1 Teorie di gauge non-abeliane e la QCD

La procedura per costruire azioni gauge invarianti descritta precedentemente nel caso abeliano ($U(1)$) può essere estesa a gruppi non abeliani compatti. Questi modelli sono alla base del "modello standard" delle interazioni fondamentali (interazioni elettrodedoli e forti).

1.1 Gruppi di Lie

Ricordiamo brevemente alcune proprietà dei gruppi di Lie non abeliani, tenendo in mente come esempio il gruppo $G = SU(N)$. Un elemento del gruppo non abeliano G connesso all'indentità può essere parametrizzato con delle coordinate α_a ed usando generatori hermitani T^a che soddisfano le proprietà elencate di seguito

$$
\begin{aligned}
&(i) \quad U = \exp(i\alpha_a T^a) \in G \qquad a = 1, .., \dim G \\
&(ii) \quad [T^a, T^b] = i f^{ab}{}_c T^c \\
&(iii) \quad Tr(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab} \\
&(iv) \quad f^{abc} = f^{ab}{}_d \delta^{dc} \qquad \text{tensore antisimmetrico} \\
&(v) \quad [[T^a, T^b], T^c] + [[T^b, T^c], T^a] + [[T^c, T^a], T^b] = 0 \\
&\qquad \Rightarrow \; f^{ab}{}_d f^{dc}{}_e + f^{bc}{}_d f^{da}{}_e + f^{ca}{}_d f^{db}{}_e = 0 \; .
\end{aligned}
$$

La (i) descrive la rappresentazione esponenziale di un elemento arbitrario del gruppo che sia connesso all'identità. L'indice a aussume tanti valori quanti le dimensioni del gruppo. Un elemento del gruppo è quindi parametrizzato dagli "angoli" α_a.
La (ii) corrisponde all'algebra di Lie soddifatta dai generatori infinitesimi T^a. Le costanti reali $f^{ab}{}_c$ sono dette costanti di struttura e caratterizzano il gruppo G.
La (iii) è una scelta di normalizzazione dei generatori e identifica una metrica detta "metrica di Killing". Tale metrica è definita positiva per gruppi di Lie compatti (come ad esempio $SU(N)$) e la normalizzazione qui scelta produce la delta di Kronecker δ^{ab} (cioè gli elementi di matrice dell'identità) come metrica di Killing.
In (iv) si è usata la metrica di Killing per alzare un indice nelle costanti di struttura. Le f^{abc} sono completamente antisimmetriche in tutti gli indici: questa proprietà si può dedurre prendendo la traccia delle identità di Jacobi del punto (v) ed usando la (ii) e la (iii). L'antisimmetria negli indici a e b è ovvia per la (ii).
Le (v) sono le identità di Jacobi.

1.2 Azione con simmetria rigida $SU(N)$

Consideriamo un numero N di campi di Dirac liberi con masse identiche m. Assembliamo tali campi in vettori colonna e vettori riga

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ . \\ . \\ \psi^N \end{pmatrix} \qquad \overline{\psi} = \left(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, ., ., \overline{\psi}_N\right) \ . \tag{1}$$

La lagrangiana libera di questi N campi di Dirac è data da

$$\mathcal{L}_{Dirac} = -\overline{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\,\overline{\psi}\psi. \tag{2}$$

ed è invariante per trasformazioni di simmetria definite dal gruppo $SU(N)$

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = U\psi(x) \\ \overline{\psi}(x) &\rightarrow \overline{\psi}'(x) = \overline{\psi}(x)U^\dagger = \overline{\psi}(x)U^{-1} \end{aligned} \tag{3}$$

dove $U \in SU(N)$, ed $U^\dagger = U^{-1}$ poichè la matrice U è unitaria.

Queste trasformazioni sono dette rigide (o globali) perché i parametri arbitrari α^a che compaiono in $U = \exp(i\alpha^a T^a)$ sono costanti (gli indici in α^a sono alzati ed abbassati con la metrica di Killing che coincide con l'identità nelle convenzioni scelte).

1.3 Derivata covariante

Per rendere locale la simmetria $SU(N)$ è conveniente introdurre il concetto di derivata covariante. La derivata covariante per definizione produce tensori quando applicata a tensori. Tale derivata covariante è definita da

$$D_\mu = \partial_\mu + W_\mu(x) \tag{4}$$

dove $W_\mu(x)$ è la "connessione" (geometricamente definisce una specie di trasporto parallelo in un certo spazio) o "potenziale di gauge", ha valori nell'algebra di Lie e quindi è formata da matrici $N \times N$ per ogni μ. Infatti può essere sviluppata in termini dei generatori T^a dell'algebra di Lie come segue

$$W_\mu(x) = -iW^a_\mu(x)T^a \ . \tag{5}$$

Questa relazione definisce i campi $W^a_\mu(x)$. Dalla richiesta di covarianza

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = U(x)\psi(x) \\ D_\mu\psi(x) &\rightarrow D'_\mu\psi'(x) = U(x)D_\mu\psi(x) \end{aligned} \tag{6}$$

si ottene la legge di trasformazione dei potenziali di gauge

$$W_\mu(x) \rightarrow W_\mu(x)' = U(x)\partial_\mu U^{-1}(x) + U(x)W_\mu(x)U^{-1}(x) \ . \tag{7}$$

Infatti, imponendo che $D'_\mu\psi' = UD_\mu\psi$, possiamo calcolare

$$\begin{aligned} D'_\mu\psi' &\equiv (\partial_\mu + W'_\mu)\psi' \\ &= U(\partial_\mu + W_\mu)\psi = U(\partial_\mu + W_\mu)U^{-1}U\psi \\ &= U(\partial_\mu + W_\mu)U^{-1}\psi' = \partial_\mu\psi' + [U(\partial_\mu + W_\mu)U^{-1}]\psi' \end{aligned} \tag{8}$$

da cui segue la legge di trasformazione riportata sopra.

Le derivate covarianti in generale non commutano. Questo permette di definire il tensore di "curvatura" o tensore campo di forza ("field strength") nel seguente modo

$$[D_\mu, D_\nu] = F_{\mu\nu} \tag{9}$$

da cui

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + [W_\mu, W_\nu] \ . \tag{10}$$

È facile vedere che il tensore campo di forza si trasforma in modo covariante (nella cosiddetta rappresentazione aggiunta)

$$F_{\mu\nu} \quad \rightarrow \quad F'_{\mu\nu} = UF_{\mu\nu}U^{-1} \tag{11}$$

che segue dalla covarianza della (9).

1.4 Azione gauge invariante

Ora è facile costruirsi dalla (2) una lagrangiana gauge invariante. Basta sostituire alle derivate usuali le derivate gauge covarianti. Si ottiene

$$\mathcal{L}_1 = -\overline{\psi}(\gamma^\mu D_\mu + m)\psi \tag{12}$$

che dipende anche dal nuovo campo W_μ contenuto in D_μ. Si può dare una dinamica al nuovo campo utilizzando la più semplice azione che sia gauge invariante, Lorentz invariante e con al più due derivate. Tale azione è la seguente

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2}Tr(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu\ a} \ . \tag{13}$$

Introducendo una costante d'accoppiamento g per definire un peso relativo tra le due azioni gauge invarianti si ottiene l'azione totale finale

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g^2}Tr(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) - \overline{\psi}(\gamma^\mu D_\mu + m)\psi \tag{14}$$

che è invariante sotto le trasformazioni di gauge ricapitolate qui di seguito

$$\begin{aligned} \psi(x) \quad &\rightarrow \quad \psi'(x) = U(x)\psi(x) \\ W_\mu(x) \quad &\rightarrow \quad W_\mu(x)' = U(x)\Big(\partial_\mu + W_\mu(x)\Big)U^{-1}(x) \ . \end{aligned} \tag{15}$$

Riportiamo anche le espressioni delle trasformazioni di gauge infinitesime. Definendo la matrice $\alpha \equiv -i\alpha_a T^a$ con $\alpha_a << 1$, possiamo scrivere una trasformazione di gauge infinitesima nella forma $U = e^{-\alpha} = 1 - \alpha + O(\alpha^2)$, da cui

$$\begin{aligned} \delta\psi &= -\alpha\psi \\ \delta\overline{\psi} &= \overline{\psi}\alpha \\ \delta W_\mu &= \partial_\mu\alpha + [W_\mu, \alpha] \ . \end{aligned} \tag{16}$$

Riscriviamo l'azione ridefinendo $W_\mu \to \bar{W}_\mu = gW_\mu$ per normalizzare in modo canonico l'azione dei campi di gauge. Usiamo ora le componenti

$$\begin{aligned} W_\mu(x) &= -iW^a_\mu(x)T^a \\ F_{\mu\nu}(x) &= -iF^a_{\mu\nu}(x)T^a \end{aligned} \tag{17}$$

da cui

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu W^a_\nu - \partial_\nu W^a_\mu + g f^{abc} W^b_\mu W^c_\nu \tag{18}$$

e l'azione totale si riscrive come

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu a} - \overline{\psi}(\gamma^\mu(\partial_\mu - igW^a_\mu T^a) + m)\psi \ . \tag{19}$$

Le trasformazioni di gauge infinitesime sono esprimibili come (ridefinendo per comodità anche i parametri $\alpha^a \to g\alpha^a$)

$$\begin{aligned} \delta\psi(x) &= ig\alpha^a(x)T^a\psi(x) \\ \delta W^a_\mu(x) &= \partial_\mu \alpha^a(x) + g f^{abc} W^b_\mu(x)\alpha^c(x). \end{aligned} \tag{20}$$

Il primo termine nell'azione descrive la propagazione libera dei campi W^a_μ (particelle di spin 1 non abeliane) insieme ai vertici di autointerazione cubici e quartici. Una metrica di Killing non definita positiva comporterebbe un termine di energia cinetica non definito positivo e questo non è accettabile: occorre dunque considerare solo gruppi compatti per soddisfare tale richiesta. Il secondo termine descrive la propagazione libera dei campi ψ (particelle di spin 1/2 con cariche non abeliane) insieme alla loro interazione con il campo di gauge. La costante g è la costante d'accoppiamento che può essere trattata perturbativamente se sufficientemente piccola. Le cariche non abeliane corrispondono alla rappresentazione del gruppo di gauge scelta per i campi ψ (nel nostro caso la rappresentazione fondamentale, ma si sarebbe potuta scegliere qualunque altra rappresentazione). Il principo di gauge ha permesso di derivare tutti questi vertici di interazione tra campi di spin 1/2 ed 1 dipendenti dalla sola costante d'accoppiamento g.

Come conseguenza della legge di trasformazione (20) si ottiene che il campo $F^a_{\mu\nu}$ si trasforma nella rappresentazione aggiunta

$$\delta F^a_{\mu\nu} = g f^{abc} F^b_{\mu\nu}\alpha^c = ig\alpha^c (T^c)^{ab} F^b_{\mu\nu} \tag{21}$$

dove i generatori nella rappresentazione aggiunta sono dati dalle seguenti matrici

$$(T^c)^{ab} = -if^{abc} \ . \tag{22}$$

Che questa sia una rappresentazione del gruppo segue dalle identità di Jacobi. Similmente la legge di trasformazione di W^a_μ può essere espressa tramite la derivata covariante agente su un tensore nella rappresentazione aggiunta

$$\delta W^a_\mu = \partial_\mu \alpha^a + g f^{abc} W^b_\mu \alpha^c = \partial_\mu \alpha^a - igW^b_\mu (T^b)^{ac}\alpha^c = (D_\mu \alpha)^a \ . \tag{23}$$

1.5 L'azione della cromodinamica quantistica (QCD)

L'azione della cromodinamica quantistica è basata sul gruppo $SU(3)$ ed oltre ai gluoni (le otto particelle associate al campo di gauge W^a_μ che sono cariche poichè compare l'indice della rappresentazione aggiunta, la $\underline{8}$ di $SU(3)$) contiene sei campi fermionici che si trasformano nella rappresentazione fondamentale di $SU(3)$ e descrivono i sei sapori di quark conosciuti: *up, down, charm, strange, top, bottom*. Ciascun sapore di quark è degenere poichè si trasforma nella $\underline{3}$ di $SU(3)$: si dice che sono colorati (rosso, verde e blu nella convenzione solita) mentre l'assenza di colore indica uno scalare come la lagrangiana (la $\underline{1}$ di $SU(3)$). Naturalmente le corrispondenti antiparticelle, gli antiquark ($\bar{u}, \bar{d}, \bar{c}, \bar{s}, \bar{t}, \bar{b}$), si trasformano nella rappresentazione coniugata, la $\overline{\underline{3}}$ di $SU(3)$.

Gli otto generatori infinitesimi di $SU(3)$ nella rappresentazione fondamentale sono definiti tramite le matrici di Gell-Mann λ^a (che generalizzano le matrici di Pauli σ^i per $SU(2)$)

$$T^a = \frac{\lambda^a}{2} \qquad a = 1, \ldots, 8 \tag{24}$$

dove

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} , \qquad \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} . \tag{25}$$

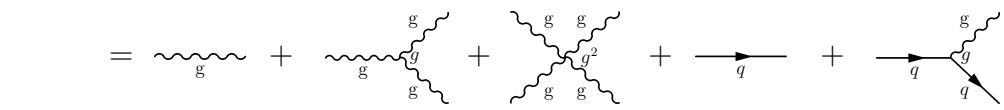
Queste matrici sono normalizzate secondo la convenzione scelta

$$Tr(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab} . \tag{26}$$

Un elemento arbitrario del gruppo $SU(3)$ nella rappresentazione fondamentale è dunque descritto da matrici 3×3 della forma $U = \exp(-i\alpha^a \frac{\lambda^a}{2})$. Calcolando l'algebra di Lie si possono trovare le costanti di stuttura che identificano il gruppo $SU(3)$. La lagrangiana della QCD è quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathcal{QCD}} &= -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu a} - \sum_{f=1}^{6} \overline{\psi}_f \big(\gamma^\mu D_\mu + m_f\big)\psi_f \\ &= -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu a} - \sum_{f=1}^{6} \overline{\psi}_f \big(\gamma^\mu \partial_\mu + m_f\big)\psi_f + igW^a_\mu \sum_{f=1}^{6} \overline{\psi}_f \gamma^\mu T^a \psi_f \end{aligned}$$

$$= \quad + \quad + \quad + \quad + \tag{27}$$



dove l'indice $f \in (1, 2, \cdots, 6) = (u, d, c, s, t, b)$ indica il sapore del quark. Sapori di quark diversi hanno masse m_f diverse.

