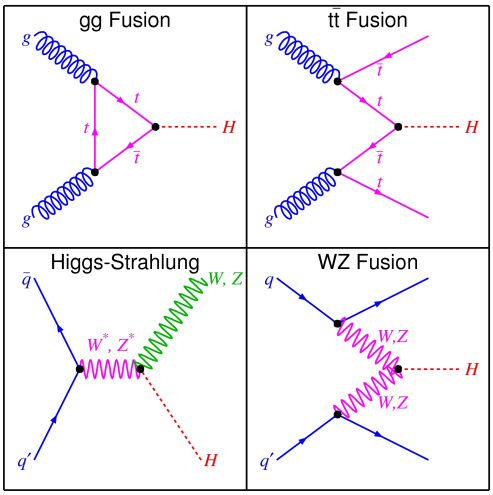
Il meccanismo di Higgs, responsabile della rottura spontanea della simmetria di gauge $SU(2) \times U(1)$, congetturato per permettere una comprensione soddisfacente dell'esistenza delle masse elementari associate alle varie particelle del modello standard, prevede l'esistenza di una particella scalare neutra, detta bosone di Higgs. Con una certa semplificazione si può dire che fermioni del modello standard interagiscono con il bosone di Higgs tramite vertici cubici (detti vertici di Yukawa)



con una costante d'accoppiamento proporzionale alla massa del fermione.

Il quark top, il fermione più massivo, è quindi quello che interagisce più fortemente con la particella di Higgs. Un esempio di processo studiato per la ricerca dell'Higgs è descritto dal seguente digramma di Feynman



dove due gluoni creano coppie top–antitop con la successiva fusione di un top ed un antitop in un Higgs. Il bosone di Higgs e i quark top decadono poi in particelle più leggere.

Anche le particelle massive di spin 1 ($W^{\pm}$ e Z_0) interagiscono con il bosone di Higgs. Questo avviene tramite vertici cubici e quartici, e quindi anche le loro interazioni possono partecipare alla produzione di particelle di Higgs. Alcuni esempi sono riassunti nei diagrammi seguenti, che descrivono processi per la produzione del bosone di Higgs: