26.10.2016

Momento angolare in Meccanica Quantistica

(Appunti per il corso di Fisica Nucleare e Subnucleare 2017/18)

Fiorenzo Bastianelli

Per applicazioni successive (ad esempio nella discussione sullo spin dei nuclei) occorre anticipare alcune cose sul momento angolare in meccanica quantistica, in particolare sulla sua quantizzazione e sulle regole di somma.

Nella deduzione dell'equazione di Schroedinger, abbiamo visto come grandezze classiche siano associate ad operatori. Questo è un fatto generale nella formulazione della meccanica quantistica: *quantità classiche* (quali posizione, momento, energia, momento angolare) diventano *operatori lineari*. Questi operatori agiscono sullo spazio vettoriale di Hilbert delle funzioni d'onda (le funzioni d'onda sono interpretate come vettori di uno spazio infinito dimensionale). Inoltre i possibili autovalori di questi operatori danno il risultato della misura della grandezza fisica corrispondente, nel caso questa possa essere conosciuta esattamente: infatti se il sistema è descritto da un autofunzione (autostato) dell'operatore, allora la misura della grandezza fisica corrispondente assumerà esattamente il valore corrispondente all'autovalore. Se invece il sistema è descritto da una combinazione lineare di questi autostati, allora la grandezza fisica non avrà un valore ben definito, ma si ha solo il concetto di valore medio.

Ad esempio, abbiamo visto nella deduzione dell'equazione di Schrödinger che posizione x e momento p_x diventano operatori, indicati rispettivamente con $\hat{x}$ ed $\hat{p}_x$. Questi agiscono sulla funzione d'onda producendo una nuova funzione d'onda

$$
\begin{aligned}
x \;&\to\; \hat{x} = x \quad \text{(operatore moltiplicativo)}: && \hat{x}\,\psi(x) = x\,\psi(x) \\
p_x \;&\to\; \hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \quad \text{(operatore differenziale)}: && \hat{p}_x\,\psi(x) = -i\hbar\frac{\partial\psi(x)}{\partial x}
\end{aligned}
$$

Si può verificare che le onde piane

$$
\psi_p(x) = e^{\frac{i}{\hbar}ipx} \qquad \text{con} \;\; p \in R \tag{1}
$$

sono autostati di $\hat{p}_x$

$$
\hat{p}_x \; e^{\frac{i}{\hbar}px} = p \; e^{\frac{i}{\hbar}px} \; . \tag{2}
$$

In questo caso particolare, gli autostati del momento (le onde piane $e^{\frac{i}{\hbar}px}$) non sono funzioni d'onda normalizzabili, ed in questa situazione (ed in situazioni simili) si introducono pacchetti d'onda normalizzabili, con una incertezza sul momento Δp_x, che soddisferà le relazioni di indeterminazione di Heisenberg $\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$.

Schrödinger, studando il problema agli autovalori per una particella (l'elettrone) nel potenziale coulombiano del protone, ottenne la quantizzazione dei livelli energetici dell'atomo d'idrogeno congetturata da Bohr

$$
\hat{H}\psi(\vec{x}) = E\psi(\vec{x}) \qquad \to \qquad E_n = -\frac{mc^2\alpha^2}{2n^2}, \qquad n = 1, 2, ..\infty \tag{3}
$$

dove l'operatore hamiltoniano ha la forma

$$
\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\hat{r}} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi r} \; . \tag{4}
$$

ed $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \sim \frac{1}{137}$ è la costante di strutture fine. Le corrispondenti autofunzioni $\psi_{nlm}(x)$ dipendono da tre numeri quantici, n, l, ad m con degenerazione in l ed m, corrispondenti infatti ad autostati del momenti angolare.