Questa lagrangiana possiede inoltre varie simmetrie rigide oltre a quelle già menzionate. Una simmetria rigida sempre presente è la simmetria $U(1)$ che ruota tutti i campi dei quark con la stessa fase: la carica conservata è il *numero barionico*. Questa simmetria è conservata anche dalle altre interazioni fondamentali. Ci sono poi altre simmetrie $U(1)$ che che ruotano separatamente i vari campi fermionici e danno origine alle leggi di conservazioni dei rispettivi *numeri fermionici* (ad esempio *carica di stranezza* S, *carica di charm* C, etc..), queste simmetrie di sapore sono esatte solo per la QCD (e la QED) ma la forza debole le viola. In totale ci sono 6 cariche $U(1)$ conservate, una per ogni sapore di quark, ed il numero barionico è una particolare combinazione lineare di queste sei cariche indipendenti.

Ci sono inoltre altre simmetrie approssimate della lagragiana della QCD. Nel limite in cui le masse di alcuni quark sono considerate identiche si ha una simmetria addizionale rigida non abeliana. Ad esempio, assumendo masse identiche per i quark up e down, $m_u = m_d$, si possono ruotare i campi ψ_u e ψ_d tra di loro con matrici $SU(2)$. Questa simmetria $SU(2)$ rigida corrisponde all' *isospin forte*, utilizzato per raggruppare in famiglie gli adroni (gli stati dei quark legati dalla interazione cromodinamica che a causa del suo accoppiamento forte produce il confinamento del colore in stati legati senza colore totale). Un esempio di queste famiglie sono: (i) il doppietto di isospin dei nucleoni (protone e nucleone) composti appunto da tre quarks di tipo up e down confinati; (ii) il tripletto dei mesoni pi greco, i pioni $\pi^{\pm}$ e π^0, composti da un quark e da un antiquark di tipo up o down.

Considerando masse identiche per i quark di tipo up, down e strange, $m_u = m_d = m_s$, si ha un gruppo di simmetria ancora più grande, il *gruppo* $SU(3)$ *di sapore*, che mescola tra loro i tre sapori up, down e strange, e non và confuso con il gruppo $SU(3)$ di colore. Esempi di multipletti di particelle adroniche descritte dal gruppo $SU(3)$ di sapore sono:
un ottetto mesonico $(\pi^{\pm}, \pi^0, K^{\pm}, K^0, \bar{K}^0, \eta)$,
un ottetto barionico $(p, n, \Sigma^{\pm}, \Sigma^0, \Xi^{\pm}, \Lambda)$,
un decupletto barionico $(\Delta^-, \Delta^0, \Delta^+, \Delta^{++}, \Sigma^{*\pm}, \Sigma^{*0}, \Xi^{*\pm}, \Omega^-)$.
L'esistenza di queste famiglie è comprensibile dalla teoria dei gruppi: la $\underline{8}$ e la $\underline{10}$ sono rappresentazioni di $SU(3)$. Consideriamo più in dettaglio i mesoni. Essi sono formati da una coppia quark-antiquark $(q\bar{q})$. I quark q si trasformano nella $\underline{3}$ di $SU(3)$, dove $\underline{3} \sim (u, d, s)$, mentre gli antiquark $\bar{q}$ si trasformano nella $\bar{\underline{3}}$ di $SU(3)$, con $\bar{\underline{3}} \sim (\bar{u}, \bar{d}, \bar{s})$. Da questo segue che uno stato legato $(q\bar{q})$ si trasforma nella

$$\underline{3} \times \bar{\underline{3}} = \underline{1} + \underline{8}$$

e dunque possono esistere sia singoletti che ottetti mesonici.

I barioni invece sono costituiti da uno stato legato di tre quarks (qqq) che sotto $SU(3)$ si trasformano come

$$\underline{3} \times \underline{3} \times \underline{3} = (\underline{6} + \bar{\underline{3}}) \times \underline{3} = \underline{10} + \underline{8} + \underline{8} + \underline{1}$$

ed infatti esistono ottetti e decupletti barionici.