Appunti sugli integrali funzionali (path integrals)

Fiorenzo Bastianelli

Ottobre 2005

Indice

Capitolo 1

Introduzione all'integrale di cammino

In teoria dei campi ed in fisica delle particelle elementari i fenomeni quantistici sono tipicamente descritti in due modi equivalenti:
1. formalismo operatoriale (quantizzazione canonica, spazio di Hilbert, operatori, etc..)
2. formalismo dell'integrale funzionale (detto anche integrale di cammino o path integral).

L'integrale di cammino è stato introdotto in meccanica quantistica da Feynman nel 1948, ma fino al 1970 circa non incontrò molto successo, ed i metodi operatoriali erano ancora i più diffusi. Nel 1970 il successo delle teorie di gauge, introdotte per la descrizione di interazioni mediate da particelle di spin 1, diede un forte impulso allo sviluppo dei metodi funzionali. Infatti la quantizzazione delle teorie di gauge è molto più chiara ed elegante se fatta con l'integrale funzionale. Inoltre, l'integrale funzionale mostra come una teoria di campo quantistica in $D+1$ dimensioni spazio-temporali (D spazi ed 1 tempo) sia collegata con la meccanica statistica di un sistema in $D+1$ dimensioni spaziali attraverso la continuazione analitica della coordinata temporale (rotazione di Wick). Questo collegamento ha dato origine ad un modo di pensare e definire le teorie di campo usando la meccanica statistica ed il gruppo di rinormalizzazione introdotto da Wilson (teorie su reticolo).

Allo stato delle cose molti ricercatori usano di preferenza il formalismo dell'integrale funzionale per la descrizione delle teorie di campo e delle particelle elementari, ma occorre sottolineare come il formalismo operatoriale continui ad avere i suoi meriti (ci sono, ad esempio, lavori molto importanti sulle teorie di campo conformi in 2 dimensioni (CFT_2) che fanno uso di questo formalismo).

Dunque, allo stato delle cose la conoscenza di entrambe le formulazioni è utile per procedere in modo efficace nella ricerca moderna in teoria dei campi: alcune cose sono più semplici in una formulazione piuttosto che nell'altra e quindi può risultare vantaggioso usare un formalismo piuttosto che l'altro nella soluzione di problemi specifici.

1.1 Breve introduzione all'integrale di cammino

Il trattamento standard per spiegare il comportamento di un elettrone che passa attraverso due fenditure di una barriera e crea una figura di interferenza su uno schermo impiega la natura <u>ondulatoria</u> dell'elettrone ed il principio di Huygens per calcolare l'interferenza delle onde elementari che si originano dalle due fenditure.

Feynman propone una descrizione alternativa. Egli suggerisce di pensare all'elettrone come ad una <u>particella</u> che possa compiere entrambe le traiettorie, ciascuna con una certa “ampiezza”. L’ampiezza totale A_{tot} è definita come la somma delle singole ampiezze, ed il suo modulo quadrato dà la probabilità che l’elettrone sia rivelato in un dato punto dello schermo. L’ampiezza elementare di ciascuna traiettoria possibile è inoltre collegata in modo molto semplice al valore dell’azione classica valutata sulla traiettoria stessa: Feynman, ispirato da considerazioni precedenti di Dirac, associa ad ogni traiettoria un’ampiezza di norma unitaria (cosicché tutte le traiettorie “pesino” democraticamente allo stesso modo) e con fase pari al valore dell’azione in unità di $\hbar$. In formule:

$$A_{tot} = A(c_1) + A(c_2) + ... + A(c_n) \tag{1.1}$$

con la proposta fondamentale che per ogni cammino c_n

$$A(c_n) = e^{\frac{i}{\hbar}S(c_n)} \tag{1.2}$$

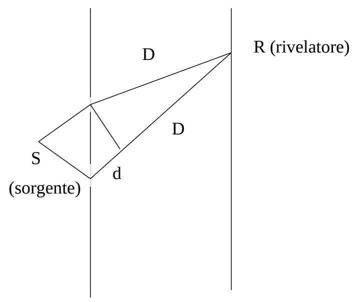
$$S = \text{azione} \tag{1.3}$$

$$P = |A_{tot}|^2 = \text{probabilita}' \ . \tag{1.4}$$

Dunque una parte importante in questa proposta è l’identificazione della fase associata all’ampiezza di transizione con l’azione del sistema. Facciamo un test di questa proposta. Ricordiamo che l’azione di una particella libera è data dall’integrale temporale della sua energia cinetica

$$S[q] = \int_0^T dt \ \frac{1}{2} m \dot{q}^2 \tag{1.5}$$

Semplifichiamo il problema assumendo che la velocità sia costante nelle due traiettorie. Usando le quantità indicate in figura si ottiene



$$\begin{aligned} S(c_1) &= \frac{m}{2}\frac{D^2}{T^2}T = \frac{m}{2}\frac{D^2}{T} && (1.6)\\ S(c_2) &= \frac{m}{2}\frac{(D+d)^2}{T} = \frac{m}{2}\frac{D^2}{T} + \frac{mDd}{T} + O(d^2) && (1.7)\\ &= S(c_1) + pd + O(d^2) && (1.8)\end{aligned}$$

dove $p = \frac{mD}{T}$ indica il momento dell’elettrone. Dunque

$$\begin{aligned} A_{tot} &= A_1 + A_2 = \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}S(c_1)} + \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}S(c_2)} = A_1[1 + \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}[S(c_2)-S(c_1)]}] \\ &= A_1[1 + \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}pd + O(d^2)}] && (1.9)\end{aligned}$$

Si vede che il massimo della probablità di rivelare l'elettrone sullo schermo si ha quando

$$\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}pd} = 1 \tag{1.10}$$

cioè quando

$$\frac{pd}{\hbar} = 2\pi n \quad \text{con } n \text{ intero} \quad \to \quad \frac{p}{h} d = n \quad \text{con } n \text{ intero.} \tag{1.11}$$

Si può interpretare questa condizione definendo una lunghezza d'onda $\lambda = \frac{h}{p}$ per cui quando in d è contenuto un numero intero di tali lunghezze d'onda si ha interferenza costruttiva. Abbiamo ottenuto la relazione di De Broglie usando l'integrale funzionale: se non altro questo ci mostra che la formulazione con l'integrale funzionale contiene gli elementi essenziali della meccanica quantistica.

Dunque si usa in modo essenziale l'azione:

$$S[q] = \int_{t_i}^{t_f} dt \ L(q, \dot{q}) \ . \tag{1.12}$$

Ricordiamo che la traiettoria classica è quella che minimizza l'azione:

$$\delta S = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \ . \tag{1.13}$$

In meccanica quantistica l'ampiezza di transizione si ottiene usando l'azione $S[q]$ per qualsiasi traiettoria possibile

$$A = \sum_n e^{\frac{i}{\hbar}S(c_n)} \equiv \int \mathcal{D}q \ e^{\frac{i}{\hbar}S[q]} \ . \tag{1.14}$$

La notazione finale qui introdotta è quella dell'integrale funzionale: $S[q]$ è un funzionale delle funzioni $q(t)$, che indicano il "cammino" del sistema, ed il simbolo $\mathcal{D}q$ indica formalmente l'integrazione su tutto lo spazio delle funzioni $\{q(t)\}$. Occorre notare che vari problemi matematici su come definire esattamente questa integrazione sono ancora aperti. L'integrale funzionale verrà descritto in modo più approfondito nei capitoli successivi.

In questa formulazione il limite classico è intuitivo: sistemi macroscopici hanno valori dell'azione S grandi rispetto ad $\hbar$, il quanto d'azione. Piccole variazioni di un cammino fanno variare la fase $\frac{i}{\hbar}S[q]$ di molto rispetto a π e le ampiezze di cammini vicini si cancellano per interferenza distruttiva, tranne nel punto in cui l'azione ha un minimo, $\delta S = 0$, che identifica la traiettoria classica. Le traiettorie vicino a quella classica hanno ampiezze che si sommano coerentemente poichè la fase non varia: l'integrale funzionale è dominato dalla traiettoria classica.

1.2 Principio di minima azione

L'azione gioca un ruolo fondamentale nella formulazione della meccanica quantistica attraverso gli integrali di cammino. Facciamone dunque una breve introduzione, partendo dalla formulazione lagrangiana ed arrivando alla formulazione hamiltoniana.

