Integrale funzionale per fermioni

Fiorenzo Bastianelli

L'integrale funzionale per fermioni può essere derivato dal formalismo operatoriale usando gli stati coerenti come base del corrispondente spazio di Hilbert. Per introdurre gli stati coerenti per fermioni è utile ricordare la costruzione degli stati coerenti bosonici per l'oscillatore armonico. Usiamo in queste note unità di misura con $\hbar = 1$.

Stati coerenti per l'oscillatore armonico bosonico

Gli stati coerenti possono essere definiti come gli autostati dell'operatore di distruzione $\hat{a}$. Ricordiamo che l'algebra degli operatori di creazione e distruzione, $\hat{a}^\dagger$ ed $\hat{a}$, è la seguente

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \ , \quad [\hat{a}, \hat{a}] = 0 \ , \quad [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = 0 \tag{1}$$

e che quest'algebra è realizzata in uno spazio di Hilbert infinito dimensionale che può essere ottenuto con la costruzione di Fock (infatti è spesso denominato spazio di Fock). Una base ortonormale dello spazio di Fock è ottenuta partendo dal vuoto di Fock, che è lo stato indicato con $|0\rangle$ e definito dal fatto che è annichilato dall'operatore di distruzione: $\hat{a}|0\rangle = 0$. Gli altri vettori che formano la base dello spazio di Fock sono ottenuti agendo con l'operatore di creazione $\hat{a}^\dagger$ un numero arbitrario di volte sul vuoto di Fock $|0\rangle$

$$\begin{aligned}
|0\rangle & \qquad \text{tale che } \hat{a}|0\rangle = 0 \\
|1\rangle &= \hat{a}^\dagger|0\rangle \\
|2\rangle &= \frac{\hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}}|1\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^2}{\sqrt{2!}}|0\rangle \\
|3\rangle &= \frac{\hat{a}^\dagger}{\sqrt{3}}|2\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^3}{\sqrt{3!}}|0\rangle \\
& ... \\
|n\rangle &= \frac{\hat{a}^\dagger}{\sqrt{n}}|n-1\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle \\
& ...
\end{aligned} \tag{2}$$

Normalizzando lo stato di vuoto ad uno, $\langle 0|0\rangle = 1$, dove $\langle 0| = (|0\rangle)^\dagger$, si ha che tutti questi stati formano una base ortonormale (è sufficiente usare l'algebra (1) per verificarlo)

$$\langle m|n\rangle = \delta_{mn} \qquad m, n = 0, 1, 2, ... \ . \tag{3}$$

Ora, fissato un numero complesso α, si può costruire lo stato coerente $|\alpha\rangle$ come

$$|\alpha\rangle = e^{\alpha \hat{a}^\dagger}|0\rangle \tag{4}$$

che risulta essere un autostato dell'operatore di distruzione $\hat{a}$

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \ . \tag{5}$$

Un modo concreto e veloce per vederlo è quello di rappresentare $|\alpha\rangle$ come somma infinita con particolari coefficienti della base dello spazio di Fock, dove tutti i numeri di occupazione sono tenuti in considerazione. Infatti espandendo l'esponenziale in serie si ha

$$\begin{aligned}
|\alpha\rangle &= e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle \\
&= \Big(1+\alpha\hat{a}^\dagger+\frac{1}{2!}(\alpha\hat{a}^\dagger)^2+\frac{1}{3!}(\alpha\hat{a}^\dagger)^3+\cdots+\frac{1}{n!}(\alpha\hat{a}^\dagger)^n+\cdots\Big)|0\rangle \\
&= |0\rangle+\alpha|1\rangle+\frac{\alpha^2}{\sqrt{2!}}|2\rangle+\frac{\alpha^3}{\sqrt{3!}}|3\rangle+\cdots+\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle+\cdots\ . \qquad (6)
\end{aligned}$$

In questa forma è facile calcolare (usando $\hat{a}|n\rangle=\sqrt{n}|n-1\rangle$)

$$\begin{aligned}
\hat{a}|\alpha\rangle &= \hat{a}\Big(|0\rangle+\alpha|1\rangle+\frac{\alpha^2}{\sqrt{2!}}|2\rangle+\frac{\alpha^3}{\sqrt{3!}}|3\rangle+\cdots+\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle+\cdots\Big) \\
&= 0+\alpha|0\rangle+\alpha^2|1\rangle+\frac{\alpha^3}{\sqrt{2!}}|2\rangle+\cdots+\frac{\alpha^n}{\sqrt{(n-1)!}}|n-1\rangle+\cdots \\
&= \alpha\Big(|0\rangle+\alpha|1\rangle+\frac{\alpha^2}{\sqrt{2!}}|2\rangle+\cdots+\frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}}|n-1\rangle+\cdots\Big) \\
&= \alpha|\alpha\rangle\ . \qquad (7)
\end{aligned}$$

Altre proprietà facilmente dimostrabili con calcoli simili sono

$$\begin{array}{lll}
(i) & \langle\bar{\alpha}| = (|\alpha\rangle)^\dagger = \langle\bar{0}|e^{\bar{\alpha}\hat{a}} \quad \Longrightarrow & \langle\bar{\alpha}|\hat{a}^\dagger = \langle\bar{\alpha}|\bar{\alpha} \\
(ii) & \langle\bar{\alpha}|\alpha\rangle = e^{\bar{\alpha}\alpha} & \text{(prodotto scalare)} \\
(iii) & I = \int \frac{d\alpha d\bar{\alpha}}{2\pi i}\, e^{-\bar{\alpha}\alpha}\, |\alpha\rangle\langle\bar{\alpha}| & \text{(risoluzione dell'identita')} \\
(iv) & \mathrm{Tr}\,\hat{A} = \int \frac{d\alpha d\bar{\alpha}}{2\pi i}\, e^{-\bar{\alpha}\alpha}\, \langle\bar{\alpha}|\hat{A}|\alpha\rangle & \text{(traccia dell'operatore } \hat{A}\text{)}
\end{array}$$

Si noti che la base degli stati coerenti è sovra-completa, ed in particolare non è una base ortornomale (infatti $\langle\bar{\beta}|\alpha\rangle = e^{\bar{\beta}\alpha} \neq 0$ per numeri complessi α e β arbitrari), ma è utile mantenere questa ridondanza. Una costruzione analoga di stati coerenti può essere introdotta per un sistema fermionico.

Stati coerenti per fermioni

Consideriamo l'algebra degli operatori di creazione e distruzione fermionici, $\hat{\psi}^\dagger$ e $\hat{\psi}$,

$$\{\hat{\psi},\hat{\psi}^\dagger\}=1\ ,\quad \{\hat{\psi},\hat{\psi}\}=0\ ,\quad \{\hat{\psi}^\dagger,\hat{\psi}^\dagger\}=0\ . \qquad (8)$$

Quest'algebra è realizzata da matrici 2×2 agenti nello spazio di Fock bidimensionale generato dai vettori $|0\rangle$ e $|1\rangle$, definiti da

$$\hat{\psi}|0\rangle=0\ ,\quad |1\rangle=\hat{\psi}^\dagger|0\rangle\ . \qquad (9)$$

Possiamo definire "stati coerenti" fermionici gli autostati $|\eta\rangle$ dell'operatore di distruzione fermionico $\hat{\psi}$ aventi come autovalore un numero di Grassmann complesso η

$$\hat{\psi}|\eta\rangle=\eta|\eta\rangle\ . \qquad (10)$$

Le variabili di Grassmann, come η ed il suo complesso coniugato $\bar{\eta}$, per definizione anticommutano tra loro, ma le definiamo in modo tale che anticommutino anche con gli operatori fermionici $\hat{\psi}^\dagger$ e $\hat{\psi}$.

Valgono le seguenti proprietà:

$$
\begin{array}{rll}
(i) & |\eta\rangle = e^{\hat{\psi}^\dagger \eta}|0\rangle & \\
(ii) & \langle\bar{\eta}| = \langle 0|e^{\bar{\eta}\hat{\psi}} \quad \Longrightarrow \quad \langle\bar{\eta}|\hat{\psi}^\dagger = \langle\bar{\eta}|\bar{\eta} & \\
(iii) & \langle\bar{\eta}|\eta\rangle = e^{\bar{\eta}\eta} & \\
(iv) & I = \int d\bar{\eta}d\eta\, e^{-\bar{\eta}\eta}\, |\eta\rangle\langle\bar{\eta}| & \\
(v) & \mathrm{Tr}\,\hat{A} = \int d\bar{\eta}d\eta\, e^{-\bar{\eta}\eta}\, \langle-\bar{\eta}|\hat{A}|\eta\rangle & \\
(vi) & \mathrm{Str}\,\hat{A} = \mathrm{Tr}[(-1)^{\hat{F}}\hat{A}] = \int d\bar{\eta}d\eta\, e^{-\bar{\eta}\eta}\, \langle\bar{\eta}|\hat{A}|\eta\rangle\ . & (11)
\end{array}
$$