1 Momento angolare

Il momento angolare è classicamente definito da

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{5}$$

cosicché quantisticamente si ha l'operatore

$$\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}} = -i\hbar\, \vec{r} \times \vec{\nabla} \; . \tag{6}$$

In componenti,

$$\begin{aligned}
\hat{L}_x &= \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y = -i\hbar \left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y} \right) \\
\hat{L}_y &= \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z = -i\hbar \left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z} \right) \\
\hat{L}_z &= \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x = -i\hbar \left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \right) \; .
\end{aligned} \tag{7}$$

Si può vedere con un calcolo diretto che questi operatori non commutano, ma soddisfano leggi di commutazione che riproducono l'algebra di Lie di SO(3)

$$[\hat{L}^i, \hat{L}^j] = i\hbar\epsilon^{ijk}\hat{L}^k \; . \tag{8}$$

Questo ci dice che abbiamo una rappresentazione dell'algebra di Lie delle rotazioni in termini di operatori che agiscono sullo spazio di Hilbert della particella quantistica: la rappresentazione è data proprio dalla formula in (6). Questa rappresentazione è riducibile. Inoltre si ha che

$$[\hat{L}^i, \hat{\vec{L}}^2] = 0 \; . \tag{9}$$

Operatori che commutano possono essere misurati simultaneamente (i.e. diagonalizzati simultaneamente), possiamo quindi studiare il problema agli autovalori per $\hat{L}_z$ e $\hat{\vec{L}}^2$ la cui soluzione matematica ha la seguente forma

$$\begin{aligned}
&\hat{\vec{L}}^2 Y_{lm}(\vec{r}) = l(l+1)\hbar^2 Y_{lm}(\vec{r}) \qquad l = 0, 1, 2, ... \\
&\hat{L}_z Y_{lm}(\vec{r}) = m\hbar Y_{lm}(\vec{r}) \qquad m \in [l, l-1, l-2, ..., -l]
\end{aligned} \tag{10}$$

Le autofunzioni $Y_{lm}(\vec{r})$ sono chiamate armoniche sferiche: in coordinate sferiche (r, θ, ϕ) dipendono da (θ, ϕ) (la dipendenza radiale è fattorizzata e può essere trascurata). Gli autovalori dipendono dal numero quantico l che può assumere valori interi non negativi (numero quantico orbitale), mentre per l fissato, m puo assumere i $2l+1$ valori che vanno da l ad $-l$ con salti unitari (numero quantico magnetico)

$$\begin{aligned}
&l = 0, 1, 2, ... \\
&m = l, l-1, ... - l \; .
\end{aligned} \tag{11}$$

Sotto rotazioni, la armoniche sferiche con l fissato si mescolano tra di loro (per l fissato ci sono $(2l+1)$ autofunzioni Y_{lm} descritte dal numero quantico m), mentre quelle con l diverso non si mescolano mai. Infatti il modulo del momento angolare è invariante per rotazioni, quindi il numero quantico l rimane invariato. Lo spazio di Hilbert si decompone in settori con momento angolare l fissato, che formano il sottospazio su cui agisce in modo irriducibile il gruppo delle rotazioni: la rappresentazione l è quindi $(2l+1)$ dimensionale. Una rotazione è rappresentata dall'operatore unitario

$$U(\vec{\theta}) = e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\theta}\cdot\vec{L}} \tag{12}$$

dove i generatori infintesimi $\vec{L}$ sono appunto dati dell'operatore momento angolare in (6).

Oltre al momento angolare orbitale, in natura emerge anche la possibilità di avere un momento angolare intrinseco (detto spin, non necessariamente associato ad un moto rotazionale). Lo spin $\hat{\vec{S}}$ può avere numeri quantici seminteri

$$\begin{aligned} &\hat{\vec{S}}^2\,\psi = s(s+1)\hbar^2\,\psi \qquad && s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, ... \\ &\hat{S}_z\psi = s_z\hbar\,\psi && s_z \in [s, s-1, s-2, ... - s]\ . \end{aligned} \tag{13}$$

L'operatore di spin ha la stessa algebra di Lie del momento angolare

$$[\hat{S}^i, \hat{S}^j] = i\hbar\epsilon^{ijk}\hat{S}^k \tag{14}$$

ora intepretata come algebra di Lie del gruppo SU(2), poiché per valori seminteri di s una rotazione di 2π è realizzata da -1. L'elettrone ha spin $s = \frac{1}{2}$.