1.2.1 Formalismo lagrangiano

Consideriamo una particella non-relativistica di massa m che si muove in una sola dimensione con coordinata q, soggetta ad una forza conservativa $F = -\frac{\partial}{\partial q} V(q)$. L'equazione del moto di Newton è

$$m\ddot{q} = F \ . \tag{1.15}$$

Questa equazione puó essere derivata da un principio d'azione. L'azione è un funzionale della traiettoria della particella $q(t)$ (cioè delle variabili dinamiche del sistema che si vuole descrivere) ed associa un numero ad ogni funzione $q(t)$. In genere i sistemi fisici sono descritti da un'azione del tipo

$$\begin{aligned} S[q] &= \int_{t_i}^{t_f} dt\, L(q,\dot{q}) \\ L(q,\dot{q}) &= \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q) \end{aligned} \tag{1.16}$$

dove $L(q,\dot{q})$ è la lagrangiana, ed il principio d'azione stabilisce che *la traiettoria classica che congiunge due punti dello spazio delle configurazioni è quella che minimizza l'azione* S. Infatti possiamo variare la traiettoria $q(t)$ (con condizioni "iniziali" $q(t_i) = q_i$ e $q(t_f) = q_f$) in $q(t)+\delta q(t)$, dove $\delta q(t)$ è una variazione infinitesima arbitraria (con $\delta q(t_i) = \delta q(t_f) = 0$) ed imporre che l'azione sia minimizzata dalla traiettoria classica $q(t)$

$$\begin{aligned} 0 &= \delta S[q] = S[q+\delta q] - S[q] = \delta\Big(\int_{t_i}^{t_f} dt\,\Big[\frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q)\Big]\Big) \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt\,\Big[m\dot{q}\delta\dot{q} - \frac{\partial V(q)}{\partial q}\delta q\Big] = m\dot{q}\delta q\Big|_{t_i}^{t_f} - \int_{t_i}^{t_f} dt\,\Big[m\ddot{q} + \frac{\partial V(q)}{\partial q}\Big]\delta q \\ &= -\int_{t_i}^{t_f} dt\,\Big[m\ddot{q} + \frac{\partial V(q)}{\partial q}\Big]\delta q \ . \end{aligned} \tag{1.17}$$

Poichè le variazioni δq sono arbitrarie, il minimo è raggiunto proprio quando la funzione $q(t)$ soddisfa le equazioni del moto classiche

$$m\ddot{q} + \frac{\partial V(q)}{\partial q} = 0 \ . \tag{1.18}$$

In generale, si ottengono le cosidette equazione di Eulero-Lagrange

$$\begin{aligned} 0 &= \delta S[q] = \delta\int_{t_i}^{t_f} dt\, L(q,\dot{q}) = \int_{t_i}^{t_f} dt\,\Big[\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial\dot{q}}\delta\dot{q} + \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial q}\delta q\Big] \\ &= \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial\dot{q}}\delta q\Big|_{t_i}^{t_f} - \int_{t_i}^{t_f} dt\,\Big[\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial\dot{q}} - \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial q}\Big]\delta q \\ &= -\int_{t_i}^{t_f} dt\,\Big[\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial\dot{q}} - \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial q}\Big]\delta q \end{aligned} \tag{1.19}$$

da cui

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial\dot{q}} - \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial q} = 0 \ . \tag{1.20}$$

Osservazioni:
1. Dimensioni dell'azione: $[S] = [\hbar]$

2. Le equazioni lagrangiane del moto sono del secondo ordine nel tempo, quindi ci si aspetta che si possano imporre due “condizioni iniziali”, convenientemente scelte fissando la posizione al tempo iniziale e finale.
3. L'equazione del moto è esprimibile come la derivata funzionale dell'azione

$$\frac{\delta S[q]}{\delta q(t)} = 0 \ . \tag{1.21}$$

4. Le equazioni del moto non cambiano se si aggiunge alla lagrangiana L una derivata totale, $L \to L' = L + \frac{d}{dt}\Lambda$.
5. Tutto questo si estende facilmente a sistemi con più gradi di libertà e, con un pò più di attenzione, a teorie di campo.

1.2.2 Formalismo hamiltoniano

L'idea di base del formalismo hamiltoniano è quella di avere equazioni del moto del primo ordine nel tempo. Introduciamo questo formalismo seguendo un esempio semplice. Per una particella non-relativistica di coordinate q^i la lagrangiana nello spazio delle configurazioni è data da

$$L(q, \dot{q}) = \frac{m}{2}\dot{q}^i\dot{q}_i - V(q) \tag{1.22}$$

dove gli indici delle coordinate sono abbassati con la metrica δ_{ij} e gli indici ripetuti sono automaticamente da riternersi sommati su tutti i possibili valori. Il passaggio alla formulazione hamiltoniana avviene nel seguente modo:
1) Si raddoppiano le variabili dinamiche, introducendo per ogni coordinata il corrispondente momento coniugato

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = m\dot{q}_i \ . \tag{1.23}$$

2) Si definisce l'hamiltoniana H come trasformata di Legendre della lagrangiana L

$$H(q^i, p_i) \equiv p_i\dot{q}^i - L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2m}p^i p_i + V(q) \ . \tag{1.24}$$

3) Si definiscono le parentesi di Poisson. Per due funzioni A e B definite sullo spazio delle fasi le parentesi di Poisson assumono la forma

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial q^i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial q^i}\frac{\partial A}{\partial p_i} \tag{1.25}$$

dove abbiamo usato la convenzione di sommatoria per indici ripetuti. Si noti in particolare che

$$\{q^i, p_j\} = \delta^i_j \ , \quad \{q^i, q^j\} = 0 \ , \quad \{p_i, p_j\} = 0 \ . \tag{1.26}$$

4) Le equazione del moto hamiltoniane sono scrivibili nella forma

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= \{q^i, H\} \\ \dot{p}_i &= \{p_i, H\} \end{aligned} \tag{1.27}$$

che effettivamente sono del primo ordine nel tempo. Nel nostro esempio queste equazioni diventano

$$\begin{aligned}\dot q^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{1}{m} p^i \\ \dot p_i &= -\frac{\partial H}{\partial q^i} = -\frac{\partial V}{\partial q^i}\end{aligned} \tag{1.28}$$

e sono equivalenti alle equazioni del moto lagrangiane $m\ddot q^i = -\frac{\partial V}{\partial q^i}$. La hamiltoniana è tipicamente interpretata come generatore delle traslazioni temporali (e dunque come generatore del moto): sposta le condizioni iniziali (un punto nello spazio delle fasi) di una quantità infinitesima nel tempo. Anche queste equazioni possono essere dedotte da un principio d'azione

$$S[q,p] = \int_{t_i}^{t_f} dt\, \Big(p_i \dot q^i - H(q,p) \Big) \tag{1.29}$$

per cui

$$\begin{aligned} 0 &= \delta S = \int_{t_i}^{t_f} dt\, \Big(\delta p_i \dot q^i + p_i \delta \dot q^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q^i} \delta q^i \Big) \\ &= p_i \delta q^i \Big|_{t_i}^{t_f} + \int_{t_i}^{t_f} dt\, \Big[\delta p_i \Big(\dot q^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \Big) - \delta q^i \Big(\dot p_i + \frac{\partial H}{\partial q^i} \Big) \Big] \end{aligned} \tag{1.30}$$

e da qui si riconoscono le equazioni del moto di Hamilton. Si noti che in questa formulazione occorrono $2n$ costanti di integrazione, che corrispondono alle $2n$ condizioni imposte sulle coordinate q^i al tempo iniziale e finale.

Capitolo 2

Integrale funzionale in meccanica quantistica

2.1 Quantizzazione operatoriale

La quantizzazione operatoriale si ottiene formalmente considerando le coordinate dello spazio delle fasi (coordinate generalizzate e momenti) come operatori lineari che agiscono in uno spazio lineare $\mathcal{H}$ dotato di norma definita positiva (spazio di Hilbert) con la condizione che gli operatori soddisfino a regole di commutazione date da $i\hbar$ volte il valore delle corrispondenti parentesi di Poisson classiche

$$[\hat{q}^i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta^i_j \ , \quad [\hat{q}^i, \hat{q}^j] = 0 \ , \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0 \ . \tag{2.1}$$

Di conseguenza tutti gli osservabili classici $A(q, p)$ (funzioni sullo spazio delle fasi) diventano operatori $\hat{A}(\hat{q}, \hat{p})$ agenti nello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, di cui l'esempio più importante è proprio l'hamiltoniana $\hat{H}$. Dato un stato $|\psi\rangle$ dello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ ($|\psi\rangle \in \mathcal{H}$), la sua evoluzione temporale è data dall'equazione di Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle \ . \tag{2.2}$$

Questa procedura di quantizzazione formale diventa operativa quando si riesce a costruire esplicitamente una rappresentazione irriducibilie dell'algebra (2.1).

Nella rappresentazione delle coordinate, ottenuta proiettando gli stati dello spazio di Hilbert sugli autostati dell'operatore posizione, e considerando gli elementi di matrice degli operatori tra questi stessi autostati, si riottiene la familiare meccanica ondulatoria

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle &\rightarrow \psi(q) && \Big(\psi(q) = \langle q|\psi\rangle\Big) \\
\hat{q} &\rightarrow q && \Big(\langle q|\hat{q}|q'\rangle = q\langle q||q'\rangle = q\delta(q - q')\Big) \\
\hat{p} &\rightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial q} && \Big(\langle q|\hat{p}|q'\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q}\delta(q - q')\Big) \\
\hat{H} &\rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial q^2} + V(q)
\end{aligned} \tag{2.3}$$

con relativa equazione di Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial\psi(q)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(q)}{\partial q^2} + V(q)\psi(q) \ . \tag{2.4}$$

Dato uno stato iniziale $|\psi_i\rangle$ che descrive un sistema al tempo t_i, la soluzione dell'equazione di Schrödinger è formalmente data, per hamiltoniane indipendenti dal tempo, da

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_i)}|\psi_i\rangle \tag{2.5}$$

e l'ampiezza che il sistema si trovi al tempo t_f nello stato descritto da $|\psi_f\rangle$ è ottenuta proiettando su questo stato la soluzione dell'equazione di Schrödinger

$$\langle\psi_f|\psi(t_f)\rangle = \langle\psi_f|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t_f-t_i)}|\psi_i\rangle\ . \tag{2.6}$$

Tale ampiezza è denominata ampiezza di transizione. Nelle due prossime sezioni dedurremo delle rappresentazioni di tale ampiezza mediante gli integrali funzionali.

2.2 Integrale funzionale nello spazio delle fasi

È utile inserire l'operatore identità I, espresso tramite la relazione di completezza degli autostati dell'operatore posizione

$$I = \int dq\, |q\rangle\langle q| \tag{2.7}$$

per riscrivere la (2.6) come

$$\begin{aligned}\langle\psi_f|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t_f-t_i)}|\psi_i\rangle &= \langle\psi_f|I\, e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t_f-t_i)}I\,|\psi_i\rangle \\ &= \int dq_f \int dq_i\, \psi_f^*(q_f)\,\langle q_f|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t_f-t_i)}|q_i\rangle\,\psi_i(q_i)\end{aligned} \tag{2.8}$$

mostrando come sia sufficiente, senza perdere di generalità, considerare l'elemento di matrice

$$A = \langle q_f|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}T}|q_i\rangle \tag{2.9}$$

dove $T = (t_f - t_i)$ è l'intervallo di tempo impegato dalla propagazione della particella. Vediamo ora come ottenere una rappresentazione di questa ampiezza di transizione.

Per una particella con massa m e moto unidimensionale consideriamo come operatore quantistisco hamiltoniano

$$\hat{H}(\hat{q},\hat{p}) = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \hat{V}(\hat{q}) \tag{2.10}$$

dove il cappello denota come al solito operatori quanto-meccanici. La derivazione dell'integrale funzionale procede nel seguente modo. Possiamo spezzare l'ampiezza di transizione come prodotto di N fattori, ed inserire la relazione di completezza (2.7) tra i vari fattori $N-1$ volte

$$\begin{aligned}A &= \langle q_f|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}T}|q_i\rangle = \langle q_f|\Big(e^{-\frac{iT}{\hbar N}\hat{H}}\Big)^N|q_i\rangle = \langle q_f|\underbrace{e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar}\hat{H}}e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar}\hat{H}}\cdots e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar}\hat{H}}}_{N\ \text{volte}}|q_i\rangle \\ &= \langle q_f|e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar}\hat{H}}Ie^{-\frac{i\epsilon}{\hbar}\hat{H}}I\cdots Ie^{-\frac{i\epsilon}{\hbar}\hat{H}}|q_i\rangle = \int\Big(\prod_{k=1}^{N-1}dq_k\Big)\prod_{k=1}^{N}\langle q_k|e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar}\hat{H}}|q_{k-1}\rangle\end{aligned} \tag{2.11}$$

dove abbiamo denotato $q_0 = q_i$, $q_N = q_f$, $\epsilon = \frac{T}{N}$. Possiamo ora usare N volte la relazione di completezza, ma ora espressa in termini degli autostati dell'operatore momento,

$$I = \int \frac{dp}{2\pi\hbar}\, |p\rangle\langle p| \tag{2.12}$$

per ottenere

$$\begin{aligned} A &= \int \Big(\prod_{k=1}^{N-1} dq_k \Big) \prod_{k=1}^{N} \langle q_k | e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar}\hat H} | q_{k-1}\rangle = \int \Big(\prod_{k=1}^{N-1} dq_k \Big) \prod_{k=1}^{N} \langle q_k |\, I\, e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar}\hat H} | q_{k-1}\rangle \\ &= \int \Big(\prod_{k=1}^{N-1} dq_k \Big)\Big(\prod_{k=1}^{N} \frac{dp_k}{2\pi\hbar} \Big) \prod_{k=1}^{N} \langle q_k | p_k\rangle \langle p_k | e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar}\hat H} | q_{k-1}\rangle\ . \end{aligned} \tag{2.13}$$

Questa è ancora una formula esatta, ma ora useremo approssimazioni valide nel limite $N \to \infty$ ($\epsilon \to 0$). Il punto cruciale per derivare l'integrale funzionale sarà valutare il seguente elemento di matrice

$$\begin{aligned} \langle p | e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar}\hat H(\hat q,\hat p)} | q\rangle &= \langle p | \Big(1 - \frac{i\epsilon}{\hbar}\hat H(\hat q,\hat p) + \cdots \Big) | q\rangle \\ &= \langle p|q\rangle - \frac{i\epsilon}{\hbar}\langle p|\hat H(\hat q,\hat p)|q\rangle + \cdots \\ &= \langle p|q\rangle \Big(1 - \frac{i\epsilon}{\hbar} H(q,p) + \cdots \Big) \\ &= \langle p|q\rangle\, e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar} H(q,p) + \cdots}\ . \end{aligned} \tag{2.14}$$

La sostituzione $\langle p|\hat H(\hat q,\hat p)|q\rangle = \langle p|q\rangle\, H(q,p)$ segue dalla semplice struttura dell'hamiltoniana (2.10), che ci permette di agire con l'operatore posizione o momento sull'autostato corrispondente, cosicché gli operatori sono sostituiti immediatamente dai corrispondenti autovalori. In questo modo l'operatore hamiltoniano $\hat H(\hat q,\hat p)$ è sostituito dalla funzione hamiltoniana $H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$. Queste approssimazioni sono giustificate nel limite $N \to \infty$ per una classe sufficientemente grande di potenziali fisicamente interessanti, (ed i puntini in (2.14) possono essere legittimemente trascurati in questo limite): in tal caso esiste una prova rigorosa che va sotto il nome di "formula di Trotter". Usando la (2.14) e ricordando che le funzioni d'onda degli autostati del momento (le onde piane) sono normalizzate come

$$\langle q|p\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}pq}\ , \quad \langle p|q\rangle = \langle q|p\rangle^* = e^{-\frac{i}{\hbar}pq} \tag{2.15}$$

si ottiene

$$\langle q_k|p_k\rangle\langle p_k| e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar}\hat H} |q_{k-1}\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}p_k(q_k - q_{k-1}) - \frac{i\epsilon}{\hbar}H(q_{k-1},p_k)} \tag{2.16}$$

a meno di termini trascurabili per $\epsilon \to 0$. Questa espressione può ora essere inserita in (2.13). A questo punto l'ampiezza di transizione non contiene più operatori

$$\begin{aligned} A &= \lim_{N\to\infty} \int \Big(\prod_{k=1}^{N-1} dq_k \Big)\Big(\prod_{k=1}^{N} \frac{dp_k}{2\pi\hbar} \Big) e^{\frac{i\epsilon}{\hbar}\sum_{k=1}^{N}\left[p_k \frac{(q_k - q_{k-1})}{\epsilon} - H(q_{k-1},p_k)\right]} \\ &= \int DqDp\ e^{\frac{i}{\hbar}S[q,p]}\ . \end{aligned} \tag{2.17}$$

Questo è l'integrale funzionale nello spazio delle fasi. Riconosciamo all'esponente la discretizzazione dell'azione classica

$$S[q,p] = \int_0^T dt\, \Big(p\dot{q} - H(q,p)\Big) \quad \rightarrow \quad \epsilon \sum_{k=1}^{N} \Big(p_k \frac{(q_k - q_{k-1})}{\epsilon} - H(q_{k-1}, p_k)\Big) \tag{2.18}$$

dove $T = N\epsilon$ è il tempo di propagazione totale. L'ultimo modo di scrivere l'ampiezza in (2.17) è simbolico, ed indica la somma formale su tutti i cammini dello spazio delle fasi pesati dall'esponenziale di $i/\hbar$ volte l'azione classica.