Queste proprietà possono essere facilmente dedotte con un calcolo esplicito, facendo uso delle proprietà delle variabili di Grassmann. Procediamo in modo sistematico.

(i) Innanzi tutto si può scrivere lo stato coerente nella seguente forma equivalente ottenuta espandendo l'esponenziale

$$
\begin{aligned}
|\eta\rangle &= e^{\hat{\psi}^\dagger \eta}|0\rangle \\
&= (1+\hat{\psi}^\dagger\eta)|0\rangle = |0\rangle - \eta\hat{\psi}^\dagger|0\rangle \\
&= |0\rangle - \eta|1\rangle
\end{aligned} \tag{12}
$$

per cui

$$
\begin{aligned}
\hat{\psi}|\eta\rangle &= \hat{\psi}e^{\hat{\psi}^\dagger\eta}|0\rangle \\
&= \hat{\psi}\Big(|0\rangle - \eta|1\rangle\Big) = -\hat{\psi}\eta|1\rangle = \eta\hat{\psi}|1\rangle = \eta|0\rangle = \eta\Big(|0\rangle - \eta|1\rangle\Big) \\
&= \eta|\eta\rangle
\end{aligned} \tag{13}
$$

che prova che $|\eta\rangle$ è uno stato coerente. Si noti che termini proporzionali a η^2 possono essere aggiunti o tolti a piacimento perchè $\eta^2 = 0$.

(ii) Per provare questa relazione per uno stato coerente "bra" è sufficiente prendere l'hermitano coniugato delle relazioni che definiscono il "ket" di stato coerente $|\eta\rangle$. Per la verifica occorre tenere conto che la definizione di hermitiano coniugato, che si riduce alla coniugazione complessa per le variabili di Grassmann, include lo scambio degli operatori e delle variabili. Ad esempio

$$
(\hat{\psi}^\dagger\eta)^\dagger = \bar{\eta}\hat{\psi}\ . \tag{14}
$$

In particolare, si noti che il prodotto di due variabili di Grassmann reali, $\theta_1 = \bar{\theta}_1$ e $\theta_2 = \bar{\theta}_2$, è puramente immaginario, infatti

$$
(\theta_1\theta_2)^\dagger = \bar{\theta}_2\bar{\theta}_1 = \theta_2\theta_1 = -\theta_1\theta_2\ . \tag{15}
$$

per cui $i\theta_1\theta_2$ è reale.

(iii) Prodotto scalare: è sufficiente calcolarlo direttamente (ricordando che le variabili di Grassmann soddisfano $\eta^2 = 0$, $\bar\eta^2 = 0$ ed $\eta\bar\eta = -\bar\eta\eta$, e quindi tutte le funzioni delle variabili di Grassmann hanno uno sviluppo in serie di Taylor finito)

$$\begin{aligned} \langle\bar\eta|\eta\rangle &= \Big(\langle 0| - \langle 1|\bar\eta\Big)\Big(|0\rangle - \eta|1\rangle\Big) \\ &= \langle 0|0\rangle + \bar\eta\eta\langle 1|1\rangle = 1 + \bar\eta\eta \\ &= e^{\bar\eta\eta} \ . \end{aligned} \tag{16}$$

(iv) Risoluzione dell'identità. Innanzi tutto ricordiamo che la definizione di integrazione su variabili di Grassmann (introdotta da Berezin) rende identica l'integrazione alla differenziazione. In particolare definiamo l'integrazione come differenziazione sinistra (cioè il parametro è rimosso a sinistra, e quindi occorre tener conto dei segni necessari per spostare il parametro a sinistra prima di rimuoverlo)

$$\int d\eta \equiv \frac{\partial_L}{\partial\eta} \ , \qquad \int d\bar\eta \equiv \frac{\partial_L}{\partial\bar\eta} \ . \tag{17}$$

Ora un calcolo esplicito mostra che

$$\begin{aligned} \int d\bar\eta d\eta\, e^{-\bar\eta\eta}\, |\eta\rangle\langle\bar\eta| &= \int d\bar\eta d\eta\, (1 - \bar\eta\eta)\Big(|0\rangle - \eta|1\rangle\Big)\Big(\langle 0| - \langle 1|\bar\eta\Big) \\ &= |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \ . \end{aligned} \tag{18}$$

Per completezza notiamo che le variabili di Grassmann sono qui definite commutare con il vuoto di Fock $|0\rangle$, per cui commutano con gli stati coerenti, mentre anticommutano con lo stato $|1\rangle = \hat\psi^\dagger|0\rangle$ perchè anticommutano con $\hat\psi^\dagger$.

(v) Traccia. Dato un operatore bosonico $\hat A$, che commuta con η ed $\bar\eta$, possamo verificare che

$$\begin{aligned} \int d\bar\eta d\eta\, e^{-\bar\eta\eta}\, \langle -\bar\eta|\hat A|\eta\rangle &= \int d\bar\eta d\eta\, (1 - \bar\eta\eta)\Big(\langle 0| + \langle 1|\bar\eta\Big)\hat A\Big(|0\rangle - \eta|1\rangle\Big) \\ &= \int d\bar\eta d\eta\, (1 - \bar\eta\eta)\Big(\langle 0|\hat A|0\rangle - \bar\eta\eta\langle 1|\hat A|1\rangle + \cdots\Big) \\ &= \langle 0|\hat A|0\rangle + \langle 1|\hat A|1\rangle \\ &= \mathrm{Tr}\,\hat A \ . \end{aligned} \tag{19}$$

(vi) Supertraccia. Un calcolo del tutto analogo produce

$$\begin{aligned} \int d\bar\eta d\eta\, e^{-\bar\eta\eta}\, \langle \bar\eta|\hat A|\eta\rangle &= \int d\bar\eta d\eta\, (1 - \bar\eta\eta)\Big(\langle 0| - \langle 1|\bar\eta\Big)\hat A\Big(|0\rangle - \eta|1\rangle\Big) \\ &= \int d\bar\eta d\eta\, (1 - \bar\eta\eta)\Big(\langle 0|\hat A|0\rangle + \bar\eta\eta\langle 1|\hat A|1\rangle + \cdots\Big) \\ &= \langle 0|\hat A|0\rangle - \langle 1|\hat A|1\rangle = \mathrm{Tr}[(-1)^{\hat F}\hat A] \\ &= \mathrm{Str}\,\hat A \ . \end{aligned} \tag{20}$$

Integrale funzionale

Ora abbiamo gli strumenti per trovare una rappresentazione con l'integrale funzionale dell'ampiezza di transizione tra due stati coerenti, $\langle\bar\eta_f|e^{-i\hat H t}|\eta_i\rangle$. Consideriamo un'hamiltoniana $\hat H = \hat H(\hat\psi^\dagger,\hat\psi)$ scritta in modo tale che tutti gli operatori di creazione siano alla sinistra di tutti gli operatori di distruzione (cosa che è sempre possibile ottenere sfruttando le regole di anticommutazione fondamentali riportate in (8)). Innanzi tutto dividiamo il tempo di propagazione totale t in N intervalli elementari di durata ϵ, per cui $t = N\epsilon$, o equivalentemente $\epsilon = \frac{t}{N}$, ed usando $N-1$ volte la decomposizione dell'identità mediante gli stati coerenti otteniamo le seguenti uguaglianze

$$\begin{aligned}
\langle\bar\eta_f|e^{-i\hat H t}|\eta_i\rangle &= \langle\bar\eta_f|\Big(e^{-i\hat H\epsilon}\Big)^N|\eta_i\rangle = \langle\bar\eta_f|\underbrace{e^{-i\epsilon\hat H}e^{-i\hat H\epsilon}\cdots e^{-i\hat H\epsilon}}_{N\ \text{volte}}|\eta_i\rangle \\
&= \langle\bar\eta_f|e^{-i\hat H\epsilon}Ie^{-i\hat H\epsilon}I\cdots Ie^{-i\hat H\epsilon}|\eta_i\rangle \\
&= \int\Big(\prod_{k=1}^{N-1} d\bar\eta_k d\eta_k\, e^{-\bar\eta_k\eta_k}\Big)\prod_{k=1}^{N}\langle\bar\eta_k|e^{-i\hat H\epsilon}|\eta_{k-1}\rangle
\end{aligned}\tag{21}$$

dove abbiamo definito $\eta_0 \equiv \eta_i$ e $\bar\eta_N \equiv \bar\eta_f$. Ora possiamo approssimare per $\epsilon \to 0$ le ampiezze di transizione elementari come segue

$$\begin{aligned}
\langle\bar\eta_k|e^{-i\hat H(\hat\psi^\dagger,\hat\psi)\epsilon}|\eta_{k-1}\rangle &= \langle\bar\eta_k|\Big(1 - i\hat H(\hat\psi^\dagger,\hat\psi)\epsilon + \cdots\Big)|\eta_{k-1}\rangle \\
&= \langle\bar\eta_k|\eta_{k-1}\rangle - i\epsilon\langle\bar\eta_k|\hat H(\hat\psi^\dagger,\hat\psi)|\eta_{k-1}\rangle + \cdots \\
&= \Big(1 - i\epsilon H(\bar\eta_k,\eta_{k-1}) + \cdots\Big)\langle\bar\eta_k|\eta_{k-1}\rangle \\
&= e^{-i\epsilon H(\bar\eta_k,\eta_{k-1})}\langle\bar\eta_k|\eta_{k-1}\rangle \\
&= e^{-i\epsilon H(\bar\eta_k,\eta_{k-1})}e^{\bar\eta_k\eta_{k-1}}\ .
\end{aligned}\tag{22}$$

La sostituzione $\hat H(\hat\psi^\dagger,\hat\psi) \to H(\bar\eta_k,\eta_{k-1})$ segue dall'ordinamento dell'hamiltoniana che abbiamo specificato in precedenza ($\hat\psi^\dagger$ a sinistra e $\hat\psi$ a destra). Questo ci permette di agire con l'operatore di creazione a sinistra su un suo autostato, e con l'operatore di distruzione a destra su un suo autostato, cosicché gli operatori nell'hamiltoniana sono sostituiti immediatamente dai corrispondenti autovalori producendo una funzione di questi autovalori (che ricordiamo sono variabili di Grassmann). In questo modo l'operatore hamiltoniano $\hat H(\hat\psi^\dagger,\hat\psi)$ è sostituito dalla funzione hamiltoniana $H(\bar\eta_k,\eta_{k-1})$. Queste approssimazioni sono valide nel limite $N \to \infty$, cioè quando $\epsilon \to 0$. Sostituendo (22) in (21) otteniamo

$$\begin{aligned}
\langle\bar\eta_f|e^{-i\hat H t}|\eta_i\rangle &= \lim_{N\to\infty}\int\Big(\prod_{k=1}^{N-1} d\bar\eta_k d\eta_k\, e^{-\bar\eta_k\eta_k}\Big)e^{i\sum_{k=1}^{N}[-i\bar\eta_k\eta_{k-1} - H(\bar\eta_k,\eta_{k-1})\epsilon]} \\
&= \lim_{N\to\infty}\int\Big(\prod_{k=1}^{N-1} d\bar\eta_k d\eta_k\Big)e^{i\sum_{k=1}^{N}[i\bar\eta_k(\eta_k-\eta_{k-1}) - H(\bar\eta_k,\eta_{k-1})\epsilon]}e^{\bar\eta_N\eta_N} \\
&= \lim_{N\to\infty}\int\Big(\prod_{k=1}^{N-1} d\bar\eta_k d\eta_k\Big)e^{i\sum_{k=1}^{N}[i\bar\eta_k\frac{(\eta_k-\eta_{k-1})}{\epsilon} - H(\bar\eta_k,\eta_{k-1})]\epsilon + \bar\eta_N\eta_N} \\
&= \int\mathcal{D}\bar\eta\mathcal{D}\eta\, e^{i\int_0^t d\tau[i\bar\eta\dot\eta - H(\bar\eta,\eta)] + \bar\eta(t)\eta(t)} = \int\mathcal{D}\bar\eta\mathcal{D}\eta\, e^{iS[\bar\eta,\eta]}\ .
\end{aligned}\tag{23}$$

Questo è l'integrale funzionale. Riconosciamo all'esponente la discretizzazione dell'azione "classica"

$$S[\bar\eta,\eta]=\int_0^t d\tau\,[i\bar\eta\dot\eta-H(\bar\eta,\eta)]-i\bar\eta(t)\eta(t)\;\;\rightarrow\;\;\sum_{k=1}^{N-1}[i\bar\eta_k\frac{(\eta_k-\eta_{k-1})}{\epsilon}-H(\bar\eta_k,\eta_{k-1})]\epsilon-i\bar\eta_N\eta_N \tag{24}$$

dove $t=N\epsilon$ è il tempo di propagazione totale. L'ultimo modo di scrivere l'ampiezza in (23) è simbolico, ed indica la somma formale su tutti i cammini $\bar\eta(\tau),\eta(\tau)$ tali che $\eta(0)=\eta_0\equiv\eta_i$ e $\bar\eta(t)=\bar\eta_N\equiv\bar\eta_f$, pesati dall'esponenziale di i volte l'azione classica $S[\bar\eta,\eta]$ che contine anche il termine di bordo $-i\bar\eta(t)\eta(t)$.

Traccia

Possiamo ora calcolare la traccia dell'operatore di evoluzione $e^{-i\hat Ht}$. Usando gli stati coerenti e la rappresentazione di path integral dell'ampiezza di transizione si ha

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}[e^{-i\hat Ht}] &= \int d\bar\eta_0 d\eta_0\, e^{-\bar\eta_0\eta_0}\,\langle-\bar\eta_0|e^{-i\hat Ht}|\eta_0\rangle\\ &= \lim_{N\to\infty}\int\Big(\prod_{k=1}^N d\bar\eta_k d\eta_k\Big)e^{i\sum_{k=1}^N[i\bar\eta_k\frac{(\eta_k-\eta_{k-1})}{\epsilon}-H(\bar\eta_k,\eta_{k-1})]\epsilon}\\ &= \int_{ABC}\mathcal{D}\bar\eta\mathcal{D}\eta\, e^{iS[\bar\eta,\eta]}\end{aligned} \tag{25}$$

dove abbiamo identificato $\eta_0=-\eta_N$ ed $\bar\eta_0=-\bar\eta_N$, ed usato che l'esponenziale $e^{-\bar\eta_0\eta_0}$ presente nella misura per calcolare la traccia con gli stati coerenti cancella il termine di bordo $e^{\bar\eta_N\eta_N}$. Nel limite del continuo la somma è dunque su tutte le traiettorie antiperiodiche (ABC, antiperiodic boundary conditions), cioè tali che $\eta(t)=-\eta(0)$ e $\bar\eta(t)=-\bar\eta(0)$.

Supertraccia

In modo simile la supertraccia è calcolata da

$$\begin{aligned}\mathrm{Str}[e^{-i\hat Ht}] &= \int d\bar\eta_0 d\eta_0\, e^{-\bar\eta_0\eta_0}\,\langle\bar\eta_0|e^{-i\hat Ht}|\eta_0\rangle\\ &= \lim_{N\to\infty}\int\Big(\prod_{k=1}^N d\bar\eta_k d\eta_k\Big)e^{i\sum_{k=1}^N[i\bar\eta_k\frac{(\eta_k-\eta_{k-1})}{\epsilon}-H(\bar\eta_k,\eta_{k-1})]\epsilon}\\ &= \int_{PBC}\mathcal{D}\bar\eta\mathcal{D}\eta\, e^{iS[\bar\eta,\eta]}\end{aligned} \tag{26}$$

dove ora abbiamo identificato $\eta_0=\eta_N$ ed $\bar\eta_0=\bar\eta_N$. Di nuovo l'esponenziale $e^{-\bar\eta_0\eta_0}$ presente nella misura per calcolare la supertraccia cancella il termine di bordo $e^{\bar\eta_N\eta_N}$. Nel limite del continuo la somma è dunque su tutte le traiettorie periodiche (PBC, periodic boundary conditions) definite dalle condizioni al contorno $\eta(t)=\eta(0)$ e $\bar\eta(t)=\bar\eta(0)$.

Determinanti funzionali

L'integrale su una variabile di Grassmann complessa produce

$$\int d\bar\eta d\eta\, e^{-\bar\eta A\eta}=\int d\bar\eta d\eta\,(1-\bar\eta A\eta)=\int d\bar\eta d\eta\,\eta\bar\eta A=A=\det A \tag{27}$$

dove a è un numero arbitrario reale (o complesso).

Similmente data una matrice A_{ij} diagonalizzabile con $i, j = 1, \cdots, n$ ed n variabili di Grassmann complesse η^i si ha

$$\int \Big(\prod_i^n d\bar{\eta}^i d\eta^i\Big)\, e^{-\bar{\eta}^i A_{ij} \eta^j} = \det A_{ij} \ . \tag{28}$$

Per vederlo basta calcolare l'integrale nella base diagonale e tener conto che il cambio di variabili che ci porta nella base diagonale non cambia la misura di integrazione.

Anche l'integrale funzionale di un'azione quadratica (integrale gaussiano) produce un determinate "funzionale". Ad esempio l'azione "classica" dell'oscillatore armonico fermionico

$$S[\bar{\psi}, \psi] = \int d\tau\, \bar{\psi}(i\partial_\tau - \omega)\psi \tag{29}$$

produce

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\, e^{iS[\bar{\psi},\psi]} = N\,\mathrm{Det}\,(i\partial_\tau - \omega) \tag{30}$$

dove N è un opportuno coefficiente di normalizzazione e $(i\partial_\tau - \omega)$ è visto come un operatore lineare che agisce su uno spazio di funzioni. Consideriamo in particolare la traccia dell'operatore di evoluzione dell'oscillatore armonico fermionico

$$\mathrm{Tr}[e^{-i\hat{H}t}] = \int_{ABC} \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\, e^{iS[\bar{\psi},\psi]} = N\,\mathrm{Det}\,(i\partial_\tau - \omega). \tag{31}$$

Certamente nel caso $\omega = 0$ la hamiltoniana è nulla ($\hat{H} = 0$, $e^{-i\hat{H}t} = I$) per cui

$$\mathrm{Tr}[I] = N\,\mathrm{Det}\,(i\partial_\tau) = 2 \tag{32}$$

poichè lo spazio di Fock è bidimensionale. Dunque per $\omega \neq 0$, il determinante si può scrivere come

$$N\,\mathrm{Det}\,(i\partial_\tau - \omega) = N\,\mathrm{Det}\,(i\partial_\tau)\frac{\mathrm{Det}\,(i\partial_\tau - \omega)}{\mathrm{Det}\,(i\partial_\tau)} = 2\,\frac{\mathrm{Det}\,(i\partial_\tau - \omega)}{\mathrm{Det}\,(i\partial_\tau)} \tag{33}$$

Ora questi determinati possono essere calcolati come prodotto degli autovalori. Una base dello spazio di funzioni antiperiodiche $\psi(\tau)$ è data dalle funzioni

$$f_n(\tau) = e^{-2\pi i(n+\frac{1}{2})\frac{\tau}{t}} \ , \qquad n \in Z \tag{34}$$

e queste funzioni risultano essere già autofunzioni dell'operatore differenziale $(i\partial_\tau - \omega)$

$$(i\partial_\tau - \omega)f_n(\tau) = \lambda_n f_n(\tau) \ , \qquad \text{con } \lambda_n = \frac{2\pi}{t}\Big(n + \frac{1}{2}\Big) - \omega. \tag{35}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{Det}\,(i\partial_\tau - \omega)}{\mathrm{Det}\,(i\partial_\tau)} &= \frac{\prod_{n\in Z}(\frac{2\pi}{t}(n+\frac{1}{2}) - \omega)}{\prod_{n\in Z}(\frac{2\pi}{t}(n+\frac{1}{2}))} \\ &= \prod_{n\in Z}\Big(1 - \frac{\omega t}{2\pi(n+\frac{1}{2})}\Big) = \cos\Big(\frac{\omega t}{2}\Big) \end{aligned} \tag{36}$$

dove abbiamo usato la formula

$$\cos a = \prod_{n\in Z}\left(1+\frac{a}{\pi(n+\frac{1}{2})}\right) . \tag{37}$$

Quindi

$$\mathrm{Tr}[e^{-i\hat{H}t}] = \int_{ABC} \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\, e^{iS[\bar{\psi},\psi]} = N\,\mathrm{Det}\,(i\partial_\tau - \omega) = 2\cos\left(\frac{\omega t}{2}\right) \tag{38}$$

che è il risultato corretto, come è facile verificare calcolando la traccia con metodi operatoriali. Questo metodo di calcolo è particolarmente utile nelle teorie di campo.

Una struttura simile è presente anche per il caso bosonico. In questo caso il determinante (o la sua radice quadrata per variabili reali) compare al denominatore. Infatti l'integrale gaussiano standard è

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}Kx^2} \;=\; \frac{1}{\sqrt{K}} = \frac{1}{\det^{1/2} K} \tag{39}$$

dove $K > 0$. Similmente per n variabili reali x^i con $i = 1, .., n$, e K_{ij} matrice definita positiva

$$\int \frac{d^n x}{(2\pi)^{n/2}}\, e^{-\frac{1}{2}x^i K_{ij} x^j} \;=\; \det^{-1/2} K \; . \tag{40}$$

Un esempio di integrale funzionale gaussiano è dato dall'oscillatore armonico. La funzione di partizione statistica, ad esempio, è data da

$$\mathrm{Tr}[e^{-\beta\hat{H}}] = \int_{PBC} \mathcal{D}x\, e^{-S[x]} = N\,\mathrm{Det}^{-1/2}\,(-\partial_\tau^2 + \omega^2). \tag{41}$$

dove l'azione dell'oscillatore armonico in tempo euclideo è

$$S[x] = \int_0^\beta d\tau\, \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) \tag{42}$$

Non descriveremo qui il calcolo di questo determinante,

Concludiamo queste brevi note descrivendo un determinate funzionale in una teoria di campo scalare, commentando l'uso del tempo proprio introdotto in questo contesto da Schwinger. Un caso semplice è quello di un campo scalare reale libero ϕ (campo di Klein-Gordon) descritto dall'azione euclidea

$$S[\phi] = \int d^4x\, \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + m^2\phi^2) \; . \tag{43}$$

La funzione di partizione Z e la corrispondente azione efficace Γ (collegate dalla relazione $Z = e^{-\Gamma}$) sono date da un integrale funzionale gaussiano

$$Z = e^{-\Gamma} = \int \mathcal{D}\phi\; e^{-S[\phi]} = N\,\mathrm{Det}^{-\frac{1}{2}}(-\partial_\mu\partial^\mu + m^2) \tag{44}$$

e quindi, a meno di alcune costanti additive (come $-\log N$)

$$\begin{aligned}
\Gamma &= -\log \mathrm{Det}^{-\frac{1}{2}}(-\partial_\mu\partial^\mu + m^2) \\
&= \frac{1}{2}\log \mathrm{Det}(-\partial_\mu\partial^\mu + m^2) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\log(-\partial_\mu\partial^\mu + m^2) \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dT}{T}\ \mathrm{Tr}\, e^{-T(-\partial_\mu\partial^\mu + m^2)} \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dT}{T}\ \int_{PBC} \mathcal{D}x\ e^{-S[x]}
\end{aligned} \tag{45}$$

dove

$$S[x] = \int_0^T d\tau \left(\frac{1}{4}\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu + m^2\right)\ . \tag{46}$$

In queste uguaglianze abbiamo usato la relazione $\log \mathrm{Det} = \mathrm{Tr}\log$ (evidente quando l'operatore è in forma diagonale), la seguente rappresentazione del logaritmo

$$\log\frac{a}{b} = -\int_0^\infty \frac{dT}{T}\,(e^{-aT} - e^{-bT})\ , \tag{47}$$

tralasciato un'altra costante ($\sim \int \frac{dT}{T} e^{-bT}$), ed introdotto un'azione di prima quantizzazione $S[x]$ che produce l'operatore differenziale $\hat{H} = (-\partial_\mu\partial^\mu + m^2)$ come hamiltoniana quantistica, per cui la traccia funzionale della penultima riga in (45) è infine rappresentata da un integrale funzionale di meccanica quantistica. Si vede quindi come metodi di prima quantizzazione basati sull'azione $S[x]$ permettono di ottenere risultati nella teoria dei campi descritta dall'azione $S[\phi]$.