Ecco alcune figure autoesplicative

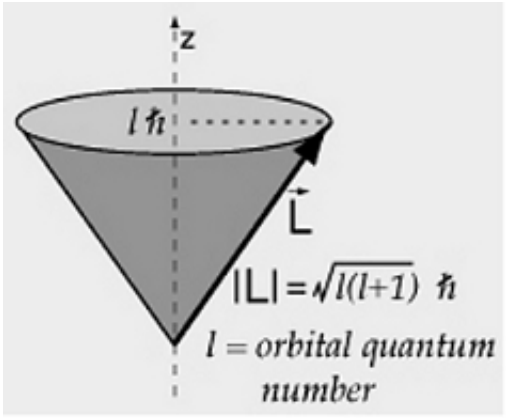

fig.3

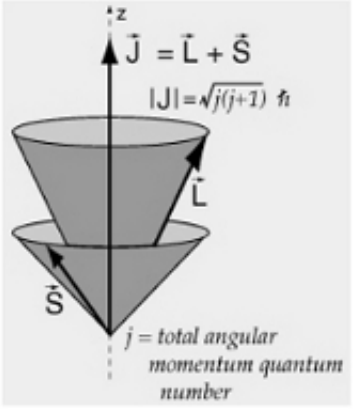

fig.4

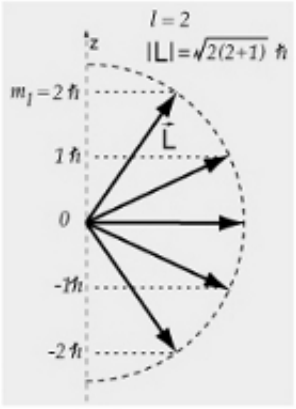

fig.5

1.1 Somma del momento angolare

Come sommare i momenti angolari in meccanica quantistica? Abbiamo detto che un momento angolare $\vec{J}$ fissato ha numeri quantici (j, m) con j fissato (intero o semintero) e con m che può assumere $2j+1$ valori che vanno da $+j$ a $-j$ con salti di uno.

Come sommare due momenti angolari j_1 e j_2? La regola è la seguente: il momento angolare totale ($\vec{J} = \vec{J_1} + \vec{J_2}$) può avere il numero quantico principale j con valori che vanno da $j_1 + j_2$ fino a $|j_1 - j_2|$ con salti di uno

$$j \in [j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, ..., |j_1 - j_2|] \tag{15}$$

mentre il numero quantico magnetico m è uguale a $m_1 + m_2$ e di nuovo può assumere i $2j + 1$ valori che vanno da $+j$ a $-j$

$$m = m_1 + m_2 \in [j, j-1, .., -j] \; . \tag{16}$$

Matematicamente, questo corrisponde a considerare il prodotto tensoriale delle rappresentazioni j_1 e j_2 del gruppo delle rotazioni e decomporlo in rappresentazioni irriducibili: in questa decomposizione compaiono solamente i momenti angolari $j_1 + j_2$, $j_1 + j_2 - 1$ etc. fino a $|j_1 - j_2|$.

Ad esempio, sommando i momenti angolari $j_1 = 1$ e $j_2 = \frac{1}{2}$ si possono avere momenti angolari totali $j = \frac{3}{2}$ e $j = \frac{1}{2}$. Sommando $j_1 = 1$ e $j_2 = 2$ le possibilità ammesse sono $j = 3$, $j = 2$ e $j = 1$.

Esercizio: Si controlli nei due esempi qui sopra che il numero di stati totali è sempre lo stesso, sia nella base riducibile che nella decomposizione in rappresentazioni irriducibili.