2.3 Integrale funzionale nello spazio delle configurazioni

L'integrale funzionale nello spazio delle configurazioni è ora facilmente derivabile integrando sui momenti in (2.17). Infatti all'esponente la dipendenza dai momenti è al più quadratica, e si può usare l'integrazione gaussiana

$$\int dp\, e^{-\frac{\alpha}{2}p^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}}\ . \tag{2.19}$$

"Completando i quadrati" ed usando formalmente l'integrazione gaussiana si ottiene

$$\begin{aligned} A \ &= \lim_{N\to\infty} \int \Big(\prod_{k=1}^{N-1} dq_k\Big)\Big(\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}\Big)^{\frac{N}{2}} e^{\frac{i\epsilon}{\hbar}\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{m}{2}\frac{(q_k-q_{k-1})^2}{\epsilon^2} - V(q_{k-1})\right]} \\ &= \int Dq\, e^{\frac{i}{\hbar}S[q]}\ . \end{aligned} \tag{2.20}$$

Questo è l'integrale funzionale nello spazio delle configurazioni. Nell'esponente compare l'azione dello spazio delle configurazioni opportunamente discretizzata

$$S[q] \ = \int_0^T dt\, \Big(\frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q)\Big) \quad \rightarrow \quad \epsilon \sum_{k=1}^{N} \Big[\frac{m}{2}\Big(\frac{q_k - q_{k-1}}{\epsilon}\Big)^2 - V(q_{k-1})\Big]\ . \tag{2.21}$$

Di nuovo, l'ultimo modo di scrivere l'espressione in (2.20) è simbolico, ed indica la somma sui cammini nello spazio delle configurazioni.

2.3.1 Particella libera

Per una particella libera ($V(q) = 0$) si può usare ripetutamente la formula gaussiana nella forma

$$\int dq\, \sqrt{\frac{a}{\pi}}\, e^{-a(x-q)^2} \sqrt{\frac{b}{\pi}}\, e^{-b(q-y)^2} = \sqrt{\frac{ab}{\pi(a+b)}}\, e^{-\frac{ab}{a+b}(x-y)^2} \tag{2.22}$$

per calcolare dall'eq. (2.20) l'ampiezza di transizione esatta, ottenendo

$$A(q_i, q_f; T) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar T}}\, e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m(q_f-q_i)^2}{2T}}\ . \tag{2.23}$$

che infatti soddisfa l'equazione di Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial T}A(q_i,q_f;T)=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial q_f^2}A(q_i,q_f;T) \tag{2.24}$$

con condizioni iniziali

$$A(q_i,q_f;0)=\delta(q_i-q_f)\ . \tag{2.25}$$

Questo risulato è molto suggestivo: si noti che l'ampiezza di transizione a meno del prefattore corrisponde all'esponenziale dell'azione valutata sulla traiettoria classica. Questo è tipico nei casi in cui l'approssimazione semiclassica è esatta: si può interpretare il prefattore come corrispondente alle correzioni ad "1-loop" del risultato classico, e questo satura il risultato esatto (non ci sono correzioni a più loop o correzioni non-perturbative).

Un modo un pò più formale, ma molto utile, di calcolare questo integrale funzionale gaussiano è quello di operare direttamente nel limite del continuo. L'azione classica è $S[q]=\int_0^T dt\,\frac{m}{2}\dot{q}^2$, e le equazioni classiche del moto sono risolte con le condizioni al contorno descritte sopra da

$$q_{cl}(t)=q_i+(q_f-q_i)\frac{t}{T}\ . \tag{2.26}$$

Ora si può rappresentare un generico cammino $q(t)$ come la parte classica $q_{cl}(t)$ più "fluttuazioni quantistiche" $\phi(t)$

$$q(t)=q_{cl}(t)+\phi(t) \tag{2.27}$$

dove le fluttuazioni quantistiche devono annullarsi a $t=0,T$ per non modificare le condizioni al contorno, $\phi(0)=\phi(T)=0$. Ora si può calcolare l'integrale funzionale come segue

$$\begin{aligned}A(q_i,q_f;T) &= \int Dq\,e^{\frac{i}{\hbar}S[q]}=\int D(q_{cl}+\phi)\,e^{\frac{i}{\hbar}S[q_{cl}+\phi]}\\ &= \int D\phi\,e^{\frac{i}{\hbar}(S[q_{cl}]+S[\phi])}=e^{\frac{i}{\hbar}S[q_{cl}]}\int D\phi\,e^{\frac{i}{\hbar}S[\phi]}\\ &= Ne^{\frac{i}{\hbar}S[q_{cl}]}=Ne^{\frac{i}{\hbar}\frac{m(q_f-q_i)^2}{2T}}\ .\end{aligned} \tag{2.28}$$

dove è stata usata l'invarianza per traslazioni della misura ($Dq=D(q_{cl}+\phi)=D\phi$). Si noti che non c'è nessun termine lineare in ϕ nell'azione perchè q_{cl} risolve le equazioni classiche del moto, dunque per azioni quadratiche $S[q_{cl}+\phi]=S[q_{cl}]+S[\phi]$. Infine il coefficiente di normalizzazione $N=\int D\phi\,e^{\frac{i}{\hbar}S[\phi]}$ può essere fissato a posteriori richiedendo che il risultato finale soddisfi l'equazione di Schrödinger (dunque $N=\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar T}}$).

2.3.2 Rotazione di Wick ed equazione del calore

Si noti che continuando analiticamente il tempo a valori immaginari $T\to -i\beta$, con β reale, l'equazione di Schrödinger diventa essenzialmente l'equazione del calore

$$-\hbar\frac{\partial}{\partial\beta}A=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial q_f^2}A \tag{2.29}$$

la cui soluzione

$$A = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\beta}}\, e^{-\frac{m(q_f - q_i)^2}{2\hbar\beta}} \tag{2.30}$$

può essere ottenuta con la stessa continuazione analitica dalla (2.23). Questa continuazione analitica è detta "rotazione di Wick" e può essere fatta direttamente sull'integrale funzionale. Continuando la variabile temporale $t \to -i\tau$, l'azione con tempo "minkowskiano" (cioè con tempo reale) diventa un'azione "euclidea" (τ è solitamente detto tempo euclideo)

$$iS[q] \quad \to \quad -S_E[q] = -\int_0^\beta d\tau\, \frac{m}{2}\dot{q}^2 \tag{2.31}$$

dove nell'azione euclidea $\dot{q} = \frac{dq}{d\tau}$. L'azione euclidea è definita positiva, ed il corrispondente integrale funzionale

$$\int Dq\, e^{-\frac{1}{\hbar}S_E[q]} \tag{2.32}$$

coincide con l'integrale funzionale introdotto nel 1920 circa da Wiener per studiare la soluzione dell'equazione del calore e descrivere il moto browniano. Questi integrali in tempo euclideo hanno applicazioni dirette in meccanica statistica (dove solitamente si pone $\hbar = 1$ e dove β è identificato con l'inverso della temperatura Θ, precisamente $\beta = \frac{1}{k\Theta}$ con k costante di Boltzmann) e sono direttamente collegati agli integrali gaussiani in quanto l'esponenziale non contiene più l'unità immaginaria i.

Capitolo 3

Integrali gaussiani ed esempi

3.1 Digressione sugli integrali gaussiani e teorema di Wick

Integrali gaussiani (utili in meccanica statistica)

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\phi}{\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}K\phi^2} &= \frac{1}{\sqrt{K}} \\
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\phi}{\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}K\phi^2+J\phi} &= \frac{1}{\sqrt{K}}\, \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\frac{1}{K}J^2} \\
\int \frac{d^n\phi}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\phi^i K_{ij}\phi^j} &= (\det K_{ij})^{-\frac{1}{2}} \\
\int \frac{d^n\phi}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\phi^i K_{ij}\phi^j + J_i\phi^i} &= (\det K_{ij})^{-\frac{1}{2}}\ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}J_i G^{ij} J_j}
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

dove G^{ij} è la matrice inversa di K_{ij} (e quindi $K_{ij}G^{jk} = \delta_i^k$). Questi integrali sono facilmente calcolabili con metodi elementari e convergono ai valori sopra riportati quando $K > 0$ e K_{ij} è una matrice definita positiva (tutti i suoi autovalori sono positivi). Infatti, il primo integrale è l'integrale gaussiano standard; il secondo si può ottenere completando il quadrato all'esponente e traslando la variabile di integrazione (procedimento a cui ci si riferisce come al "completamento del quadrato"); il terzo integrale è immediato se la matrice K_{ij} è diagonale, e valido in tutta generalità osservando che la misura d'integrazione è invarante per trasformazioni ortogonali (una matrice simmetrica è diagonalizzata da trasformazioni ortogonali); il quarto integrale è di nuovo ottenuto completando il quadrato.

Tutte le variabili qui sopra sono considerate reali, ma per estensione analitica in K e K_{ij} si possono ottenere i seguenti:
Integrali gaussiani (utili in meccanica quantistica)

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\phi}{\sqrt{-2\pi i}}\ \mathrm{e}^{-\frac{i}{2}K\phi^2} &= \frac{1}{\sqrt{K}} \\
\int \frac{d^n\phi}{(-2\pi i)^{\frac{n}{2}}}\ \mathrm{e}^{-\frac{i}{2}\phi^i K_{ij}\phi^j} &= (\det K_{ij})^{-\frac{1}{2}} \\
\int \frac{d^n\phi}{(-2\pi i)^{\frac{n}{2}}}\ \mathrm{e}^{-\frac{i}{2}\phi^i K_{ij}\phi^j + iJ_i\phi^i} &= (\det K_{ij})^{-\frac{1}{2}}\ \mathrm{e}^{\frac{i}{2}J_i G^{ij} J_j}
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

dove G^{ij} è sempre la matrice inversa di K_{ij}. La convergenza di questi integrali è garantita se K e tutti gli autovalori di K_{ij} hanno una piccola parte immaginaria negativa (ad esempio $K = K_0 - i\epsilon$ con K_0 reale ed $\epsilon > 0$) che assicurano uno smorzamento degli integrandi per $|\phi| \to \infty$ (questo corrisponde alla prescrizione causale $i\epsilon$ di Feynman).

Questi integrali (finito dimensionali) possono essere reintepretati come integrali funzionali (infinito dimensionali) se si usa una notazione "ipercondensata" per cui la variabile ϕ stà per la funzione e l'indice i per l'argomento della funzione. Tipicamente tale argomento è costituito da una parte continua e da una parte discreta. Ad esempio se le funzione in considerazione è il potenziale vettore $A_\mu(x^\nu)$ si può introdurre la notazione

$$\begin{aligned} & A \to \phi \\ & \mu, x^\nu \equiv \mu, x^0, x^1, x^2, x^3 \to i \end{aligned} \tag{3.3}$$

dove l'indice i contiene una parte discreta (la dipendenza dall'indice discreto μ) ed un parte continua (x^ν che descrive la dipendenza della funzione dal punto dello spazio-tempo). In teoria dei campi tipicamente si cerca solo la dipendenza di questi integrali dalle funzioni arbitrarie J, le cosidette "sorgenti", e si trascura la normalizzazione globale (che viene spesso rinormalizzata ad 1).

3.1.1 Funzioni di correlazione e funzionali generatori

Definiamo funzioni di correlazione ad n punti le seguenti "medie" normalizzate

$$\langle \phi^{i_1} \phi^{i_2} \cdots \phi^{i_n} \rangle = Z^{-1} \int D\phi \; \phi^{i_1} \phi^{i_2} \cdots \phi^{i_n} \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar} S[\phi]} \tag{3.4}$$

dove $Z = \int D\phi \; \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar} S[\phi]}$ cosicché $\langle 1 \rangle = 1$. È utile introdurre il "funzionale" generatore

$$Z[J] = \int D\phi \; \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}(S[\phi] + J_i \phi^i)} \tag{3.5}$$

che genera tutte le funzioni di correlazione della teoria

$$\langle \phi^{i_1} \phi^{i_2} \cdots \phi^{i_n} \rangle = \frac{1}{Z[J]} \left(\frac{\hbar}{i} \right)^n \frac{\delta}{\delta J_{i_1}} \frac{\delta}{\delta J_{i_2}} \cdots \frac{\delta}{\delta J_{i_n}} Z[J] \Big|_{J=0} \tag{3.6}$$

Il funzionale generatore di funzioni connesse $W[J]$ è definito attraverso la relazione

$$Z[J] = \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar} W[J]} \qquad \Rightarrow \qquad W[J] = \frac{\hbar}{i} \ln Z[J] \tag{3.7}$$

È utile anche considerare l'azione efficace $\Gamma[\varphi]$ ottenuta come trasformata di Legendre del funzionale $W[J]$

$$\Gamma[\varphi] = \min_J \left\{ W[J] - J_i \varphi^i \right\} \tag{3.8}$$

che genera le cosiddette funzione di correlazione irriducibli ad una particella.

3.1.2 Teoria libera

Per acquisire un po' d'intuizione è utile considerare l'esempio più semplice, una teoria libera descritta dall'azione

$$S[\phi] = -\frac{1}{2}\phi^i K_{ij}\phi^j. \tag{3.9}$$

Usiamo per semplicità unità di misura in cui $\hbar = 1$ e definendo $\mathcal{D}\phi \equiv \frac{d^n\phi}{(-2\pi i)^{\frac{n}{2}}}$ dall'eq (3.2) si ottiene

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \ \mathrm{e}^{i(S[\phi]+J_i\phi^i)} = (\det K_{ij})^{-\frac{1}{2}} \ \mathrm{e}^{\frac{i}{2}J_i G^{ij} J_j} \tag{3.10}$$

Dalle eq. (3.5) (3.6) possiamo quindi ottenere le seguenti funzioni di correlazione

$$\begin{aligned} &\langle 1 \rangle = 1 \\ &\langle \phi^i \rangle = 0 \\ &\langle \phi^i \phi^j \rangle = -iG^{ij} \end{aligned} \tag{3.11}$$

Quest'ultima, cioè la funzione di correlazione a due punti, è anche detta *propagatore* del campo ϕ^i. Proseguendo si vede facilmente che tutte le funzioni di correlazione con un numero dispari di punti si annullano, mentra quelle con un numero n pari di punti si esprimono come somma di $(n-1)!!$ termini diversi che si fattorizzano come prodotto delle funzioni a due punti (fatto noto come *teorema di Wick*). Ad esempio la funzione a 4 punti risulta

$$\langle \phi^1\phi^2\phi^3\phi^4 \rangle = \langle \phi^1\phi^2 \rangle\langle \phi^3\phi^4 \rangle + \langle \phi^1\phi^3 \rangle\langle \phi^2\phi^4 \rangle + \langle \phi^1\phi^4 \rangle\langle \phi^2\phi^3 \rangle. \tag{3.12}$$

Questa funzione di correlazione non è connessa in quanto tutti i suoi temini si disconnettono nel prodotto di funzioni di correlazione di ordine più basso.

Il funzionale generatore di funzioni connesse $W[J]$ è facilmente identificabile: usando l'eq. (3.7) si ottiene

$$W[J] = \frac{1}{2}J_i G^{ij} J_j - \Lambda \tag{3.13}$$

dove $\Lambda = -\frac{i}{2}\ln\det(K_{ij}) = -\frac{i}{2}\operatorname{tr}\ln(K_{ij})$ è una costante. Si verifica facilmente che le funzioni di correlazione non nulle generate da $W[J]$ sono connesse.

Calcoliamo infine l'azione efficace. Il minimo al variare della sorgente J dell'eq. (3.8) si ha per

$$\frac{\delta W}{\delta J_i} = \varphi^i \quad \Longrightarrow \quad \varphi^i = G^{ij}J_j \quad \Longrightarrow \quad J_i = K_{ij}\varphi^j \tag{3.14}$$

Da cui

$$\Gamma[\varphi] = -\frac{1}{2}\varphi^i K_{ij}\varphi^j - \Lambda \tag{3.15}$$

Dunque per una teoria libera l'azione efficace $\Gamma[\varphi]$ coincide essenzialmente con l'azione libera $S[\varphi]$ (a parte la costante aggiuntiva Λ che rappresenta l'energia del vuoto o "energia di punto zero" che, in assenza di gravità, viene tipicamente trascurata). In generale l'azione efficace contiene efficacemente tutti gli effetti dovuti alla quantizzazione e dunque non va "quantizzata" di nuovo.

3.2 Funzioni di correlazione

L'ampiezza di transizione che abbiamo calcolato con il path integral può essere espressa anche nella rappresentazione di Heisenberg come

$$\langle\psi_f|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t_f-t_i)}|\psi_i\rangle = {}_H\langle\psi_f,t_f|\psi_i,t_i\rangle_H \tag{3.16}$$

dove ${}_H\langle\psi_f,t_f|$ e $|\psi_i,t_i\rangle_H$ sono, per esempio, autostati di operatori $O(t)$ al tempo t_f e t_i rispettivamente. Nella rappresentazione di Schrödinger gli operatori non dipendono dal tempo e lo stato del sistema fisico è un vettore dello spazio di Hilbert che dipende esplicitamente dal tempo (e soddisfa l'equazione di Schrödinger). Viceversa, nella rappresentazione di Heisenberg gli operatori dipendono esplicitamente dal tempo (soddisfano le equazioni di Heisenberg) mentre gli stati possibili del sistema fisico sono vettori indipendenti dal tempo. Le due rappresentazioni sono equivalenti poiché esiste un operatore unitario che le collega (che coincide con l'operatore di evoluzione). Infatti, nella rappresentazione di Heisenberg le equazioni del moto sono date dalle equazioni di Heisenberg, che per l'operatore posizione è

$$i\hbar\frac{d\hat{q}_H}{dt} = [\hat{q}_H,\hat{H}] \quad \to \quad \hat{q}_H(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\hat{q}_H(0)e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} \tag{3.17}$$

dove la soluzione scritta sopra è valida per hamiltoniane indipendenti dal tempo, mentre nella rappresentazione di Schrödinger gli operatori non dipendono dal tempo e possono essere identificati con gli operatori di Heisenberg al tempo $t=0$,

$$\hat{q}_S = \hat{q}_H(0)\ . \tag{3.18}$$

L'operatore $U = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$ è l'operatore unitario che collega le due rappresentazioni. Similmente gli autostati definiti dalle relazioni

$$\hat{q}_S|q\rangle = q|q\rangle\ , \qquad \hat{q}_H(t)|q,t\rangle_H = q|q,t\rangle_H \tag{3.19}$$

sono collegati da una relazione simile

$$|q,t\rangle_H = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|q\rangle\ . \tag{3.20}$$

Dunque è facile verificare la correttezza della seconda espressione in (3.16) sopra. Spesso in teoria dei campi si considera l'ampiezza di transizione tra lo stato di vuoto (solitamente indicato da 0) a $t_i=-\infty$ (in) allo stato di vuoto a $t_f=+\infty$ (out)

$${}_H\langle\psi_f,t_f|\psi_i,t_i\rangle_H \quad\to\quad {}_H\langle 0,t_f|0,t_i\rangle_H \quad\to\quad {}_H\langle 0,\mathrm{out}|0,\mathrm{in}\rangle_H\ . \tag{3.21}$$

Spesso si sottindende la rappresentazione di Heisenberg, e le indicazioni "in", "out" vengono tralasciati insieme al pedice H.

Le funzioni di correlazione sono definite nella rappresentazione di Heisenberg come

$$\begin{array}{ll} {}_H\langle\psi_f,t_f|\hat{q}(t)|\psi_i,t_i\rangle_H & \text{funz.di corr. ad 1 punto} \\ {}_H\langle\psi_f,t_f|\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)|\psi_i,t_i\rangle_H & \text{funz.di corr. a 2 punti} \\ \ldots & \\ {}_H\langle\psi_f,t_f|\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)\cdots\hat{q}(t_n)|\psi_i,t_i\rangle_H & \text{funz.di corr. ad } n \text{ punti}\ . \end{array} \tag{3.22}$$

Di maggiore interesse sono le funzioni di correlazione con ordinamento temporale definite da

$$
\begin{aligned}
&{}_H\langle\psi_f, t_f|\hat{q}(t)|\psi_i, t_i\rangle_H && \text{funz.di corr. ad 1 punto} \\
&{}_H\langle\psi_f, t_f|T\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)|\psi_i, t_i\rangle_H && \text{funz.di corr. a 2 punti} \\
&\cdots \\
&{}_H\langle\psi_f, t_f|T\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)\cdots\hat{q}(t_n)|\psi_i, t_i\rangle_H && \text{funz.di corr. ad } n \text{ punti} \qquad (3.23)
\end{aligned}
$$

dove il simbolo T (introdotto da Dyson) indica che gli operatori sono sistemati da sinistra a destra in ordine di tempo decrescente. Queste ultime sono facilmente ottenibili tramite il path integral. Infatti la funzione di correlazione ad un punto può essere calcolata come segue

$$
\begin{aligned}
{}_H\langle\psi_f, t_f|\hat{q}(t)|\psi_i, t_i\rangle_H &= \langle\psi_f|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t_f}\Big(e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\hat{q}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\Big)e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t_i}|\psi_i\rangle \\
&= \langle\psi_f|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t_f-t)}\,\hat{q}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_i)}|\psi_i\rangle \\
&= \langle\psi_f|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t_f-t)}\,\hat{q}\, I\, e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_i)}|\psi_i\rangle \\
&= \langle\psi_f|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t_f-t)}\,\hat{q}\,\Big(\int dq_n|q_n\rangle\langle q_n|\Big)e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_i)}|\psi_i\rangle \\
&= \lim_{N\to\infty}\int\Big(\prod_{k=1}^{N-1}dq_k\Big)\Big(\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}\Big)^{\frac{N}{2}}\, q_n\, e^{\frac{i\epsilon}{\hbar}\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{m}{2}\frac{(q_k-q_{k-1})^2}{\epsilon^2}-V(q_{k-1})\right]} \\
&= \int Dq\, q(t)\, e^{\frac{i}{\hbar}S[q]}\ . \qquad (3.24)
\end{aligned}
$$

dove si è ripetuta essenzialmente la deduzione come nel capitolo 2, facendo attenzione ad identificare l'inserimento della relazione di completezza I, espressa mediante l'integrale su q_n, con quella che corrisponde al tempo $t - t_i = n\epsilon$ (questo è sempre ottenibile con una discretizzazione sufficientemente fine), cosicché da identificare nel limite del continuo q_n con $q(t)$.

Si vede facilmente che tale deduzione si generalizza alle funzioni ad n punti solo se gli operatori sono ordinati temporalmente

$$
{}_H\langle\psi_f, t_f|T\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)\cdots\hat{q}(t_n)|\psi_i, t_i\rangle_H = \int Dq\, q(t_1)q(t_2)\cdots q(t_n)\, e^{\frac{i}{\hbar}S[q]}\ . \qquad (3.25)
$$

Dunque le funzioni ad n punti ordinate temporalmente sono date dalla media delle funzioni $q(t)$ nell'integrale funzionale In tale formulazione gli operatori non compaiono più.

In teoria dei campi la funzione a due punti normalizzata

$$
\frac{{}_H\langle 0,\text{out}|T\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)|0,\text{in}\rangle_H}{{}_H\langle 0,\text{out}|0,\text{in}\rangle_H} = \frac{1}{Z}\int Dq\, q(t_1)q(t_2)\, e^{\frac{i}{\hbar}S[q]} \qquad (3.26)
$$

con $Z = \int Dq\, e^{\frac{i}{\hbar}S[q]}$ è chiamata il "propagatore" (spesso si normalizza l'energia del vuoto a zero ponendo $Z = 1$).

Quando si usa l'integrale funzionale e se non c'è nessuna possibilità di confusione le funzioni di correlazione (non normalizzate) sono indicate da

$$
\langle q(t_1)q(t_2)\cdots q(t_n)\rangle = \int Dq\, q(t_1)q(t_2)\cdots q(t_n)\, e^{\frac{i}{\hbar}S[q]} \qquad (3.27)
$$

come già anticipato nella sezione 3.1.1.

Si vede facilmente che il funzionale generatore per le funzioni di correlazione (non normalizzate) è dato da

$$
\begin{aligned}
Z[J] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\Big(\frac{i}{\hbar}\Big)^n \int dt_1 dt_2 \dots dt_n \, \langle q(t_1)q(t_2)\cdots q(t_n)\rangle \, J(t_1)J(t_2)\cdots J(t_n) \\
&= \int Dq \, e^{\frac{i}{\hbar}(S[q]+\int dt\, Jq)}
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

da cui si ottengono le funzioni di correlazione tramite opportune derivate funzionali

$$
\langle q(t_1)q(t_2)\cdots q(t_n)\rangle = \Big(\frac{\hbar}{i}\Big)^n \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(t_1)\delta J(t_2)\cdots \delta J(t_n)}\Big|_{J=0} . \tag{3.29}
$$

3.3 Oscillatore armonico

Calcoliamo esplicitamente il caso dell'oscillatore armonico con massa unitaria

$$
\begin{aligned}
Z[J] &= \int Dq \, e^{\frac{i}{\hbar}(S[q]+\int dt\, Jq)} \\
S[q] &= \int dt \Big(\frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{\omega^2}{2}q^2\Big)
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

formalmente già risolto nella sezione 3.1.2. Ripercorriamo brevemente la deduzione senza usare la notazione ipercondensata. L'azione all'esponente può essere riscritta integrando per parti e trascurando il termine di bordo (che può essere messo a zero imponendo che q tenda al valore del vuoto classico $q = 0$ negli estremi d'integrazione, ma una giustificazione forse più appropriata verrà data più avanti nella versione euclidea)

$$
\begin{aligned}
S[q] &= -\int dt\, \frac{1}{2} q \Big(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\Big) q \\
&= -\int dt dt' \, \frac{1}{2} q(t) \Big(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\Big)\delta(t-t') q(t') \\
&\equiv -\int dt dt' \, \frac{1}{2} q(t) K(t,t') q(t')
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

dove la delta di Dirac $\delta(t-t')$ è stata introdotta per permettere di identificare la "matrice" cinetica $K(t,t')$ (un'operatore differenziale), $K(t,t') = (\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2)\delta(t-t')$. L'inverso di questo operatore cinetico (cioè la funzione di Green dell'operatore differenziale) è identificato in trasformata di Fourier

$$
G(t,t') = -\int \frac{dp}{2\pi} \frac{e^{-ip(t-t')}}{p^2-\omega^2} \tag{3.32}
$$

che infatti formalmente soddisfa

$$
\int dt'' \, K(t,t'')G(t'',t') = \Big(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\Big) G(t,t') = \delta(t-t') \tag{3.33}
$$

(come integrare in presenza dei poli verrà discusso più avanti). Ora si può completare il quadrato in (3.30) ottenendo

$$
\begin{aligned}
Z[J] &= \int Dq\, e^{\frac{i}{\hbar}(S[q]+\int dt\, Jq)} \\
&= \int Dq\, \exp\frac{i}{\hbar}\Big[-\int dtdt'\,\Big(\frac{1}{2}q(t)K(t,t')q(t') - J(t)\delta(t-t')q(t') \\
&\qquad \pm\frac{1}{2}J(t)G(t,t')J(t')\Big)\Big] \\
&= \exp\Big(\frac{i}{2\hbar}\int dtdt'\, J(t)G(t,t')G(t')\Big)\int Dq\,\exp\Big(-\frac{i}{\hbar}\int dtdt'\,\frac{1}{2}\tilde{q}(t)K(t,t')\tilde{q}(t')\Big) \\
&= \exp\Big(\frac{i}{2\hbar}\int dtdt'\, J(t)G(t,t')G(t')\Big)\underbrace{\int D\tilde{q}\,\exp\Big(-\frac{i}{\hbar}\int dtdt'\,\frac{1}{2}\tilde{q}(t)K(t,t')\tilde{q}(t')\Big)}_{\det^{-1/2}[\frac{1}{\hbar}K(t,t')]\equiv N} \\
&= N\exp\Big(\frac{i}{2\hbar}\int dtdt'\, J(t)G(t,t')J(t')\Big)
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

(per semplicità si può scegliere l'energia dello stato di vuoto uguale a zero, e quindi fissare $N = 1$).

Aggiungendo la prescrizione $i\epsilon$ di Feynman si può calcolare (per $\epsilon \to 0^+$)

$$
G(t,t') = -\int \frac{dp}{2\pi}\,\frac{e^{-ip(t-t')}}{p^2-\omega^2+i\epsilon} = \frac{i}{2\omega}e^{-i\omega|t-t'|}
\tag{3.35}
$$

La funzione a due punti (il propagatore di Feynman) è quindi data da

$$
\begin{aligned}
\frac{\langle 0,\mathrm{out}|T\hat{q}(t)\hat{q}(t')|\,\mathrm{in}\rangle}{\langle 0,\mathrm{out}|\,\mathrm{in}\rangle} &= \frac{\int Dq\, q(t)q(t')e^{\frac{i}{\hbar}S[q]}}{\int Dq\, e^{\frac{i}{\hbar}S[q]}} = \frac{\langle q(t)q(t')\rangle}{\langle 1\rangle} \\
&= \frac{1}{Z[J]}\left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(t)\delta J(t')}\bigg|_{J=0} \\
&= \frac{\hbar}{2\omega}e^{-i\omega|t-t'|}
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

Come notato sopra, la media dell'unità ($\langle 1\rangle = N$) può essere posta uguale ad uno fissando l'energia dello stato di vuoto uguale a zero.

3.4 Rotazione di Wick e formula di Feynman-Kac

Consideriamo la traccia dell'operatore di evoluzione

$$
Z_M \equiv \mathrm{Tr}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t_f-t_i)} = \sum_n \langle n|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t_f-t_i)}|n\rangle = \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n(t_f-t_i)} = \int dq\langle q,t_f|q,t_i\rangle\ .
\tag{3.37}
$$

Continuando analiticamente il tempo con la rotazione di Wick $T \equiv (t_f - t_i) \to -i\beta$, e ponendo $\hbar = 1$, si ottiene

$$
Z_E \equiv \mathrm{Tr} e^{-\beta\hat{H}} = \sum_n e^{-\beta E_n} = \int dq\langle q,t_f|q,t_i\rangle_E
\tag{3.38}
$$

Questa è la funzione di partizione di un sistema statistico con hamiltoniana $\hat{H}$ alla temperatura $\Theta = \frac{1}{k\beta}$, dove k è la costante di Boltzmann. È ora facile trovarne una rappresentazione con il path integral: occorre mettere lo stato iniziale uguale allo stato finale, integrare su tutti i possibili stati (questo genera la traccia in (3.37)), e fare la rotazione di Wick nell'integrale funzionale. I cammini diventano quindi cammini chiusi, periodici nel tempo euclideo (poichè $q(0) = q(\beta)$). L'azione, come già descritto nella sezione 2.3.2, diventa un'azione euclidea definita positiva, e la rappresentazione tramite integrale funzionale (formula di Feynman-Kac) è scritta come

$$Z_E = \mathrm{Tr} e^{-\beta\hat{H}} = \int_{PBC} Dq\, e^{-S_E[q]} \tag{3.39}$$

dove PBC (*periodic boundary conditions*) indica condizioni al contorno periodiche con periodo β che identificano tutti i cammini chiusi di periodo β.

3.4.1 Oscillatore armonico (caso euclideo)

Un caso speciale della formula di Feynamn-Kac è il limite per la temperatura che và a zero ($\Theta \to 0$), o equivalentemente del tempo euclideo che tende all'infinito ($\beta \to \infty$):

$$Z_E = \sum_n e^{-\beta E_n} \underbrace{\longrightarrow}_{\beta\to\infty} e^{-\beta E_0} + \text{termini che vanno a zero.} \tag{3.40}$$

Questo è vero anche in presenza di una sorgente esterna J se si assume che la sorgente è non-nulla solamente in un intervallo di tempo finito: il tempo infinito restante è sufficiente a proiettare l'operatore $e^{-\beta\hat{H}}$ sullo stato di vuoto. Questo ci permette di derivare il funzionale generatore $Z[J]$ nel caso euclideo in un modo più semplice, giustificando l'integrazione per parti

$$\begin{aligned} Z_E[J] &\equiv \langle 0, \tau = -\infty | 0, \tau = +\infty \rangle_J = \int_{PBC} Dq\, e^{-S_E[q] + \int d\tau\, Jq} \\ S_E[q] &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \Big(\frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{\omega^2}{2} q^2 \Big) \ . \end{aligned} \tag{3.41}$$

Ora possiamo ripetere il calcolo precedente. Per cammini chiusi si può integrare per parti (non ci sono termini di bordo) e l'integrale è strettamente gaussiano

$$\begin{aligned} Z_E[J] &= \int_{PBC} Dq \exp\Big[-\int d\tau \Big(\frac{1}{2} q(\tau) \Big(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \Big) q(\tau') - J(\tau) q(\tau) \Big] \\ &= N \exp\Big[\frac{1}{2} \int d\tau d\tau'\, J(\tau) G_E(\tau, \tau') J(\tau') \Big] \end{aligned} \tag{3.42}$$

dove la funzione di Green euclidea G_E è data da

$$G_E(\tau, \tau') = \Big[-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \Big]^{-1} = \int \frac{dp_E}{2\pi} \frac{e^{-ip_E(\tau - \tau')}}{p_E^2 + \omega^2} \ . \tag{3.43}$$

Questa funzione di Green euclidea G_E è unica: infatti non ci sono poli da trattare o prescrizioni da assegnare. La rotazione di Wick inversa implica $\tau \equiv t_E \to i t_M \equiv it$ insieme a $p_E \to -ip_M \equiv -ip$, quest'ultima necessaria per mantenere una corretta trasformata di Fourier durante la deformazione analitica. Infatti

$$G_E(\tau,\tau') = \int \frac{dp_E}{2\pi}\, \frac{e^{-ip_E(\tau-\tau')}}{p_E^2+\omega^2} \quad \to \quad -i\int \frac{dp_M}{2\pi}\, \frac{e^{-ip_M(t-t')}}{-p_M^2+\omega^2} = -iG_M(t,t') \equiv \Delta_F(t,t') \tag{3.44}$$

dove $\Delta_F(t,t')$ è il propagatore di Feynman in (3.36) (con $\hbar = 1$). Calcolando (3.43), o continuando analiticamente (3.36), si ottiene il propagatore euclideo (funzione a due punti normalizzata)

$$\langle q(\tau)q(\tau')\rangle = \frac{1}{2\omega} e^{-\omega|\tau-\tau'|}\ . \tag{3.45}$$

Capitolo 4

Sviluppo perturbativo

4.1 Sviluppo perturbativo

La teoria libera corrisponde all'integrale gaussiano ed è risolubile esattamente. In presenza di interazioni la teoria è invece di difficile soluzione, e si deve ricorrere ad approssimazioni quali l'espansione perturbativa, che consiste essenzialmente nello sviluppo della soluzione in serie di Taylor nelle costanti d'accoppiamento. Descriviamo lo sviluppo perturbativo considerando come traccia il caso di un oscillatore anarmonico

$$S[q] \;=\; \int dt\Big(\frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{\omega^2}{2}q^2 - \frac{g}{3!}q^3 - \frac{\lambda}{4!}q^4\Big)\;. \tag{4.1}$$

Quando le costanti d'accoppiamento g e λ si annullano la teoria è risolubile esattamente, per cui si può tentare di descrivere perturbativamnete le correzioni per g e λ con valori sufficientemente piccoli. Conviene separare l'azione come somma di due termini

$$\begin{aligned}
S[q] &= S_0[q] + S_{int}[q] \\
S_0[q] &= \int dt\,\Big(\frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{\omega^2}{2}q^2\Big) \\
S_{int}[q] &= \int dt\,\Big(-\frac{g}{3!}q^3 - \frac{\lambda}{4!}q^4\Big)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

e l'integrale funzionale può essere trattato sviluppando in serie di Taylor l'esponenziale del termine d'interazione

$$\begin{aligned}
Z[J] &= \int \mathcal{D}q\, e^{\frac{i}{\hbar}(S[q]+\int Jq)} \qquad (4.3)\\
&= \int \mathcal{D}q\, e^{\frac{i}{\hbar}(S_0[q]+S_{int}[q]+\int Jq)} \\
&= \int \mathcal{D}q\, e^{\frac{i}{\hbar}S_{int}[q]}\, e^{\frac{i}{\hbar}(S_0[q]+\int Jq)} \\
&= \int \mathcal{D}q\, \Big[1 + \frac{i}{\hbar}S_{int}[q] + \frac{1}{2}\Big(\frac{i}{\hbar}S_{int}[q]\Big)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\Big(\frac{i}{\hbar}S_{int}[q]\Big)^n + \cdots\Big]\, e^{\frac{i}{\hbar}(S_0[q]+\int Jq)}
\end{aligned}$$

o, equivalentemente, con una notazione ovvia

$$Z[J] = \Big\langle e^{\frac{i}{\hbar}S_{int}[q]}\Big\rangle_{0,J} \tag{4.4}$$

dove il pedice $0, J$ denota la media nella teoria libera con una sorgente arbitraria J. La formula (4.4) è talvolta detta "formula di Dyson" e genera immediatamnte lo sviluppo perturbativo in termini dei diagrammi di Feynman.

Quanto descritto sopra è già sufficiente per procedere a calcolare i termini della serie perturbativa. È comunque utile descrivere formalmente tale serie anche nel seguente modo

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int \mathcal{D}q \; e^{\frac{i}{\hbar}(S[q]+\int Jq)} = \int \mathcal{D}q \; e^{\frac{i}{\hbar}S_{int}[q]} \, e^{\frac{i}{\hbar}(S_0[q]+\int Jq)} \\ &= e^{\frac{i}{\hbar}S_{int}[\frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta J}]} \int \mathcal{D}q \; e^{\frac{i}{\hbar}(S_0[q]+\int Jq)} \\ &= e^{\frac{i}{\hbar}S_{int}[\frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta J}]} \, Z_0[J] \end{aligned} \tag{4.5}$$

che mostra la soluzione finale come un complicato operatore differenziale che agisce sulla soluzione della teoria libera $Z_0[J]$. In particolare, tutti i diagrammi di vuoto sono generati da

$$Z[0] = \int \mathcal{D}q \; e^{\frac{i}{\hbar}S[q]} = \Big(e^{\frac{i}{\hbar}S_{int}[\frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta J}]} \, Z_0[J] \Big)\Big|_{J=0} \,. \tag{4.6}$$

L'espansione in diagrammi di Feynman è ottenuta sviluppando in serie di Taylor il potenziale d'interazione ed usando il teorema di Wick: i vari vertici generati dal potenziale d'interazione (indicati graficamente con dei punti) sono collegati tra loro dai propagatori liberi (indicati graficamente con delle linee) in tutti i modi possibili.

4.1.1 Diagrammi di vuoto

Consideriamo come primo esempio il calcolo delle correzioni all'energia dello stato fondamentale dell'oscillatore armonico dovute ai termini anarmonici. Siccome è spesso conveniente calcolare in euclideo e poi fare la rotazione di Wick per tornare nel tempo minkowskiano (quando necessario), procederemo ora con le convenzioni euclidee. Dunque,

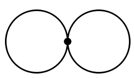
$$\begin{aligned} Z_E[J] &= \int \mathcal{D}q \; e^{-S_E[q]+\int Jq} \\ S_E[q] &= \lim \beta \to \infty \int_{-\beta/2}^{\beta/2} d\tau \, \Big(\frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{\omega^2}{2} q^2 + \frac{g}{3!} q^3 + \frac{\lambda}{4!} q^4 \Big) \end{aligned} \tag{4.7}$$

con $\beta \to \infty$, e le correzioni all'energia dello stato fondamentale possono essere riconosciute dal calcolo perturbativo di

$$Z_E[0] = \langle 1 \rangle = \lim_{\beta\to\infty} \langle 0 | e^{-\beta \hat{H}} | 0 \rangle = \lim_{\beta\to\infty} e^{-\beta E_0} = \Big\langle e^{-S_{E,int}[q]} \Big\rangle_0 \,. \tag{4.8}$$

Consideriamo prima il caso con $g = 0$ e calcoliamo la prima correzione in λ

$$\begin{aligned} Z_E[0] &= \langle 1 \rangle = \Big\langle e^{-S_{E,int}[q]} \Big\rangle_0 = \Big\langle (1 - S_{E,int}[q] + \cdots) \Big\rangle_0 \\ &= \langle 1 \rangle_0 - \frac{\lambda}{4!} \int_{-\beta/2}^{\beta/2} d\tau \, \langle q^4(\tau) \rangle_0 + \cdots \\ &= \langle 1 \rangle_0 \Big[1 - \frac{\lambda}{4!} \Big[3 \times \end{aligned}$$

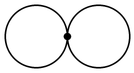


$$\Big] + \cdots \Big] \tag{4.9}$$

Ricordando che il propagatore euclideo (ricavato già nella (3.45)) è

$$\frac{\langle q(\tau)q(\tau')\rangle_0}{\langle 1\rangle_0} = G_E(\tau-\tau') = \frac{1}{2\omega}e^{-\omega|\tau-\tau'|} \tag{4.10}$$

si calcola subito



$$= \int_{-\beta/2}^{\beta/2} d\tau\, G_E^2(0) = \frac{\beta}{4\omega^2}\ . \tag{4.11}$$

Dunque a quest'ordine

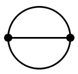
$$Z_E[0] = \langle 1\rangle_0\Big[1 - \frac{\lambda}{4!}\Big[3\frac{\beta}{4\omega^2}\Big] + \cdots\Big] = \langle 1\rangle_0\, e^{-\frac{\beta\lambda}{32\omega^2}+\cdots} \tag{4.12}$$

e quindi

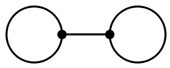
$$\Delta E_0 = \frac{1}{32}\frac{\lambda}{\omega^2}\ . \tag{4.13}$$

Similmente si può considerare il caso con $g \neq 0$ e $\lambda = 0$. Il primo termine non nullo si ottiene da

$$\begin{aligned} Z_E[0] &= \langle 1\rangle = \Big\langle\Big(1 - S_{E,int} + \frac{1}{2}S_{E,int}^2 + \cdots\Big)\Big\rangle_0 \\ &= \langle 1\rangle_0 - \frac{g}{3!}\int_0^\beta d\tau\,\langle q^3(\tau)\rangle_0 + \frac{1}{2}\Big(\frac{g}{3!}\Big)^2\int_0^\beta d\tau\,\int_0^\beta d\tau'\,\langle q^3(\tau)q^3(\tau')\rangle_0 + \cdots \\ &= \langle 1\rangle_0\Big[1 + 0 + \frac{1}{2}\Big(\frac{g}{3!}\Big)^2\Big[3!\times \end{aligned}$$

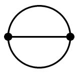


$$+\, 3^2 \times$$



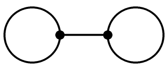
$$\Big] + \cdots\Big]\ . \tag{4.14}$$

Ora



$$\begin{aligned} &= \int_{-\beta/2}^{\beta/2} d\tau\,\int_{-\beta/2}^{\beta/2} d\tau'\, G_E^3(\tau-\tau') = \frac{1}{8\omega^3}\int_{-\beta/2}^{\beta/2} d\tau\,\int_{-\infty}^{\infty} d\sigma\, e^{-3\omega|\sigma|} \\ &= \frac{\beta}{8\omega^3}\frac{2}{3\omega} \end{aligned} \tag{4.15}$$

e



$$\begin{aligned} &= \int_{-\beta/2}^{\beta/2} d\tau\,\int_{-\beta/2}^{\beta/2} d\tau'\, G_E(0)G_E(\tau-\tau')G_E(0) \\ &= \frac{1}{8\omega^3}\int_{-\beta/2}^{\beta/2} d\tau\,\int_{-\infty}^{\infty} d\sigma\, e^{-\omega|\sigma|} = \frac{\beta}{8\omega^3}\frac{2}{\omega} \end{aligned} \tag{4.16}$$

dove il limite per $\beta \to \infty$ è stato usato per calcolare alcuni integrali. Dunque

$$Z_E[0] = \langle 1\rangle_0\Big[1 + \frac{1}{2}\Big(\frac{g}{3!}\Big)^2\Big(3!\frac{\beta}{12\omega^4} + 3^2\frac{\beta}{4\omega^4}\Big) + \cdots\Big] = \langle 1\rangle_0\, e^{\beta\,\frac{11}{8(3!)^2}\frac{g^2}{\omega^4}+\cdots} \tag{4.17}$$

e quindi

$$\Delta E_0 = -\frac{11}{288}\frac{g^2}{\omega^4}\ . \tag{4.18}$$